Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos

Patricia Sadovsky

Capítulo 2

El espacio social de la clase: condición de posibilidad para la producción de conocimientos

Mapa del capítulo

Es sabido – la experiencia personal lo corrobora- que elaborar conocimiento en colaboración con otros da en general lugar a un intercambio que permite profundizar las ideas que están en juego en un cierto momento. Decir esto lleva a considerar que es conveniente – porque es de mejor calidad – promover el trabajo en equipo de los alumnos.

"Mejor" no es lo mismo que "ineludible". Sin embargo, **hay momentos en los que las cuestiones nuevas que los alumnos enfrentan dan lugar a incertidumbres tales que la interacción con los pares legitima nuevas preguntas que inauguran otros posibles** para el trabajo matemático. Siempre se puede pensar que el docente está en condiciones de aportar las herramientas "que faltan" para terminar de elaborar una idea y esto, básicamente es así; pero como veremos en este capítulo a través del desarrollo completo del trabajo sobre un problema en una clase, la calidad de los aprendizajes cobra mayor espesor cuando se hace evidente que, **para avanzar, hay que tomar decisiones de nuevo tipo para las cuales diferentes alumnos aportan distintos puntos de vista que es necesario zanjar**.

La emergencia de un conjunto de conocimientos cuando los alumnos abordan nuevas cuestiones relativas a la transición aritmética – álgebra en el transcurso de los debates ocurridos en un aula de séptimo grado, será el asunto de una parte sustancial de este capítulo.

En la última parte del capítulo planteamos una reflexión acerca dela posibilidad de que la clase pueda constituirse – también - en un ámbito que aloje el trabajo privado de los alumnos, el trabajo que no ingresará a la esfera pública, que no será compartido. Efectivamente, frente a lo nuevo, los alumnos necesitan ensayar, explorar, pensar íntimamente. Esas elaboraciones tienen normalmente un valor productivo esencial para su autor, pero no necesariamente son ricas para el conjunto. Por el contrario, forzar su circulación para todos los alumnos supondría imponer a unos las estrategias de pensamiento de otros, sin que haya algún fundamento que permita establecer la fertilidad de este acto. Concluimos nuestro capítulo planteando la necesidad de seguir pensando, de cara a los procesos de producción, cómo se articulan en la clase las dimensiones privada y pública, el trabajo personal y el espacio colectivo.

Los aportes de los pares en un contexto de incertidumbre

Vamos a analizar un caso en que los alumnos abordaban por primera vez problemas aritméticos que involucran la noción de variable, en el marco de un proyecto didáctico que tenía la "mira" en la transición aritmética- álgebra.

Para entendernos y poder situar los puntos clave que analizaremos, transcribimos el enunciado a partir del cual se organiza el trabajo y explicitamos luego el modo en que concebimos su diseño e implementación.

El enunciado inicial del problema es el siguiente

Marisa tiene 20 pesos en monedas de 10 centavos y de 50 centavos. ¿Cuántas monedas de cada clase puede ser que tenga?

A propósito de este problema – y de otros del mismo tipo que se propusieron en una secuencia de enseñanza- nuestro proyecto contemplaba las siguientes tareas para los alumnos: producir soluciones, establecer la cantidad de soluciones, argumentar sobre el dominio de variación de la variables, encontrar un procedimiento general que permitiera “producir” todas la soluciones.

Lo nuevo y lo viejo se conjugan en este problema para estudiantes que vienen de prácticas aritméticas (realizamos este trabajo en séptimo grado). Por un lado, el problema ofrece la posibilidad de movilizar estrategias muy básicas y por otro se plantean distancias considerables con respecto a los problemas aritméticos. Efectivamente, al introducir un grado de libertad, los alumnos deben movilizar – con mayor o menor conciencia de ello – las nociones de variable y de dependencia; cada solución es ahora un par de números .y el conjunto solución está compuesto por muchos pares. Al tener que proponer un procedimiento general para obtener todas las soluciones, se promueve que los alumnos sistematicen todos los pares solución alrededor de una única relación y esto contribuye a un proceso de generalización. Ahora bien, quienes abordan estas tareas por primera vez, no han producido todavía criterios que les permitan estar seguros de la validez de sus trabajo y por eso tienen una gran incertidumbre con respecto al mismo. Esta incertidumbre genera preguntas que son constitutivas de los conocimientos necesarios para entrar en prácticas algebraicas.

Tomemos por ejemplo el asunto “cantidad de soluciones” de un problema. Hayan realizado o no los alumnos problemas con varias soluciones, hay dos aspectos que son nuevos: a) **conocer que la resolución de un problema incluye el ocuparse de producir todas las soluciones** y b) **tener criterios para saber que se han producido todas las soluciones**. Es muy difícil que estos asuntos se resuelvan en la sola interacción con el problema originalmente planteado. Los alumnos con los que trabajamos estaban en general en condiciones de producir y de chequear, apelando a las relaciones involucradas en el problema, si esas soluciones eran o no correctas. Ahora bien, esta validación a nivel de una solución o de algunas, no informa ni que hay que hallar todas las soluciones, ni si se han hallado todas, ni cuántas hay. El análisis del problema que los alumnos puedan hacer para establecer la cantidad de soluciones, si bien supone un juego entre la producción de soluciones sueltas y un procedimiento de tipo general, no necesariamente les asegura la validez del criterio que hayan elaborado. ¿Cómo estar seguros de que no hay más soluciones que las que ellos alcanzan a vislumbrar?

La confrontación entre diferentes producciones de la clase funcionó acá como retroacción al punto de vista de cada alumno y dio sentido a la búsqueda de criterios para establecer cómo se sabe cuántas soluciones hay. En el escenario que hemos concebido, los alumnos toman decisiones en una instancia de trabajo individual o de pequeños grupos. Luego esas decisiones de alguna manera son evaluadas por los otros (por los que no las produjeron) comprometiendo a los alumnos en una toma de posición para la cual utilizan como marco las relaciones que ellos pusieron en juego, pero también las dudas e incertidumbres con las que produjeron. Un resultado de nuestro trabajo muestra que estos escenarios ofrecen buenas condiciones para dar sentido a la discusión de las cuestiones que se abren, cuestiones que necesariamente deben tratarse colectivamente, con aportes importantes del docente.

La organización de las interacciones

El problema de las monedas cuyo enunciado transcribimos antes, fue desarrollado en dos clases para las cuales se concibieron cuatro etapas: 1) los alumnos trabajan individualmente con la consigna de obtener soluciones, decidir cuántas hay y describir un procedimiento para obtener todas las soluciones; 2) trabajo en pequeños grupos para optar por un único procedimiento entre los de los integrantes del equipo o, eventualmente formular uno nuevo; 3) transcripción en el pizarrón, por parte del docente, de los procedimientos propuestos por cada grupo y análisis en pequeños grupos de los procedimientos expuestos y 4) debate colectivo sobre los procedimientos.

En la primera clase se desarrollan las etapas 1 y 2. La necesidad de optar por un procedimiento entre los producidos por cada estudiante del pequeño grupo, los pone en situación de considerar distintos procedimientos como objeto de trabajo, de realizar un análisis fino de cada procedimiento y de explicitar criterios para seleccionar unos y descartar otros. La claridad, la economía y la "capacidad" del procedimiento para "pescar" todas las soluciones, fueron criterios que estuvieron en juego en las producciones de los grupos.

Las etapas 3 y 4 se desarrollan en la segunda clase. **En el debate colectivo surgen por un lado nuevos problemas matemáticos que sólo tienen sentido como producto de la interacción entre los procedimientos y por otro lado emergen dos cuestiones relevantes con relación a la problemática aritmética- álgebra**: 1) una fórmula de dos variables caracteriza un conjunto de pares de números, 2) si dos procedimientos son equivalentes definen el mismo conjunto solución.

La decisión de pedir a los alumnos que expliquen un procedimiento a través del cual se pueden obtener todas las soluciones, ubica de entrada y para toda la clase el tratamiento de este problema en un plano general. Efectivamente, si bien los alumnos comienzan hallando pares solución, tratan casi enseguida de explicar un "método".

Sobre el final de la clase, cada uno de los cinco grupos dictó el procedimiento elegido para poner a la consideración de los demás. La profesora los anota en el pizarrón:

Procedimiento 1 (Mario y Mariano)

Si tenés 1, 2, 3, ...de 50 C, la suma se la restás a 20, el resultado lo divido en 0,1 y te da las monedas de 10 C.

Procedimiento 2 (Guillermo, Alejandro, Manuel y Juan)

Me dan cualquier número entre 0 y 200, por ejemplo 34.

34 x 10 → cantidad de centavos en monedas de 10 C

↘ 2000 - 340 = 1660

1660 : 50 = 33,2

33 de 50 y 35 de 10

Procedimiento 3 (Gabriel, Alejo, Martín, Javier)

(50 C x n menor que 40 – 2000 C) : 10 = cuántas monedas de 10 = A

(20- A . 0,10) : 0,5= cantidad de monedas de 50 = B.

Procedimiento 4 (Julieta, Luisa, Ester Roxana)

Hay 41 soluciones

20 : 0,5 = 40

20: 0,1 = 200

200 : 40 = 5

200 x 0,10

195 x 0,10 + 0,5 x 1

190 x 0,10 + 0,5 x 2

5 x 0,10 + 39 x 0,5

40 x 0,5

Todo te da 20

Procedimiento 5 (Silvia, Paula, Sebastián)	
Cantidad de Monedas de 10 C	Cantidad de Monedas de 50 C
0	40
5 = 50	39 = 19,5
10 = 100	38
15	37

20	36
200	0

Para encontrar todas las soluciones tenés que partir de 0 monedas de 10 y 40 de 50. Luego le vas sumando 5 monedas de 10 (50 C) y le vas restando 1 moneda de 50. Así hasta llegar a 200 monedas de 10 y o monedas de 50.

Breves observaciones sobre los procedimientos anteriores NOTA A EDICIÓN ESTE ES UN SUBTÍTULO PERO NO VA AL ÍNDICE

Los alumnos que ponen en juego el **procedimiento 1** definen implícitamente que la cantidad de monedas de 50 centavos va “de uno en uno”, sin considerar la cota superior. Para establecer la cantidad de dinero en monedas de 50 centavos, aluden a una suma, cuestión que ni es muy práctica a la hora del cálculo efectivo, ni es de muy fácil “traducción”[1] en una fórmula. Dado que estos alumnos sí han realizado multiplicaciones para obtener soluciones particulares, interpretamos que a través de su formulación están dando una idea global del procedimiento, sin pensar en su eficacia como algoritmo de cálculo ni considerar estrictamente lo que ellos han hecho al presentar los pares solución.

El **procedimiento 2** no está narrado en términos generales sino que “muestra” a través de un ejemplo que tiene valor genérico. Estos alumnos consideran como dominio de la variable “cantidad de monedas de 10 centavos” todos los naturales de 0 a 200, sin darse cuenta de que la estrategia que usan para interpretar los resultados no enteros (truncan el resultado decimal de cantidad de monedas de 50 y utilizan el hecho de que 0,2 de 0,50 es 0,1) esconde que en realidad la cantidad de monedas de 10 centavos “va de 5 en 5”. Esto dará lugar a una interesante discusión en el momento de debate que mostrará que la mayoría de los alumnos no homologa “equivalencia de procedimientos” a “igualdad de los conjunto solución”. Veremos además que la estrategia de conversión de decimales a enteros, abre un problema de tipo numérico cuya resolución “escapa” un poco del problema que se está tratando.

Los alumnos que exponen el **procedimiento 3**, están liderados por Gabriel y muestra un uso aritmético de las escrituras con letras. Efectivamente, las dos fórmulas expresan dos algoritmos de cálculo –uno para cada variable- y el primer resultado, nombrado con la letra “A”, es usado para obtener el segundo, que se nombra “B”.

A propósito del **procedimiento 4** señalamos la explicitación simultánea de los pares y de la verificación de los mismos. Este grupo pone en juego estrategias de compensación de la cantidad de monedas de un tipo con monedas del otro tipo.

[1] Las comillas aluden a que, como ya lo hemos expresado en el capítulo 1, sostenemos una posición según la cual la fórmula no es una simple traducción.

El **procedimiento 5** también da cuenta de una estrategia de compensación: cada moneda de 50 c "se cambia" por cinco de 10 c. Primero se realizan ejemplos en una tabla pero a partir de los mismos pareciera que los alumnos confían en que el algoritmo propuesto "recorre" todas las soluciones posibles.

Los procedimientos quedan anotados en el pizarrón, pero no hay tiempo para organizar un debate alrededor de los mismos, actividad que queda pendiente para la clase siguiente.

El debate sobre los procedimientos y la emergencia de problemáticas vinculadas a la relación aritmética-álgebra.

El debate se organiza en dos etapas: una primera de trabajo en pequeños grupos en los que los alumnos trabajan analizando cada uno de los procedimientos, definiendo con qué aspectos coinciden y con cuáles no y pensando en eventuales modificaciones; la segunda etapa es la del debate propiamente dicho. Comentaremos algunos momentos de la primera etapa y luego entraremos en el análisis de la fase colectiva.

a) Las producciones de "los otros" pueden contribuir a una mayor comprensión.

Veremos en primer lugar la interacción entre la profesora y un grupo de alumnos.

Los autores del procedimiento 3 llaman a la profesora, en principio para autocriticarse, pero luego la interacción deriva en comentarios con respecto a otros procedimientos. Identificamos tres momentos que nos interesa comentar porque muestran diferentes "costados" de la actividad de análisis de las producciones de los otros: 1) Gabriel señala un error en el procedimiento 1; 2) Gabriel manifiesta una cierta incomprensión respecto del procedimiento 2; 3) Martín "prefiere" la claridad del procedimiento 5. Veamos un tramos del registro que se transcribió a partir de la grabación en audio de este intercambio:

Gabriel: (dirigiéndose a la profesora). *Está mal el nuestro, hicimos el resultado de la cuenta menos 2000 y hay que hacer 2000 menos el resultado de la cuenta.*

Profesora: *¿Es lo único que corrigen del de ustedes?*

Gabriel: *Del de nosotros sí.*

Profesora: *¿Y de los otros?*

Gabriel: ***Del primero no te da límite de número****, o sea vos elegís 41 para las monedas de 50 centavos y te vas a pasar de los 20 pesos.* ***El segundo pusimos que está bien, pero muy bien no lo analizamos.***

Profesora: *Analícenlo.*

Gabriel:	*El quinto,* ***ese sí te puedo decir que está bien explicado****,* ***lo entendí bastante bien****, que se empieza desde un extremo hasta llegar al otro, o sea de 0 monedas de 10 y 40 de 50, hasta llegar a 200 monedas de 10 y nada de 50 centavos.*
Profesora:	*¿Y hay alguna razón por la que preferirían el quinto con relación al de ustedes?*
Gabriel:	*No, no prefiero el quinto, el nuestro está mejor.* (Muy seguro)
Profesora:	*¿Por qué?*
Gabriel	*Porque lo pensamos nosotros*
Martín:	***Pero yo creo que está mejor explicado el quinto que el de nosotros, me parece.***
Profesora:	*¿Por qué te parece que está mejor explicado, Martín?*
Martín:	*Claro, por ejemplo, ahí ya sabés que está mal, porque bueno, es 2000 menos el resultado,* ***pero si vos lees el nuestro y lees el quinto, me parece que entendés más el quinto****.*

1) Interpretamos que Gabriel lee el procedimiento 1, desde su propia producción y "puede ver" que se ha omitido una relación que él sí ha establecido. Pensamos que la proximidad entre los dos procedimientos favorece la mirada de Gabriel. En otros términos, **su propio procedimiento actúa marco de como control de los otros**.

2) Gabriel parece haber constatado que el procedimiento 2 "funciona", sin embargo tiene para él puntos oscuros –después se mostrará que esas oscuridades se refieren a la conversión de decimales a enteros que el procedimiento "usa"- de los que es consciente y que expresa a través de la frase "muy bien no lo analizamos". Esto muestra que la eficacia en la producción de soluciones no es para este alumno un criterio suficiente de aceptación, lo cual generaría buenas condiciones para asumir como problema la cuestión de la comprensión del mismo.

3) Martín considera que el procedimiento 5, es notoriamente más claro que el de su grupo. Aunque no hemos accedido al proceso por el cual el grupo de Martín elige finalmente ese procedimiento, pensamos - es un alumno "flojo"- que es probable que él no haya tenido una participación muy activa. Esto lo pondría en buenas condiciones para desprenderse de su posición de "productor" (posición débil), colocar todas las producciones en pie de igualdad para luego evaluarlas (posición más fuerte que la anterior). Pensamos que recién en esta tercera etapa (en la primera, de trabajo individual, propuso soluciones "sueltas", en la segunda participó de una manera pasiva de la elección que hicieron sus compañeros) Martín **comprende**, a partir de la posibilidad de acceder a diferentes "relatos" del procedimiento. En otros términos, la posición de **lector luego de haber sido productor**, que esta actividad le permite ocupar, resulta para él más beneficiosa, desde el punto de vista de la comprensión, que la de productor. Tres observaciones más: 1) notemos que el criterio que selecciona para "juzgar" no es el de la corrección matemática sino el de la capacidad de hacer claro lo que se quiere comunicar y, 2) la presencia circunstancial de la docente en el grupo, favorece la explicitación de las preferencias de Martín y 3) de manera transversal, un alumno "flojo" aprende que hay varias explicaciones para una misma cuestión, algunas de las cuales son más accesibles que otras.

En síntesis, este registro nos permite identificar que la tarea de analizar los distintos procedimientos hace posible (seguramente entre muchos otros matices): considerar la propia producción como marco para analizar y controlar otras, abrirse a nuevos problemas que sólo pueden venir de la mano de quien pensó lo mismo "de otra forma", poner el propio trabajo en pie de igualdad con otros para realizar una confrontación que resulta clarificadora.

Más allá del ejemplo analizado, señalemos finalmente que algunos niños encuentran los errores de ciertos procedimientos haciéndolos funcionar y otros, los menos fuertes en su vínculo con la matemática, encuentran en esta tarea una oportunidad de comprender "de qué se trata". Aunque estos últimos no asuman estrictamente la tarea encomendada de analizar los procedimientos, en esta instancia pueden llegar a comprender un poco más. En este sentido, las cuatro etapas previstas: producción individual, elección por grupos de un procedimiento, análisis en pequeños grupos de los distintos procedimientos y debate colectivo, hacen "durar" el problema más tiempo en la clase a la vez que hacen avanzar el conocimiento de todos, ofreciendo la oportunidad de incluir a más alumnos. Analizaremos ahora la fase de debate.

b) El debate en torno a los procedimientos: un espacio de producción colectiva

La profesora organiza el debate que vamos a analizar, "recorriendo" cada uno de los procedimientos. Recortamos los siguientes episodios:

1) Con relación al procedimiento 1, sólo se corrige el dominio de la variable "cantidad de monedas de 50 centavos".

2) A propósito del procedimiento 2, aflora cierta incomprensión respecto de la estrategia de truncar la parte decimal del resultado "cantidad de monedas de 50 centavos". La profesora apunta más a la eficacia que a la comprensión. Este problema queda "tapado" por otro planteado por un alumno: *si se sabe que cada 0,2 de 50 centavos, hay que agregar una moneda de 10 centavos, "¿qué pasa si el resultado de la cuenta de dividir (2000 – 10 x):50 da 'coma 3'"?* Ambos problemas quedan pendientes.

3) Al discutir el procedimiento 3, se analiza si son necesarias las dos ecuaciones o alcanza con una sola. Analizamos las razones que "atan" a algunos alumnos a la idea de que hacen falta las dos ecuaciones y la manera en que se institucionaliza el "permiso para atribuir valores a una variable".

4) Al discutir la cantidad de soluciones, los alumnos dicen que a través del procedimiento 2, hay 201 soluciones y a través del procedimiento 5, hay 41. Nuevamente, la interacción entre los procedimientos da lugar a una cuestión relevante que difícilmente podría emerger si cada alumno trabajara sólo en su propia perspectiva.

Episodio 1

1. Al poner a consideración el **procedimiento 1**, Martín (citado en el punto anterior) dice que hay que poner límites, *"porque con 41, te da 20,5 y te pasás de 20"*. Esto es aceptado y no

surgen otras objeciones. La profesora no pone en cuestión que se exprese que "se suman" las monedas de 50. Pareciera que no tiene mucho interés en detenerse en esta estrategia que no apunta a la fórmula ni abre cuestiones nuevas. Para cerrar la discusión alrededor de esta estrategia, pregunta cuántas soluciones hay y, la mayoría de los alumnos contesta 40.

Episodio 2

2. Veamos un tramo del registro en el que, a propósito del **procedimiento 2** aparece la cuestión del dominio de la variable "cantidad de monedas de 10 centavos" y, asociados a la misma, dos problemas numéricos. Analizaremos la manera en la que la profesora enfoca el tratamiento de esos problemas:

Profesora:	*Pasemos al procedimiento 2. Ester.*
Ester:	*Yo hice...dice que puede ser del 0 al 200, yo hice el 52 por ejemplo 52, hice 52 x 10 y me dio 520 y 2000 – 520 me dio 1480, 1480 dividido 50 me dio 29,6, y no puedo tener 29,6 monedas de 50.*
Sabrina:	*Sí, que puede.*
Profesora :	*Ahora ellos habían dicho...*
A1 :	***No da con todos los números**.*
Sabrina :	*Pero abajo dice que le agrega una moneda de 10.*
Profesora :	*Le agrega una moneda de 10, dice.*
Sabrina:	*No cada dos monedas una de 10*
Profesora:	***¿Adónde dice eso?***
Sabrina:	*Ahí dice 0,2 y le agrego una de diez, 0, 4 son dos de 10*
Profesora:	*¿Adónde dice eso?*
Alejo:	*No lo dice pero es...*
Profesora :	***Entonces, Ester con el procedimiento como está escrito acá, llega a que tiene un problema que el procedimiento no se lo resuelve. Alguno encontró una manera de mejorar el procedimiento para que a Ester no le pase lo que le pasó.***
Sabrina :	***Tendrías que aclarar que cada 0,2 monedas de 50, va una de 10.***
Profesora:	***(Escribe en el pizarrón) ¿Entienden lo que puse?***
A:	*¿Cómo es la aclaración?*
Profesora :	*Cada 0,2 monedas de 50, o sea que acá da coma 2, se agrega una de 10.*
Sebastían:	***¿Y si da 0,3?.***
Sabrina :	***No puede dar 0,3**.*
Profesora :	*¿Por qué?*

Alejandro:	*Porque ...es una cuenta que nunca puede dar....decime un número y .no puede dar 0,3, 0,5, 01, 0,7 o 0.9.*
Profesora:	***¿Por qué? ¿Cómo tenés la certeza?***

Notemos en primer lugar que la intervención del alumno que dice que *"no da con todos los números"* no es tomada en cuenta por la profesora, aparentemente porque ella estaba más interesada en dar lugar a la estrategia de "convertir" los números decimales. Esta estrategia implica ciertas relaciones numéricas interesantes pero oculta el hecho de que la cantidad de monedas de 10 centavos debe ser múltiplo de 5. La segunda intervención de la profesora (marcada en negrita) en la que pregunta cómo resolver el problema de Ester, apunta a que se escriba la regla de conversión y no a que se comprenda cómo se fundamenta la misma. Sin embargo, como hemos visto en el punto anterior al analizar la interacción de la profesora con Gabriel y Martín, los alumnos no necesariamente comprenden la regla aunque pueden constatar "que funciona", lo cual, como hemos dicho, abriría un espacio para la explicación. Una vez explicitada la manera de convertir el resultado decimal, Sebastián realiza un planteo que de alguna manera objeta aquello que se acaba de establecer (*"¿y si da coma 3?"*) y la profesora propone buscar razones para el problema planteado por este alumno, dejando en la "sombra" la fundamentación del procedimiento.

Señalemos que la clase –a instancias de la docente- se embarca en la discusión de un problema que "aparece" de la mano de una estrategia propuesta por un grupo de alumnos, y que no formaba parte de la planificación inicial. En otros términos, el problema que se discute **emerge en el contexto de las interacciones que se promueven,** es un problema nuevo, alejado del problema original aunque surge a partir de él y que da lugar a fértiles e interesantes discusiones desde el punto de vista de la posibilidad que ofrece a los alumnos de producir fundamentos para el trabajo matemático. **La clase como productora de nuevos problemas, ese es el asunto que queremos resaltar.**

De manera un poco más general, destaquemos que la posibilidad de que se asuman o no ciertas cuestiones como objeto de trabajo colectivo depende fundamentalmente del valor y de la cabida que el docente le otorgue a dichas cuestiones. Se trata normalmente de decisiones que el docente toma sobre la marcha, que no pueden ser objeto de un examen detenido y que, de manera general están orientadas por su proyecto.

Retomemos el relato de la clase. Una vez planteada la pregunta de la profesora (*"por qué no puede dar coma impar"*) varios alumnos intentan aproximar argumentos que no logran saldar la cuestión y la misma queda pendiente para la clase siguiente. Una de las razones por las que pensamos que no se arriba a una conclusión sobre este problema a través del debate, se debe a que resulta difícil para la docente reconstruir "sobre caliente" (el problema no había sido previsto, es un alumno quien lo propone) una fundamentación matemática adecuada a los conocimientos de los niños. Esto le impide orientar la discusión y por eso la pospone. El episodio nos remite al trabajo de I. Bloch (1999) quien considera la actividad matemática del profesor en la clase como un indicador de la actividad matemática de los alumnos. Esta actividad matemática del docente, se refiere fundamentalmente a la reconstrucción de procesos de validación adaptados a los conocimientos de los alumnos, lo cual supone para el docente una reorganización de sus propios conocimientos. En otros términos, el docente aprende matemática cuando piensa cómo se fundamentan los problemas teniendo en cuenta qué saben los alumnos. Creemos que el episodio del “coma impar” es un ejemplo del planteo de Bloch en tanto la docente enfrenta el problema matemático de pensar un argumento adaptado a sus alumnos para luego gestionar una conclusión en la clase. Ella se toma un tiempo (entre clase y clase) para relanzar el debate recién en la clase siguiente.

El debate generado desvía –y oculta, ya lo habíamos dicho– el análisis del dominio de la variable “cantidad de monedas de 10 centavos”, lo cual lleva a los alumnos, frente a la pregunta de la docente, a decir que el problema tiene 201 soluciones, que son, según lo que queda establecido sobre el procedimiento que se acaba de discutir, los posibles valores de la variable. Se instala una contradicción en la clase –antes se había dicho que el problema tiene 40 soluciones-, de la cual sólo es conciente la docente quien decide no señalarla por el momento.

Episodio 3

3. Analizamos el debate sobre el **procedimiento 3**.

Gabriel, su autor principal, comienza corrigiendo el orden de las operaciones en la primera “fórmula” e inmediatamente señala la necesidad de la segunda fórmula. Otro alumno objeta esta necesidad y se abre la discusión. Veamos

Profesora:	*O sea, que en realidad es 2000 – 50 x un número menor que 40 dividido 10. Esa es la idea que tuvieron.*
Gabriel:	*Pero, **después hay que seguirlo**, el resultado que sea hay que hacer 20 – A x 0,10 dividido 0,50. Todo lo demás está bien, hay que alterar el orden.*
Mario:	***Esa cuenta que está abajo está demás**.*
Profesora:	*¿Por qué?*
Mario:	***Porque vos cuando multiplicás 50 por un número menor que 40 ahí ya tenés las monedas de 50.***
Gabriel:	*Claro...pero....*
Mario:	*Y ahí ya estás sacando las monedas de 50, ahí abajo.*
Profesora:	*A ver, Gabriel, ¿qué tenés para decir?*
Gabriel :	***Que ahí estás poniendo una fórmula, no estás dando un ejemplo**. **Si es un ejemplo directamente hacés 2000 – 50 por el número.***
Profesora :	*Claro, pero él lo que está diciendo es esto, para qué hago la segunda cuenta si la segunda cuenta sé que me va a dar el número de las monedas de 50 que yo puse al principio.*
Gabriel :	***Sí, ya se, al principio vos lo ponés 2000 – 50 x 37, porque ya lo tenés**...*

Profesora:	*O sea ellos dicen, vos ponés el número menor que 40, 15.*
Gabriel:	***Pero ahí sí, porque estás dando un ejemplo de cómo sacar la cantidad** de monedas de 50.*
Profesora :	*A ver, Gabriel , explicá bien, por qué hay que poner las dos fórmulas.*
Gabriel:	***Porque con la fórmula de abajo hacés esa cuenta para sacar cuántas monedas de 50 centavos tenés que..***
Mario :	***Pero, si vos ya sabés cuantas monedas de 50 hay**.*
Profesora :	*Todos entienden lo que están discutiendo Mario y Gabriel?*
(Mario interviene en términos muy parecidos, reiterando su punto de vista)	
Profesora :	*Bien, ahora Gabriel.*
Gabriel :	*Que cuando hacés una cuenta, que vas a hacer ya tipo en un problema, ya no la tenés que hacer abajo, porque ya la tenés , como dice Mario, ya la tenés hecha, hacés 2000 – 50 x 37, suponete. Cuando hacés así, para mostrar así cómo sacar los números, ahí si la* ***podés*** *dejar.*

Notemos que Gabriel distingue entre "fórmula" y "ejemplo", entre "problema" y "cómo mostrar cómo sacar los números". Pareciera que la posición de Gabriel se centra en considerar el comportamiento que se espera de él. Da la impresión de que él sabe que un cálculo es suficiente y reconoce que eso es lo que hace cuando quiere obtener soluciones particulares. Sin embargo, como él mismo lo explicita en un momento posterior que no transcribimos, considera que no es lícito "poner números al azar". Cuando la profesora le pregunta si está mal tomar números al azar, él responde: *"Yo hago eso casi siempre, pero cuando te piden así, que cómo hiciste, sería esa, la fórmula.*" Más adelante aclara todavía: *"no sé, en todos los problemas dicen justificá, qué hiciste acá, etc."*. Gabriel reconoce con toda claridad la distancia entre lo que él hace para sí mismo (trabajo privado) y lo que "es para mostrar" (comportamiento público).

En realidad, hay como "telón de fondo" en esta discusión cierta incertidumbre vinculada a la naturaleza de las soluciones: pares de números ligados por una relación en un cierto dominio. En la medida en que Gabriel parece concebir las soluciones como "números sueltos" le resulta más aceptable proponer dos algoritmos, uno para cada una de las variables, realzando en cada caso cuál es la variable que se conoce y cuál la que se obtiene. Mario en cambio parece más próximo a comprender que las soluciones son pares de números.

La discusión de Mario y Gabriel es – aunque no solamente- la manifestación de una distancia en el modo en que cada alumno concibe las soluciones y en ese sentido, la confrontación de las distintas escrituras es una manera de instalar el problema de la naturaleza de las soluciones, aunque en este ejemplo la docente no haya dado lugar a tratar específicamente esa cuestión.

Las expresiones de Gabriel nos advierten también sobre la incertidumbre que les genera a los alumnos la actividad de "justificar". Pareciera inferirse de sus dichos que él considera que hay algo de arbitrario en esa tarea, algo que se le escapa, y que muchos otros alumnos en muchas otras circunstancias fuera del ámbito de esta investigación, manifiestan cuando le preguntan al docente: "*¿está bien justificado así"?*

Volvamos al relato de los hechos. La profesora explica el círculo vicioso en el que cae Gabriel y finalmente institucionaliza la norma "se pueden atribuir valores". Lo ilustramos con la trascripción del registro:

Profesora :	*Vos pensás que no es muy correcto elegir al azar*
Gabriel:	*Yo siempre elijo al azar, pero lo que pasa es de dónde sacaste ese número*
Profesora:	*Pensás que si te van a preguntar de dónde lo sacaste no es muy lícito decir, "lo inventé", entonces, pensás que es mejor mostrar de dónde sale.*
Gabriel:	*Claro*
Profesora :	*Claro, pero, sí se puede inventar. Si no, estamos en un círculo, si yo este número no lo puedo inventar y, lo tengo que sacar de acá, pero esta cuenta no la puedo hacer, al final no puedo hacer ninguna cuenta, en algún lado hay un número que tengo que inventar. Lo pongo al azar, pero, no de cualquier manera, vos acabás de hacer una aclaración, ese número tiene que ser menor que 40, 40 no puede ser?*
Gabriel:	*Si. Menor o igual.*
Profesora:	*¿Puede ser 0?*
Algunos sí, algunos no.	
Gabriel :	*Hacés 200 monedas de 10.*
Profesora:	*¿Cuántas soluciones hay?*
Varios :	*41.*
Profesora:	*Son los distintos números que puedo poner acá, del 0 al 40 inclusive.*
Profesora:	*Se entendió esto que estuvimos analizando?*
Varios :	*Si.*

Episodio 4

4. En el último tramo del debate, se hace explícita una "contradicción"[2] que muestra que los alumnos no consideran que la posibilidad de obtener *todas* las soluciones a través de un procedimiento, constituye un criterio para evaluarlo. Efectivamente, surge en la clase que hay dos procedimientos correctos pero que por uno de ellos se obtienen 201 soluciones y por el oro 41. **La pregunta acerca de si se han agotado o no todas las soluciones es nueva para los alumnos** ya que los problemas de solución única que han formado parte esencial de sus prácticas aritméticas, la

[2] La comillas indican que la contradicción no es asumida por los alumnos.

han vuelto “transparente”[3]. Por otro lado, ligada a la cuestión anterior, surge que a través del mismo procedimiento, pero leído de maneras diferentes, podrían obtenerse diferente cantidad de soluciones. Esto vuelve a mostrar que hay una idea –la de **par** solución- que no está estabilizada y los alumnos “van y vienen” considerando a veces los pares y en otros momentos, “separando” las monedas de un tipo y de otro. Ilustramos este último aspecto con un tramo del registro:

Profesora:	*Bien, el último procedimiento. Guillermo.*
Guillermo:.	*Está bien*
Profesora :	*¿Por qué esta bien? ¿**Qué analizaste, qué diferencia tiene con los otros procedimientos?***
Guillermo :	*Porque **es la manera de encontrar completamente todos los números**, en **los otros, en el 1, en el 3 y en el 4, hablan de 41 soluciones siempre**.*
Profesora :	*¿Y acá?*
Guillermo:	***201, igual que en el dos**.*
Profesora :	*Dónde están las 201 soluciones en este procedimiento?*
Sabrina :	*Leamos el procedimiento: “para encontrar todas las soluciones tenés que partir de 0 monedas de 10 y 40 de 50 centavos, luego le vas sumando 5 monedas de 10 y le vas restando 1 moneda de 50 centavos”.*
Profesora:	*¿Cuántas monedas de 50 centavos tengo?*
Varios:	*40.*
Profesora:	*Y vas sacando de a 1.*
Varios :	*Y sumando de a 5*
.Profesora :	*¿Entonces, dónde están las 201 soluciones?*
Sabrina :	*Vas bajando cada vez que subís.*
Profesora:	*si vos vas bajando de 40 en 1, ¿cuántas soluciones tenés?*
Sabrina :	***Las 201 están, si vas recorriendo las monedas de 10, en lugar de las de 50.***
Profesora:	*O sea, que el que empieza con las de 10 tiene 201 soluciones y, el que empieza con las de 50 tiene 41*
Varios (entre los que está Sabrina): Sí	
Profesora:	*o sea que conviene empezar con el que me da más soluciones. Bien, continuamos la próxima*

[3] El término “transparente” suele usarse en dos sentidos opuestos entre sí. En este caso estamos queriendo decir que la pregunta “no se ve” desde las prácticas aritméticas.

La clase siguiente se retoma la cuestión y se les reparte a los alumnos la siguiente pregunta para que trabajen primero individualmente y luego en fase colectiva:

> *"La clase pasada se había llegado a la conclusión de que a través del procedimiento 2 hay 201 soluciones y, a través de los procedimientos 1, 3 y 4 hay 41 soluciones. Si estás de acuerdo con esta afirmación, proponé una solución que pueda obtenerse por el procedimiento 2 y no pueda obtenerse por el procedimiento 3. Si no estás de acuerdo con la afirmación, explicá por qué.*

Notemos que se trata de un problema no previsto en el diseño original, y que surge a partir de la interacción social que se genera por la actividad de someter a análisis los diferentes procedimientos. Es una pregunta relevante de cara a las prácticas algebraicas en las que se pretende que los alumnos "entren"cuyo sentido, en el marco de un trabajo individual, sería muy difícil de elaborar. Dejamos acá una marca: la necesidad de las interacciones sociales no sólo para clarificar cuestiones que se asumieron y que no se terminaron de comprender, sino para acceder a nuevos problemas que se plantean a través de la confrontación.

Básicamente lo que sucede en la clase es que los alumnos hacen funcionar el procedimiento 2 –aún sin comprender acabadamente los fundamentos de la conversión de decimales a enteros- y comienzan a darse cuenta de que las soluciones se repiten, lo cual permite redefinir el dominio de la variable "cantidad de monedas de 10 centavos". Las anotaciones de Ester en su carpeta, ilustran bien la producción de la clase.

152 x 10 = 1520 2000 – 1520 = 480:50= 9,6

Monedas de 10: 155

Monedas de 50: 9

Hay 41 soluciones porque

Ejemplo: 11 monedas de 50- 145 de 10

10 monedas de 50- 150 de 10

Si yo agarro un número entre estas, Ej. 147, **me va a llevar a 150** porque cada 0,2 de 50 agrego 1 moneda de 10, porque me va a dar con coma.

147 x 10 = 1470 2000 – 1470 = 530 : 50 = 10,6

150 monedas de 10 y 10 de 50

Las discusiones de la clase contribuyen a modificar la posición de un alumno con respecto al conocimiento

Es para nosotros interesante recortar la interacción de la profesora con un alumno muy flojo –Juan- a propósito de esta actividad. Una vez desarrollado el fogoso debate sobre la cantidad de soluciones, Juan le pregunta a la profesora cómo se dan cuenta los otros chicos que el procedimiento 2 tiene 201 soluciones.

Juan: *Lo que yo no entiendo acá es que te dan un procedimiento y abajo te dicen que hay 201 soluciones*

Profesora: *Eso dijeron los chicos ayer*

Juan: *Pero, ¿**cómo saben los chicos que hay 201 soluciones**?*

Profesora: *Yo te digo lo que ellos dicen, no digo que es así. Porque como x puede tener cualquier valor entre 0 y 200, si se le da el valor 0, sale una solución, si se le da el valor 1, hay otra, y así siguiendo, entonces, como se pueden dar 201 valores posibles, ellos dicen que hay 201 soluciones.*

Luisa: *Ahhhhh (con tono de clic)*

Interpretamos que toda la discusión que se despliega en el aula, le informa a este alumno que **hay una manera de darse cuenta**, que él no comprende, pero que podría comprender. Y tal vez sea éste para él el aprendizaje más importante de todo el conjunto de clases en las que se sostuvo el problema. En este sentido, un tipo de interacción sostenida para el conjunto puede ayudar a los que todavía no entraron en un cierto juego matemático, a construir una posición de búsqueda de razones, necesaria para producir conocimiento.

Algunas conclusiones a partir del desarrollo del problema de las monedas

El desarrollo relatado permite apreciar que alrededor del enunciado del problema se organizan una cantidad muy rica de actividades que no están "contenidas" en dicho enunciado y que son totalmente dependientes de la gestión que realice el docente a partir de las primeras interacciones de los alumnos con el problema.

Es en el momento de la reflexión sobre una primera resolución en el que los estudiantes pueden tomar conciencia de las nuevas cuestiones involucradas: resolver un problema ya no es encontrar soluciones sino encontrar *todas* las soluciones, las mismas son pares de números que pueden representarse a través de una única fórmula que tiene dos variables.

Comprender que la cantidad de soluciones está ligada al problema y no al procedimiento particular que se utilice fue un conocimiento que tuvo lugar a partir de la interacción entre diferentes procedimientos.

Se ha tratado la fórmula "públicamente" y la clase ha asumido la discusión sobre los problemas que plantea su escritura y sobre la función que cumple. En esa discusión la docente reafirma la "norma" según la cual está permitido atribuir un valor arbitrario a una de las variables y a raíz de esa norma es posible discutir sobre la suficiencia de una sola fórmula para obtener los pares solución. En este caso entonces, la discusión sobre la norma es un medio para discutir sobre las escrituras producidas, aproximándolas al funcionamiento de una ecuación con dos variables.

Los intercambios sobre los procedimientos han ofrecido un contexto a partir del cual emergió un nuevo problema matemático, alejado del asunto original, pero fértil en cuanto a las discusiones que generó. El rol del docente regulándolas fue sustancial tanto para la emergencia del problema como para su tratamiento.

El desarrollo que hemos relatado muestra una compleja combinación de interacciones en las que se entrelazan el trabajo personal de los alumnos con las confrontaciones colectivas que dan sentido al planteo de nuevas cuestiones. Las primeras interacciones personales de los alumnos con el problema constituyen una plataforma a partir de la cual cobran sentido *otros problemas,* esenciales también para las nociones a producir en la clase, problemas estos últimos que sólo puede plantear el docente en un segundo momento y sobre la base de aquello que se despliega efectivamente en el aula. Si el discurso del docente no se apoyara en la problematización que surge a partir de las discusiones y de los intercambios, cambiaría completamente de sentido par los alumnos ya que no estaría respondiendo a preguntas que han tenido la oportunidad de formularse ni se basaría en conocimientos que han tenido la posibilidad de elaborar.

Señalemos finalmente que el modo en que se organizaron las interacciones, permitió sostener el problema más tiempo del que se podría haber considerado razonable para un problema de este tipo, dando la oportunidad de profundizarlo a través de nuevos problemas que surgen a partir del mismo pero ofreciendo también la oportunidad de ir incluyendo a los alumnos que de entrada no comprendieron bien.

El espacio privado de los alumnos en la clase

Venimos en este libro, "bregando" por los espacios colectivos de trabajo. Ahora bien, considerar a los estudiantes como sujetos pensantes con ideas propias fértiles para producir nuevas ideas, es aceptar que necesitan también pensar "íntimamente", pensar "en borrador", ensayar, explorar, garabatear, darse "el lujo"de relacionar sus cuestiones con aquello que es significativo par ellos, apelar a representaciones que los ayudan a "ver". La singularidad de cada sujeto en tanto sujeto cognoscente es inherente a la concepción de conocimiento que estamos sosteniendo y, por lo tanto, es interesante pensar cómo incluirla en el proyecto de enseñanza. Esta idea debe ayudar a comprender que no todo lo que un estudiante piensa al abordar una cuestión, es rico, útil o interesante para los otros estudiantes. Un ambiente de producción en el que haya cabida para los desarrollos personales y en el que se acepta que los mismos pueden quedar protegidos de la exposición pública cuando la misma no aporta ni a su autor ni a sus pares; es así como pensamos el espacio de la clase.

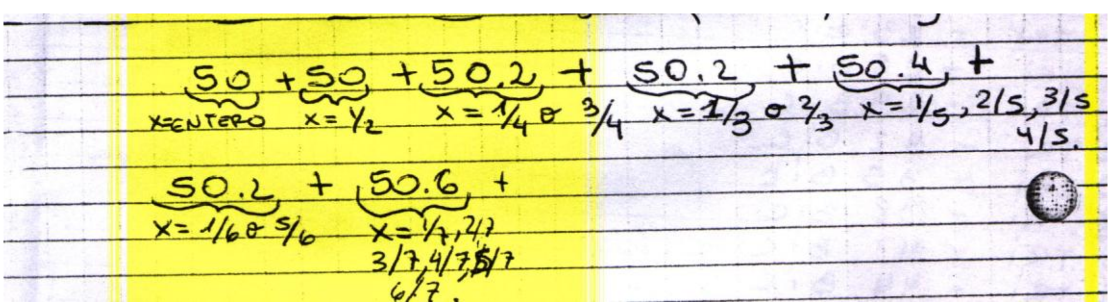
Decir trabajo personal, no es lo mismo que decir trabajo individual. Efectivamente, muchas veces en las clases se propone que los alumnos trabajen individualmente como un modo de ponerse a prueba, pero se espera que hagan todos más o menos lo mismo. En esos casos, interesantes sin duda, aquello que se hace individualmente, luego va a ser público. Ahora estamos señalando la necesidad de alojar lo personal que no va a ser público, pero que tiene un valor de producción importante para cada alumno. Estamos planteando una idea y no un modo concreto de ponerla en práctica: es difícil prever por ejemplo, un tiempo predeterminado dentro de la clase para el trabajo personal, que por otro lado no siempre es necesario o interesante. Simplemente estamos resaltando que los procesos de producción de cada alumno comportan zonas privadas que podrían tener lugar en el marco de una clase pensada como comunidad de producción.

Para clarificar esta reflexión propondremos un ejemplo en el que para pensar sobre la cantidad de soluciones de un problema una alumna desarrolla una escritura absolutamente original y probablemente irrepetible. Su característica es justamente la singularidad. Nos interesa destacar el valor de producción que tiene para su autora y el hecho de que se haya "atrevido" a desplegarla en la clase.

En el marco de la misma secuencia de problemas aritméticos con un grado de libertad, planteamos a los alumnos un problema en el que las variables toman valores en el dominio de los números racionales. Justamente nos proponíamos analizar qué estrategias movilizarían los estudiantes frente a un problema con infinitas soluciones, en el que debían operar con números racionales y controlar además las unidades de medida correspondientes a las magnitudes representadas por las variables. El enunciado del problema fue el siguiente:

Un comerciante tiene $ 100 para comprar harina y yerba. Estos productos se venden sueltos. El kilo de harina cuesta $ 2 y el de yerba $ 3. ¿Qué cantidades de harina y de yerba podrá comprar?

A propósito de este enunciado los alumnos tenían tareas similares a las que describimos a raíz del problema de las monedas. Para trabajar en el asunto "cantidad de soluciones" la alumna de nuestro ejemplo produce en su cuaderno la siguiente escritura:



¿Qué nos "muestra" esta escritura? La alumna va contando la cantidad de valores que puede tomar la variable "cantidad de harina y para eso los "recorre" de alguna manera. Primero cuenta cuántos valores enteros puede tomar la variable y establece que son 50 (omite el 0); luego cuenta las fracciones "1/2" que hay en el interior de cada intervalo de extremos enteros (obtiene ahí el segundo "50" de su serie); el tercer término cuenta las fracciones con denominador 4 (no contadas anteriormente) de cada intervalo de extremos enteros (eso le da las fracciones "número entero + ¼" y "número entero + ¾", para cada intervalo ya que los valores "número entero + 2/4" ya han sido contados). De la misma manera, la alumna calcula cuántas fracciones de denominador 3, 5 y 6 hay en cada intervalo, controlando las que ya han sido contadas al analizar las fracciones de los denominadores "precedentes" para no repetirlas.

¿Qué nos enseña la escritura de esta alumna que apunta a mostrar cómo "contar" los valores posibles de la variable?

En primer lugar, pareciera que ella establece una biyección entre el dominio de la variable y los pares solución. Este conocimiento –aunque para ella sea implícito- generaría buenas condiciones para analizar que la fórmula $(100 - 2x) : 3 = y$ podría ser un "soporte" para estudiar la cuestión de la cantidad de soluciones a partir del análisis de cómo varía una de las variables.

En segundo lugar, para objetivar un conjunto infinito, la alumna necesita "darle cuerpo" de alguna manera, encontrando un algoritmo que le permita recorrer el conjunto de valores posibles de la variable.

Señalemos finalmente que la escritura de la alumna es absolutamente personal y su interpretación está lejos de ser evidente. Cumple una función epistémica para ella que parece ser la de mostrarse a sí misma un proceso a partir del cual pueda comprender la naturaleza del conjunto con el que está tratando. Es probable que ella sea la única que pueda aprovecharla, ya que se completa con su propio pensamiento que, con relación al aspecto con el que está tratando, permanece en la esfera de lo privado.

Esta escritura nos muestra que es necesario discriminar cuáles son las producciones que pueden tener interés para el conjunto de los alumnos y para cuáles es importante concebir la clase como un espacio social de producciones personales (Mercier, A; 1998) cuya especificidad –cuya privacidad si se quiere- requeriría aceptar que hacerlas públicas no redundaría en un avance para el conjunto. Esta discriminación es harto compleja ya que requiere que se interprete en cada caso en qué medida el trabajo de un alumno puede ser compartido –conviene que sea compartida - por otros. Obviamente no hay reglas – no puede haberlas- para tales discernimientos y por eso esta reflexión apunta más a concebir la posibilidad de "lo privado" inmerso en "lo público" que a desentrañar modos concretos de implementación.