Matemática

IV medio

Texto del estudiante

GABRIEL MUÑOZ ZOLOTOOCHIN - VIVIANA GUTIÉRREZ MORIS - SERGIO MUÑOZ VENEGAS

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

Edición especial para el
Ministerio de Educación.
Prohibida su comercialización

SANTILLANA

Matemática

IV medio

Texto del estudiante

GABRIEL MUÑOZ ZOLOTOOCHIN
Licenciado en Matemática con mención en Matemática,
Magíster (c) en Matemática
Pontificia Universidad Católica de Chile.

VIVIANA GUTIÉRREZ MORIS
Profesora de Matemática,
Universidad Internacional SEK.

SERGIO MUÑOZ VENEGAS
Licenciado en Matemática con mención en Matemática,
Doctor en Ciencias Exactas, mención Matemática
Pontificia Universidad Católica de Chile.

El Texto **Matemática IV medio**, es una obra colectiva, creada y diseñada por el Departamento de Investigaciones Educativas de Editorial Santillana, bajo la dirección editorial de:

RODOLFO HIDALGO CAPRILE

SUBDIRECCIÓN EDITORIAL ÁREA PÚBLICA
Marisol Flores Prado

COORDINACIÓN ÁREA MATEMÁTICA
Viviana López Fuster

ADAPTACIÓN Y EDICIÓN
Javiera Setz Mena
Felipe Márquez Salinas

AUTORES
Gabriel Muñoz Zolotoochin
Viviana Gutiérrez Moris
Sergio Muñoz Venegas

JEFATURA DEL DEPARTAMENTO DE ESTILO
Alejandro Cisternas Ulloa

CORRECCIÓN DE ESTILO
Cristina Varas Largo
Eduardo Arancibia Muñoz
Raúl Chandía Lucero

DOCUMENTACIÓN
Cristian Bustos Chavarría
Paulina Novoa Venturino

SUBDIRECCIÓN DE DISEÑO
Verónica Román Soto

Con el siguiente equipo de especialistas:

DISEÑO Y DIAGRAMACIÓN
Claudia Barraza Martínez

ILUSTRACIÓN
Gerardo Antonio Ahumada Mora
Archivo editorial

FOTOGRAFÍAS
Latinstock
Archivo Editorial

CUBIERTA
Claudia Barraza Martínez

PRODUCCIÓN
Rosana Padilla Cencever

Referencias del Texto Educación Matemática 4, Educación Media y del Texto Matemática 4, Educación Media, Mineduc, de los autores: Marcela Guerra Noguera, Patricia Urzúa Figueroa, Rodrigo Hernández Reyes, Alejandro Pedreros Matta, Ángela Baeza Peña, Marcia Villena Ramírez, Pablo Jorquera Rozbaczylo, Gabriel Moreno Rioseco. Santillana del Pacífico S.A. de Ediciones, Santiago, Chile, 2005 y 2010.

Dr. Aníbal Ariztía 1444, Providencia, Santiago (Chile)
PRINTED IN CHILE
Impreso en Chile por QuadGraphics.
ISBN: 978-956-15-2311-1
Inscripción Nº: 235.954
Se terminó de imprimir esta 1ª edición de
191.000 ejemplares, en el mes de enero del año 2014.
www.santillana.cl

Presentación

Te damos la bienvenida a este nuevo año escolar.

El Texto **Matemática Cuarto año medio** ha sido creado y diseñado pensando en la culminación de tu proceso escolar.

En cada una de las unidades te invitamos a profundizar nuevos contenidos matemáticos, relacionando e integrando a través de una mirada retrospectiva, los conocimientos adquiridos en años anteriores.

La construcción de modelos matemáticos, que ya has estudiado, se amplía al conocimiento de un nuevo tipo de funciones que, entre otros aprendizajes, te facilitarán la comprensión de fenómenos sociales, naturales, financieros y físicos.

Aprenderás a representar conjuntos de números reales mediante intervalos, y a modelar situaciones usando inecuaciones lineales y sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita. Además podrás analizar la existencia y la pertinencia de sus soluciones.

En el estudio de la geometría, podrás dejar usar toda tu imaginación para profundizar en modelos vectoriales, relacionados con el movimiento y la trayectoria que describe una figura y con la generación de cuerpos geométricos mediante traslación y rotación, aplicando así tu creatividad y habilidad en la resolución de problemas.

Finalmente, te presentamos una unidad de datos y azar, cuyo estudio te aportará conceptos para el análisis e interpretación de la información entregada por los medios de comunicación y para manejar recursos objetivos para fundamentar tus opiniones.

Todos estos contenidos los podrás ejercitar mediante diversos tipos de actividades, las cuales te permitirán desarrollar distintas habilidades. Además, te darás cuenta de que la matemática se puede aplicar en muchas situaciones de la vida diaria y también en otras áreas del conocimiento.

En el Texto hemos restringido las referencias web solo a sitios estables y de reconocida calidad, a fin de resguardar la rigurosidad de la información que allí aparece. Además, te presentaremos algunas herramientas tecnológicas para que puedas complementar tu aprendizaje.

Habilidades matemáticas

El aprendizaje de la matemática no consiste solo en conocer contenidos nuevos sino que también implica el desarrollo de habilidades. Las habilidades se refieren tanto al desempeño como a la realización de procedimientos basados en procesos rutinarios, o no rutinarios fundados en la búsqueda, la creatividad y la imaginación. Son importantes, porque el aprendizaje involucra no solo el saber, sino también el saber hacer.

Algunas de las habilidades que trabajarás en este texto son las de comprensión, aplicación, análisis, síntesis y de resolución de problemas.

Comprender

Para desarrollar esta habilidad debes entender, trasladar el conocimiento a nuevos contextos e interpretar información en base a los conocimientos previos.

En los enunciados de las actividades y en algunas secciones del texto podrás reconocer algunas de estas palabras que indican la aplicación de esta habilidad.

- predice
- asocia
- estima
- diferencia
- extiende
- describe
- interpreta
- discute
- distingue
- explica
- ilustra
- compara

Repaso

¿Lo entiendes?

Actividades

Aplicar

Para desarrollar esta habilidad debes seleccionar, transferir y utilizar datos y principios para completar una tarea o solucionar un problema.

En los enunciados de las actividades y en algunas secciones del texto podrás reconocer algunas de estas palabras que indican el trabajo con esta habilidad.

- aplica
- demuestra
- completa
- ilustra
- muestra
- examina
- modifica
- relata
- cambia
- clasifica
- experimenta
- descubre
- usa
- resuelve
- construye
- calcula

Actividades

Uso...

Proyecto de la unidad

Analizar

Para desarrollar esta habilidad debes diferenciar, clasificar, encontrar patrones y relacionar las conjeturas, hipótesis, evidencias, o estructuras de una pregunta o aseveración.

En los enunciados de las actividades y en algunas secciones del texto podrás reconocer algunas de estas palabras que indican el trabajo de esta habilidad.

- separa
- ordena
- explica
- conecta
- pide
- compara
- selecciona
- explica
- infiere
- arregla
- clasifica
- analiza
- categoriza
- compara
- contrasta
- separa

Actividades

Desafío

Actividades complementarias

Sintetizar

Utilizar ideas viejas para crear otras nuevas; generalizar a partir de datos suministrados; relacionar conocimiento de áreas persas; predecir conclusiones derivadas.

Para desarrollar esta habilidad debes generar, integrar y combinar ideas en un producto, plan o propuesta nuevos para tu comprensión.

En los enunciados de las actividades y en algunas secciones del texto podrás reconocer algunas de estas palabras que indican el trabajo de esta habilidad.

- combina
- integra
- reordena
- sustituye
- planea
- crea
- diseña
- inventa
- prepara
- generaliza
- compone
- modifica
- diseña
- inventa
- desarrolla
- reescribe

Antes de continuar

Síntesis de la unidad

Resolver problemas

La resolución de problemas es un eje central y transversal en la matemática, ya que te permite desarrollar capacidades para darle sentido al mundo y actuar en él. La matemática te ayudará a resolver problemas cotidianos y a vincular la matemática con otras áreas del conocimiento.

Actividades

CONEXIÓN CON ...

Actividades complementarias

A continuación te presentamos una técnica para resolver problemas que contempla cuatro pasos para la resolución: entender, planificar, hacer y comprobar. Cada uno de estos pasos responde a preguntas específicas que permiten comprender el problema, identificar los datos, plantear una estrategia, dar la solución correcta al problema y verificar si es correcta.

Entender

¿Qué sabes del problema?

Reconoce e identifica los datos esenciales del problema: en el texto o enunciado, en las imágenes, en las tablas, en los gráficos o diagramas.

¿Qué debes encontrar?

Fíjate en la pregunta del problema y plantéala con tus propias palabras o como una afirmación: "tengo que calcular..."

Planificar

¿Cómo resolver el problema?

Piensa en las estrategias que te permitirían encontrar la solución del problema. Algunas son:

Estrategias	Cuándo usarla
Representarlo usando objetos	Cuando los números sean pequeños y tengas que realizar acciones como juntar o separar, agregar o quitar, etc.
Hacer un dibujo	Cuando te ayude a visualizar el problema, o cuando te permita ver acciones como juntar o separar, agregar o quitar, etc.
Hacer una lista	Cuando se requiera ordenar los datos o se pregunte por relaciones o combinaciones entre ellos.
Hacer una tabla	Cuando hayan más de dos datos y necesites comparar los datos o ver alguna regularidad entre ellos.
Hacer un gráfico	Cuando hayan más de dos datos relacionados y necesites compararlos o visualizar esta relación, y la pregunta se pueda responder a partir del gráfico.
Buscar un patrón	Cuando puedas ver que algo se repite siguiendo una regularidad.
Plantear una ecuación	Cuando se conozca el resultado y alguno de los términos de una operación, o cuando debas realizar más de una operación.
Empezar por el final	Cuando conozcas el resultado final de una secuencia de pasos y necesites saber el dato inicial.
Resolver un problema similar pero más simple	Cuando puedas trabajarlo con números más pequeños o simples de operar y puedas usarlo como modelo.

¿Qué estrategia utilizaré?

Selecciona la estrategia que consideres más adecuada.

Hacer

Aplica la estrategia y encuentra la respuesta al problema.

Comprobar

¿Es correcto el resultado?

Revisa los datos que utilizaste con la información del problema.

Revisa que cálculos sean correctos.

Verifica que los resultados responden la pregunta.

¿La respuesta es adecuada al contexto del problema?

Haz una estimación para ver si el resultado que obtuviste es cercano a esta estimación.

Fíjate en que la respuesta tenga sentido en el contexto del problema.

Además de los pasos mencionados anteriormente, te damos algunos consejos que te pueden ayudar a resolver un problema de forma exitosa.

- Conéctate con la situación, con el contexto del problema.
- Escríbelo con tus propias palabras.
- Utiliza el tiempo que necesites para explorar, reflexionar, pensar...
- Hazte las preguntas que consideres necesarias para identificar los datos relevantes y para entender lo que se pregunta.
- Si no obtienes la solución rápidamente y sientes que no puedes resolverlo, tómate un descanso y después inténtalo nuevamente utilizando, quizás otra estrategia.
- Analiza el problema desde varias miradas.
- Revisa las estrategias que conozcas para ver si alguna te pueden ayudar a empezar.
- Cambia de estrategia cuando creas que está muy complejo.
- Cuando encuentres un procedimiento que consideres simple, escríbelo, explicando cuándo usarlo.
- Si no estás avanzando, vuelve a leer el problema y asegúrate que realmente lo entendiste.
- Revisa la pregunta para ver si la estrategia que seleccionaste te va acercando a la solución.
- Vuelve a ver el problema, revisa el paso clave que te permitió hallar la solución.
- Recuerda siempre responder la pregunta al problema de manera completa y clara.
- Realiza los pasos en forma clara, de modo que cualquiera que lo vea, pueda entender el procedimiento utilizado.
- Explica a otros tus procedimientos, enseñar te ayuda a aprender.

Índice

Unidad 5

Datos y azar 278

Unidad 1

Funciones

Latinstock

Antes aprendí a:

- Reconocer funciones en diversos contextos e identificar sus elementos.
- Analizar representaciones de la función lineal y de la función afín.
- Analizar las funciones exponencial y logarítmica.
- Analizar las funciones raíz cuadrada y cuadrática.

La montaña rusa debe su nombre a los grandes toboganes de madera que se construían en Rusia para lanzar trineos deslizables sobre nieve. Posteriormente, apareció en Francia un modelo de montaña rusa en el que se adaptaron rieles y vagones. Esta idea de montaña rusa se introdujo en Estados Unidos como una atracción popular llamada *Roller coaster*. En la actualidad, la montaña rusa es una de las atracciones mecánicas más llamativas en los parques de diversiones del mundo, y entre ellas se pueden encontrar unas más o menos rápidas, extensas, vertiginosas o altas.

1. **¿Has subido alguna vez a una montaña rusa? Comenta tu experiencia.**
2. **Si viajas en una montaña rusa, ¿en qué momento del viaje el carro se moverá con mayor velocidad? Comenta con tus compañeros.**

En esta unidad podré:

- Caracterizar las funciones y sus elementos.
- Identificar funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.
- Analizar las condiciones para la existencia de la función inversa y la determinación de funciones inversas.
- Analizar la función potencia.
- Analizar los desplazamientos de la función potencia.

Lo utilizaré para:

- Modelar situaciones usando la función potencia.
- Aplicar la función potencia en situaciones que representen comparación de tasas de crecimiento aritmético y geométrico, y cálculo del interés compuesto.

Para recordar

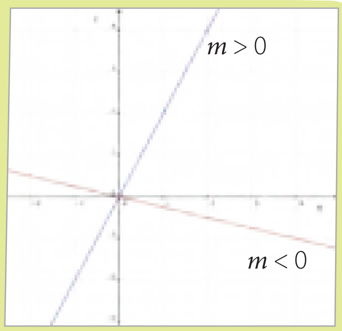
Observa los siguientes cuadros que te permitirán recordar los prerrequisitos para activar tus conocimientos previos y resolver los ejercicios que se proponen en las páginas 16 y 17.

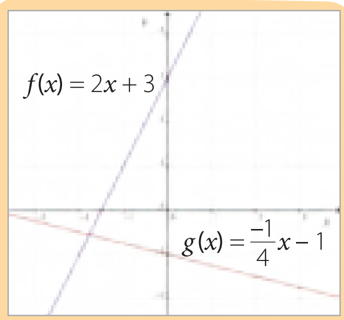
Reconocer funciones en diversos contextos e identificar sus elementos.

- Una **función** es una regla que asocia a cada número x de un conjunto A un único valor $f(x)$ de un conjunto B. Al valor $f(x)$ le llamamos imagen de x.
- En la expresión $y = f(x)$, y depende siempre de x, por esta razón a la variable x se le denomina variable independiente y a la variable y se le llama variable dependiente.
- El **dominio** de una función es el conjunto de elementos para los cuales la función está definida. Si $f: A \rightarrow B$, se tiene que A (conjunto de partida) es el dominio y se simboliza: $Dom\, f = A$.
- El **recorrido** de una función es el conjunto formado por todos los elementos del conjunto de llegada que son la imagen de al menos un elemento del dominio. El recorrido de f es un subconjunto de B.
- Una función se puede representar de diferentes maneras:
  - Describiendo la función por medio de palabras. Por ejemplo, en la expresión "a cada número real se le asigna su doble", se establece $f: A \rightarrow B$, donde A es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, y B es el conjunto cuyos elementos son, al menos, los números tales que cumplen la condición de ser el doble de cada elemento de A.
  - Por medio de una expresión algebraica que relaciona las variables. Por ejemplo, $f(x) = 2x$.
  - Usando una tabla de valores, en la que se asignan algunos valores para la variables independientes en la primera fila o columna, y se escriben sus respectivas imágenes en la segunda.
  - Representando gráficamente en el plano cartesiano los pares ordenados (x, y) que cumplen $y = f(x)$.

Analizar representaciones de la función lineal y de la función afín.

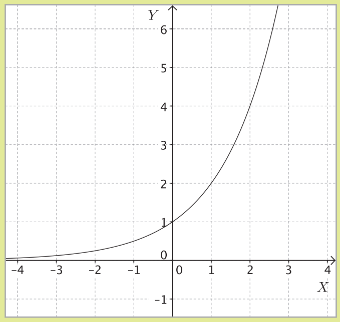
- Una **función lineal** es una función de la forma $f(x) = mx$, donde m es un número real distinto de 0.
- La representación gráfica de una función lineal es una recta que pasa por el origen (0, 0). El grado de inclinación de la recta se conoce como **pendiente** de la recta. En la función $f(x) = mx$, la pendiente se representa con la letra m. Por ejemplo, en la figura de la derecha, la función $f(x) = 2x$, tiene $m > 0$, mientras que $g(x) = -\frac{1}{4}x$, tiene $m < 0$.
- Tanto el dominio como el recorrido de la función lineal es el conjunto de todos los números reales.
- Una **función afín** es una función de la forma $f(x) = mx + n$, donde m y n son números reales distintos de 0.
- La gráfica de una función afín es una recta cuya pendiente es m y cuyo punto de intersección con el eje Y es $(0, n)$. Por ejemplo, la gráfica de la función $f(x) = 2x + 3$, representada en la figura de la derecha, tiene pendiente igual a 2 e interseca al eje Y en el punto (0, 3).
- Al igual que en una función lineal, el dominio y el recorrido de la función afín es el conjunto de todos los números reales.



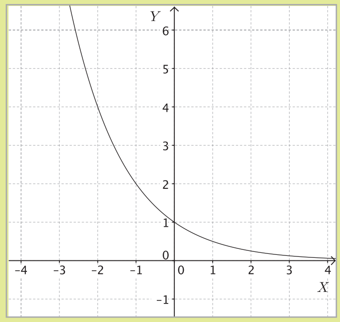


Analizar las funciones exponencial y logarítmica.

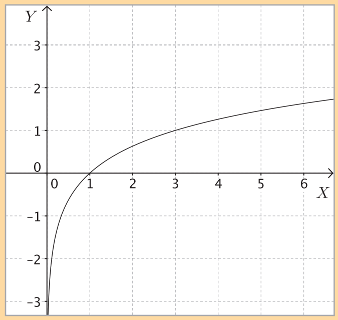
- Una **función exponencial** es una función de la forma $f(x) = a^x$, donde a es un número real positivo diferente de 1.
- El dominio de una función exponencial es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. El recorrido lo constituye el conjunto de los números reales positivos $\mathbb{R}^+$.
- La orientación de la gráfica de f depende del valor de a, tal como se muestra en la figura de la derecha. No interseca al eje X, su asíntota es $y = 0$.
- Una **función logarítmica** es una función de la forma $f(x) = log_b\, x$, donde b es un número real positivo diferente de 1.
- El dominio de una función logarítmica es $\mathbb{R}^+$, mientras que su recorrido es $\mathbb{R}$.
- La gráfica de la función logarítmica interseca al eje X en el punto (1, 0). No interseca al eje Y, su asíntota es $x = 0$. Su orientación depende del valor de b, tal como se muestra en la figura de la derecha.



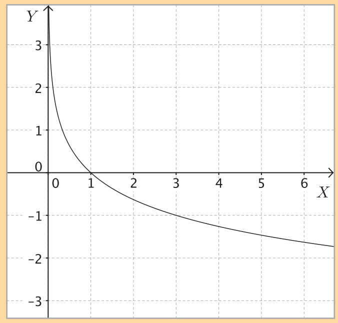
$f(x) = a^x$, con $a > 1$



$f(x) = a^x$, con $0 < a < 1$



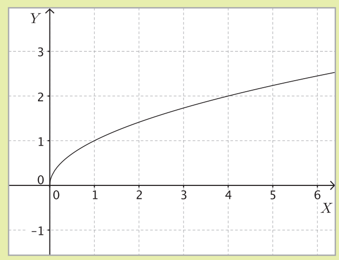
$f(x) = log_b\, x$, con $b > 1$



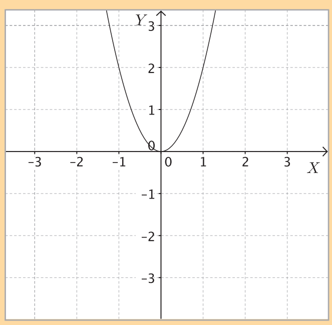
$f(x) = log_b\, x$, con $0 < b < 1$

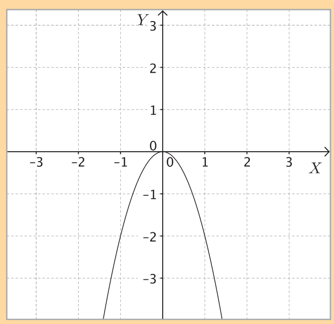
Analizar las funciones raíz cuadrada y cuadrática.

- Llamamos **función raíz cuadrada** a la función del tipo $f(x) = \sqrt{x}$. En la figura de la derecha se muestra la gráfica de esta función.
- Tanto el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x}$ como su recorrido son todos los números reales positivos y el cero.
- Una **función cuadrática** es una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales y a es distinto de 0.



- La representación gráfica de una función cuadrática es una curva llamada parábola, la cual abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$, como se muestran en las figuras inferiores.
- Se pueden combinar desplazamientos verticales y horizontales de modo que la gráfica de la función cuadrática $g(x) = (x - h)^2 + k$ esté desplazada verticalmente en $|\,k\,|$ unidades y horizontalmente en $|\,h\,|$ unidades, respecto de la gráfica de $f(x) = x^2$. El vértice de la gráfica de g se sitúa en (h, k).





¿Cuánto sé?

Antes de comenzar, resuelve las siguientes actividades, que te permitirán recordar conceptos y procedimientos necesarios para abordar los contenidos de esta unidad.

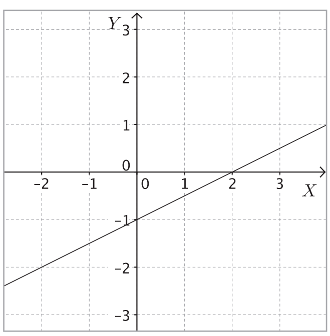
1. **Determina, en cada caso, si la relación entre las variables corresponde o no a una función. Justifica tus respuestas.**
   a. Un número natural y su sucesor.
   b. La longitud del lado de un cuadrado y su área.
   c. Un número racional y su representación como fracción.
   d. Un punto cualquiera y el camino para llegar desde él hasta un punto distinto.

2. **Determina, en cada situación, las variables dependiente e independiente.**
   a. El volumen de un cubo y la longitud de su arista.
   b. La cantidad de kilogramos de manzanas que se compran y el precio total a pagar.

3. **Sea $f(x) = x^2 - x - 2$, calcula los siguientes valores de la función.**
   a. $f(0)$
   b. $f(-1) + f(5)$
   c. $3 \cdot f(5) - 5 \cdot f(3)$
   d. $f(-3)$
   e. $f(1) + f(4)$
   f. $3 \cdot f(2) - 4 \cdot f(7)$

4. **En un triángulo isósceles, la medida del ángulo desigual se puede modelar por medio de la función $f(x) = 180 - 2x$, donde x es la medida de uno de los ángulos iguales.**
   a. ¿Cuál es el dominio de f?, ¿por qué?
   b. ¿Cuál es el recorrido de f? Justifica.

5. **¿Qué función está representada en la gráfica?**



6. **La temperatura de un lugar es de 2 ºC a las 7 de la mañana. Después, aumenta 4 ºC cada hora.**
   a. Representa mediante una función la situación anterior.
   b. La función que modela la situación anterior, ¿es lineal o afín? Justifica tu respuesta.
   c. Explica cómo calcularías la temperatura en el lugar al mediodía. ¿Qué valor obtuviste?

7. **La siguiente tabla muestra la relación entre el tiempo y la distancia recorrida por un vehículo que se mueve con velocidad constante.**

Tiempo (s)	1	3	5	7	9
Distancia recorrida (m)	12	36	60	84	108

   a. A partir de los datos de la tabla, construye un gráfico que relacione las variables involucradas.
   b. ¿Con qué función modelarías la situación?
   c. ¿Cuántos metros habrá recorrido el vehículo al cabo de 1 minuto?

8. **Dadas las siguientes funciones exponenciales y logarítmicas, calcula el valor de $f(k)$ en cada caso.**
   a. $f(x) = 3^x$, $k = 4$
   b. $f(x) = -2^x$, $k = -3$
   c. $f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$, $k = 2$
   d. $f(x) = log_3 x$, $k = 27$
   e. $f(x) = log_2 x$, $k = 64$
   f. $f(x) = log_{0,5} x$, $k = 1$

9. **¿Por qué la gráfica de la función $f(x) = a^x$ siempre pasa por el punto (0, 1)? Explica.**

10. **La ganancia G, en millones de pesos, que produce un negocio de cuatro hermanos después de t años está dada por la expresión:**

$$G(t) = 50 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t + 12$$

   Después de cinco años, los hermanos deciden dividirse en partes iguales su ganancia.
   a. ¿Cuánto dinero ganaron en total?
   b. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

11. **Para medir la cantidad de energía liberada por un sismo se utiliza la expresión:**

$$Log\ E = 1{,}5M + 11{,}8$$

Donde E es la energía liberada, medida en ergios, y M es la magnitud del sismo, en grados de la escala de Richter.

a. Calcula la energía liberada por un sismo de 5 grados en la escala de Richter.

b. El sismo del 27 de febrero de 2010 tuvo una magnitud de 8,8 grados en la escala de Richter. Determina la energía liberada por este sismo.

12. **Determina el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.**

a. $f(x) = x^2 + 4$

b. $f(x) = \sqrt{x - 1}$

c. $f(x) = (x + 5)^2$

d. $f(x) = \sqrt{x} - 4$

e. $f(x) = (x - 6)^2 - 4$

f. $f(x) = \sqrt{x + 4} + 6$

13. **A partir de la gráfica de $f(x) = x^2$, determina la gráfica aproximada de las siguientes funciones.**

a. $g(x) = (x - 1)^2 - 3$

b. $h(x) = (x + 7)^2 + 4$

c. $i(x) = (x - 1)^2 - 2$

d. $l(x) = (x - 6)^2 + 5$

e. $m(x) = -(x - 2)^2 + 6$

f. $n(x) = -5 - (x + 4)^2$

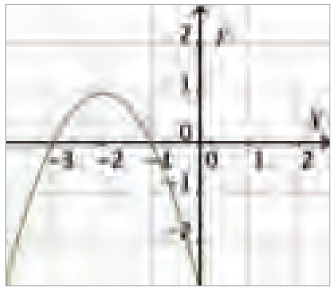
14. **Un malabarista lanza una pelota imprimiéndole una velocidad de 4 m/s. Después de haber sido lanzada, la función que describe su altura (medida en metros) según el tiempo es: $h(t) = 1{,}2 + 4t - 2t^2$.**

a. ¿Cuál es la altura máxima que alcanzó la pelota?

b. ¿Cuánto tiempo demoró en alcanzar la altura máxima?

c. ¿Cuánto tiempo permaneció en el aire?

15. **Si la gráfica corresponde a desplazamientos respecto de la gráfica de $f(x) = x^2$, determina su representación algebraica.**



Marca la opción correcta en los ítems 16 y 17.

16. **¿Cuál de las siguientes situaciones <u>no</u> corresponde a una función?**

A. Un número natural y el cuadrado de su sucesor.

B. La cantidad de entradas compradas y su costo.

C. Los deportes que practican los estudiantes de un curso.

D. El perímetro de un triángulo equilátero y la medida de su lado.

E. La distancia recorrida por un vehículo que va a velocidad constante y el tiempo que tarda.

17. **¿Cuál de los siguientes puntos pertenece a la recta asociada a la función $f(x) = 3x - 19$?**

A. (2, 13)

B. (4, –7)

C. (–19, 0)

D. (–1, –8)

E. (1, 16)

Revisa tus respuestas en el solucionario y marca las correctas.

Criterio	Ítems
Reconocer funciones en diversos contextos e identificar sus elementos.	1, 2, 3, 4 y 16
Analizar representaciones de la función lineal y de la función afín.	5, 6, 7 y 17
Analizar las funciones exponencial y logarítmica.	8, 9, 10 y 11
Analizar las funciones raíz cuadrada y cuadrática.	12, 13, 14 y 15

Si tuviste errores, revisa las páginas 14 y 15 del Texto, aclara tus dudas y corrígelos antes de continuar.

Funciones

Aprenderé a: caracterizar las funciones y sus elementos.

Para cargar minutos al celular, las compañías ofrecen dos modalidades: usando tarjetas de prepago o contratando un plan. En cada caso el valor por segundo hablado es diferente.

Por ejemplo, al contratar un plan de $ 12 000 puedes hablar durante 100 minutos; mientras que si cargas el celular con una tarjeta de $ 5 000, el precio por segundo hablado es $ 4.

- Determina la función que relaciona la cantidad de segundos hablados con el total consumido, en el caso de usar una tarjeta de prepago. ¿Cuál es el dominio?, ¿y el recorrido? Justifica.
- ¿Cuántos minutos, como máximo, puedes hablar usando una tarjeta de prepago de $ 5 000?
- En este caso, ¿en qué modalidad el valor por segundo hablado es más económico? Justifica tu respuesta.
- ¿En qué situaciones es más conveniente contratar un plan?, ¿y en cuáles es preferible comprar una tarjeta?, ¿por qué?

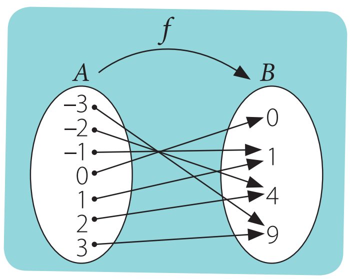
En cursos anteriores estudiaste que muchas situaciones, como por ejemplo, determinar la posición de una partícula en un tiempo dado o calcular el total a pagar en un taxi, dependiendo de la distancia recorrida, los podemos modelar mediante expresiones llamadas **funciones**.

Recuerda que una función es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto A uno y solo un elemento de otro conjunto B. El conjunto A es el **dominio** de la función (conjunto de partida), mientras que al conjunto B le llamaremos **codominio** (conjunto de llegada).

¿Lo entiendes?

¿De qué otras maneras podemos representar una función?

Una forma de representar una función es mediante un **diagrama sagital**, en el cual se representan dos conjuntos, uno para el conjunto A y otro para el conjunto B, y un grupo de flechas que representan la relación entre sus elementos. Por ejemplo, en la siguiente figura se muestra el diagrama sagital de la función f que asigna a los números enteros entre –3 y 3 su cuadrado, es decir, $f(x) = x^2$.



Si te fijas, el diagrama anterior representa una función ya que cada elemento de A está relacionado con solo un elemento de B. Por ejemplo, el –3 está relacionado con el 9 , el –2 con el 4, el –1 con el 1, etcétera. Luego, podemos decir que $f(-3) = 9$, $f(-2) = 4$ y $f(-1) = 1$.

En la función f que acabamos de representar, el conjunto A es el dominio de la función y el conjunto B es el codominio. Además, la regla es que cada elemento de A se relaciona con su cuadrado, presente en B. Luego, la función la representaremos, algebraicamente, de la siguiente manera:

$$f: A \longrightarrow B, \text{ definida por } f(x) = x^2$$

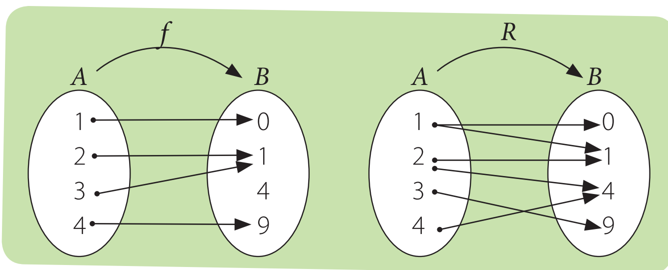
Si te fijas, en la expresión anterior explicitamos el dominio y el codominio de la función, además de su expresión algebraica.

Otra forma de representar la función anterior es explicitando los conjuntos A y B, es decir:

$$f: \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \longrightarrow \{0, 1, 4, 9\}, \text{ definida por } f(x) = x^2$$

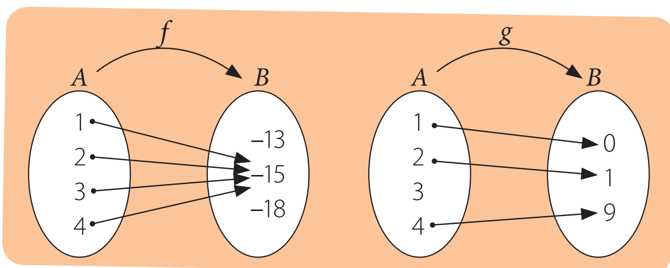
Los diagramas sagitales también son útiles para determinar si una relación entre dos conjuntos corresponde a una función. Observa:

A partir de los diagramas sagitales de la derecha, podemos concluir que de las dos representaciones solo la de la izquierda corresponde a una función ya que es la única que cumple con que a cada elemento del conjunto A le corresponde un único elemento del conjunto B. En el caso de la derecha, hay elementos del dominio que están relacionados con más de un elemento de B.



¿Cómo hacerlo?

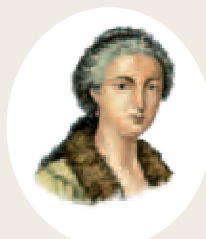
Determina si en los siguientes diagramas sagitales se representa una función.



En el primer caso tenemos que f sí es una función ya que cada elemento del dominio está relacionado con solo un elemento del codominio, en este caso, todos los elementos del dominio {1, 2, 3, 4} están relacionados con el –15.

En el segundo caso podemos observar que hay un elemento del conjunto de partida que no está relacionado con ningún elemento de B. Por lo tanto g no es una función.

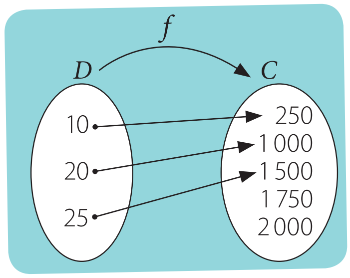
Invitada especial



María Gaetana Agnesi (1718-1799)

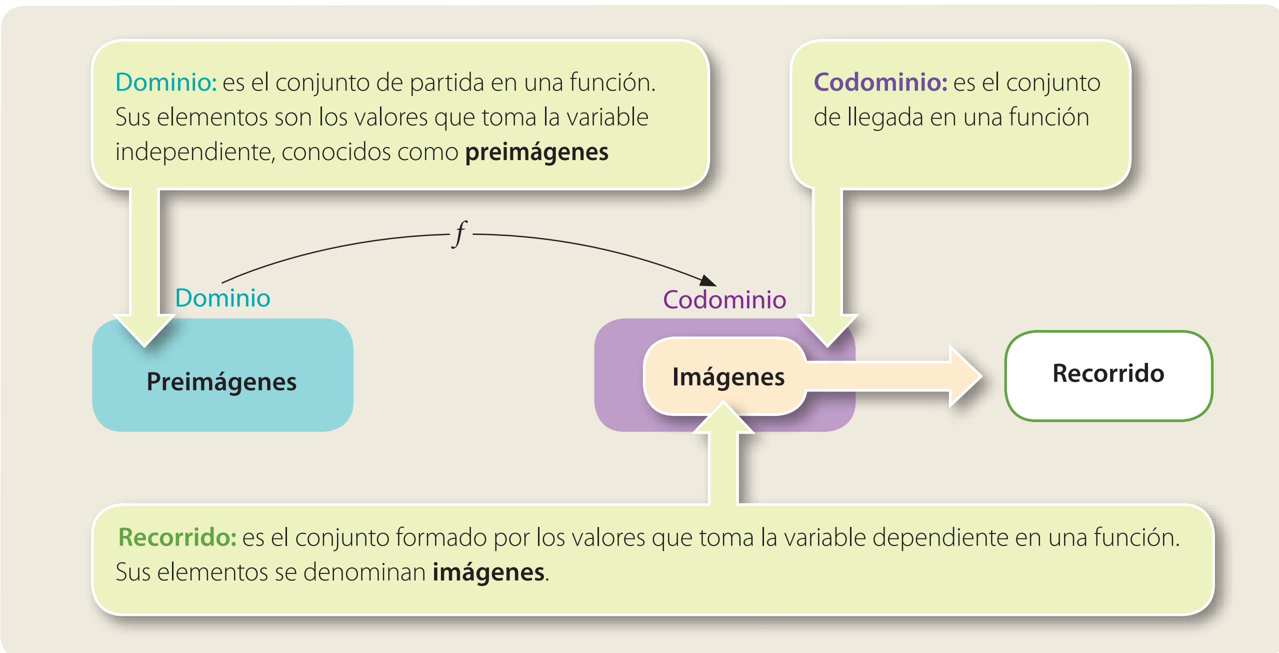
Matemática italiana. Fue la primera mujer en dictar clases de matemáticas en la universidad. La gráfica de una función estudiada en el siglo XVIII lleva su nombre

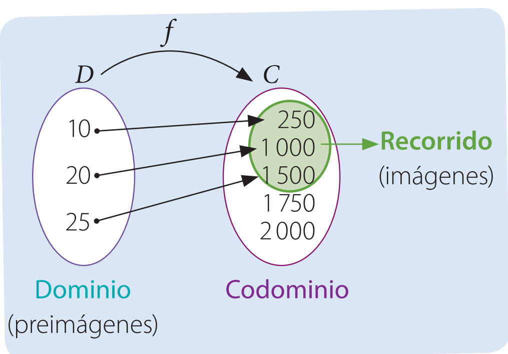
Observa el siguiente diagrama sagital que representa la función f:



Si te fijas, f es una función ya que a todo elemento de D le corresponde un único elemento de C. Sin embargo, los valores posibles que toma la función no son todos los elementos del codominio, sino que un subconjunto de él. Este subconjunto es el **recorrido** de la función.

En resumen, podemos caracterizar el dominio, codominio y recorrido de una función tal como se muestra en el siguiente esquema.





Luego, en la función f representada en el diagrama de la izquierda, el dominio, codominio y recorrido de la función son, respectivamente:

$Dom\ f = \{10, 20, 25\}$

$Codom\ f = \{250, 1\,000, 1\,500, 1\,750, 2\,000\}$

$Rec\ f = \{250, 1\,000, 1\,500\}$

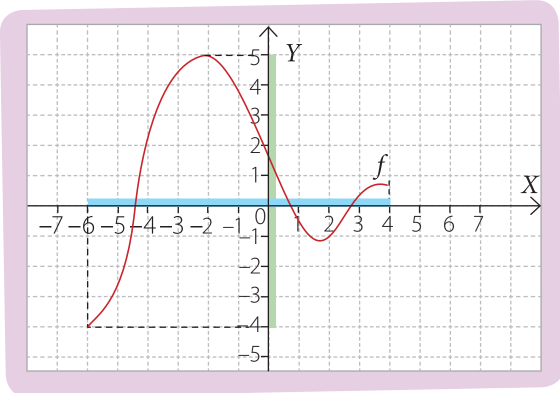
Además, como por ejemplo $f(10) = 250$, entonces 250 es la imagen de 10 , o bien, 10 es la preimagen de 250.

A partir de la representación algebraica de una función podemos determinar su dominio, considerando las restricciones que tiene la variable x.

Por ejemplo, si $f(x) = \frac{3}{x-2}$, entonces x no puede ser igual a 2 ya que la función se indefiniría. Por lo tanto, el dominio de la función es el conjunto de todos los números reales, menos el dos. Matemáticamente lo representamos como:

$$Dom\, f = \mathbb{R} - \{2\}$$

Asimismo, si conocemos la gráfica de una función, podemos estimar el dominio y el recorrido de f observando cuál es su proyección respecto del eje X, para el dominio, y cuál es respecto del eje Y, para el recorrido. Observa.



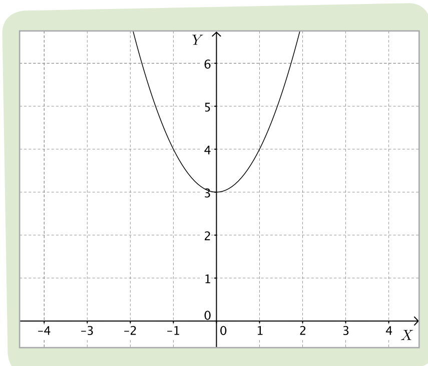
A partir de la gráfica anterior, podemos observar que los valores que toma la variable independiente x son todos los números reales que se encuentran entre –6 y 4, pintados con color celeste; y todos los valores que toma la variable dependiente y son los números reales entre –4 y 5, pintados con color verde.

Por lo tanto $dom\ f$ = {números reales entre –6 y 4, inclusive} y $rec\ f$ = {números reales entre –4 y 5, inclusive}.

¿Cómo hacerlo?

Determina el dominio y el recorrido de la función $f(x) = x^2 + 3$.

f es una función cuadrática con vértice en el punto (0, 3) y cóncava hacia arriba, tal como se muestra en la gráfica.



Tenemos que x puede tomar cualquier valor en los números reales. Por lo tanto $dom\ f = \mathbb{R}$.

Por otra parte, observa que en la gráfica los valores que puede tomar y, son solo los números reales mayores o iguales que 3. Por lo tanto:
$rec\ f$ = {números reales mayores o iguales que 3}

¿Cómo hacerlo?

Determina el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x+2}$

Como la raíz cuadrada de un número solo está definida cuando la cantidad subradical es un número positivo o cero, entonces $x + 2$ debe ser un número real positivo o cero, es decir: $dom\ f$ = {números reales mayores o iguales que –2}.

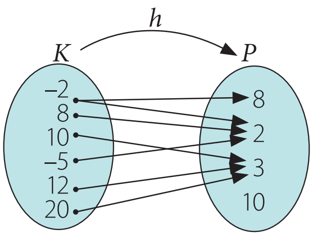
Tomo nota

- Una función es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto A (**dominio**) un único elemento de otro conjunto B (**codominio**).
- El **recorrido** de una función es un subconjunto del codominio y sus elementos son todos los valores que toma la variable dependiente y.
- Cada elemento del recorrido es **imagen** de, al menos, un elemento del dominio. A su vez, cada elemento del dominio es **preimagen** de un único elemento del recorrido. Por ejemplo, si f es una función y se cumple que $f(1) = 6$, entonces 6 es imagen de 1 y 1 es preimagen de 6.

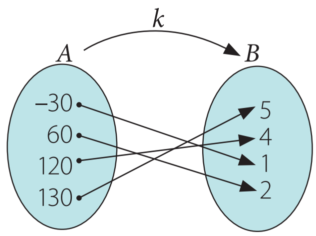
Actividades

1. **Observa los siguientes diagramas sagitales y determina aquellos que representen una función.**

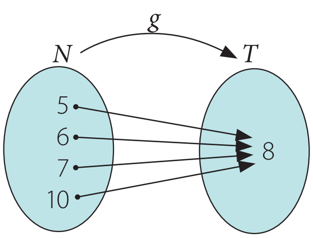
a.



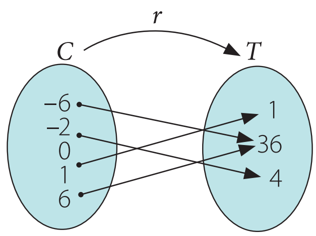
c.



b.



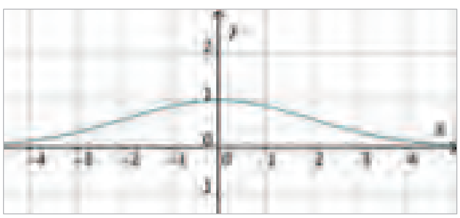
d.



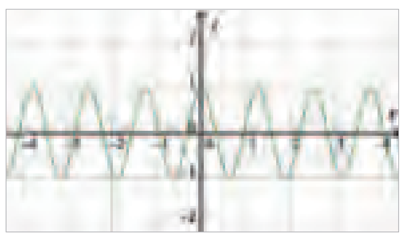
2. **En tu cuaderno construye un diagrama sagital que represente una función y otro que no lo sea.**

3. **Estima el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.**

a.



b.

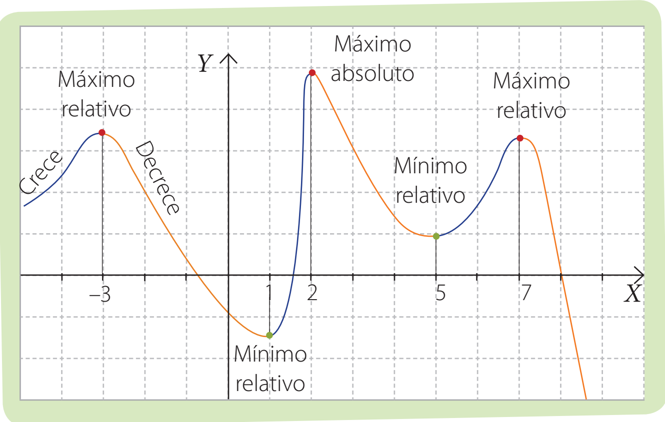


4. **Determina el dominio de las siguientes funciones.**

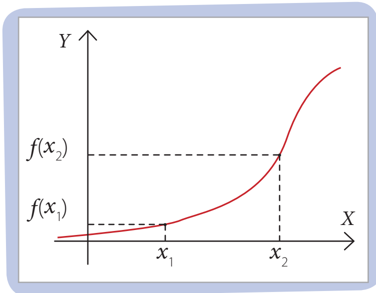
a. $f(x) = \dfrac{3}{x}$ **b.** $f(x) = \dfrac{3-x}{x+2}$ **c.** $f(x) = log(x-8)$ **d.** $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$

5. **Si el recorrido de una función tiene 204 elementos, ¿cuántos elementos tiene el dominio?, ¿y el codominio? Argumenta tu respuesta.**

Observa la siguiente gráfica de una función.

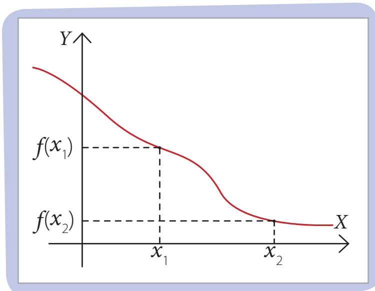


En la gráfica, podemos observar que la función "sube" o crece para los valores de x menores de –3, los que están entre 1 y 2, y entre 5 y 7. En cambio, la función "baja" o decrece para los valores de x que están entre –3 y 1, entre 2 y 5 y los mayores que 7.



En general una función es **creciente** si al aumentar los valores de x aumentan los valores de $f(x)$, es decir, si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$.

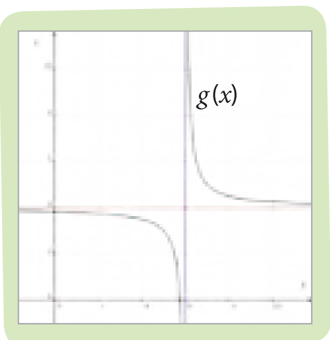
Gráficamente, se puede interpretar que una función es creciente cuando, al mirarla de izquierda a derecha, la gráfica sube; por ejemplo, la gráfica que se muestra a la derecha.



Por otra parte, una función es **decreciente** si al aumentar los valores de x disminuyen los valores de $f(x)$, es decir, si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

Se puede interpretar que una función es decreciente cuando su gráfica baja. Así, en la gráfica de la función f de la derecha podemos observar que esta baja al mirarla de izquierda a derecha.

En los valores de x en que la función pasa de creciente a decreciente, se dice que hay un **máximo relativo**, siempre que la función esté definida. De manera similar, cuando la función pasa de decreciente a creciente, se dice que esos valores de x son un **mínimo relativo**. Y se dice que son máximos o mínimos **absolutos** cuando $f(x)$ es el mayor o menor valor del recorrido, respectivamente.



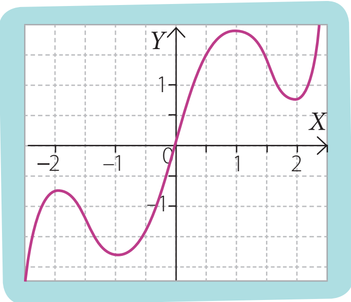
Observa la gráfica de la función $g(x)$. Si te fijas, la gráfica de g decrece para todos los valores de x menores que 6 y también para todos los x mayores que 6. También ocurre que cuando $x = 6$ la función no está definida.

Además, observa que la gráfica de la función se acerca por ambos lados a la recta $x = 6$ (pintada de rojo) pero sin llegar a tocarla. Lo mismo sucede con la recta $y = 4$ (pintada de azul). Esto significa que las rectas $x = 6$ e $y = 4$ son las **asíntotas** de la función, es decir, rectas que se aproximan en forma indefinida a la curva pero sin llegar a tocarla.

¿Lo entiendes?

¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función $g(x)$?

¿Cómo hacerlo?



A partir de la función cuya gráfica está representada en la figura, determina los valores de x para los cuales la función es creciente y para los cuáles es decreciente. También determina los mínimos y máximos relativos.

A partir de la gráfica, podemos observar que la función es creciente para todos los valores de x menores que –2. Luego, entre $x = -2$ y $x = -1$ la función decrece. Después, entre $x = -1$ y $x = 1$ la función es creciente. Posteriormente la función decrece entre $x = 1$ y $x = 2$. Finalmente, la función es creciente para todos los valores mayores que 2.

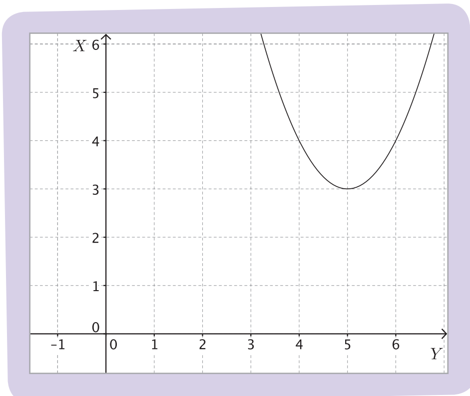
Cuando $x = -1$ y $x = 2$ la función alcanza un mínimo relativo, y cuando $x = -2$ y $x = 1$ la función alcanza un máximo relativo.

¿Cómo hacerlo?

Considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida como $f(x) = (x - 5)^2 + 3$. Determina los valores de x para los cuales la función es creciente y decreciente.

Si te fijas, la función $f(x) = (x - 5)^2 + 3$ corresponde a una traslación de 5 unidades hacia la derecha y 3 hacia arriba respecto de la función $f(x) = x^2$.

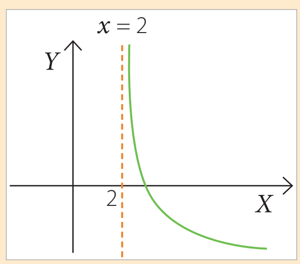
Luego, la gráfica de la función es la que se muestra a continuación.



Si te fijas, el vértice de la parábola es el punto (5, 3). Por lo tanto, la función es decreciente para los valores de x menores que 5 y la función es creciente si x es mayor que 5. En este caso, para $x = 5$ la función alcanza un mínimo absoluto.

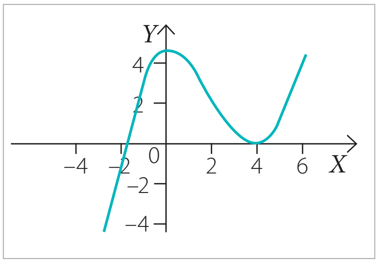
Tomo nota

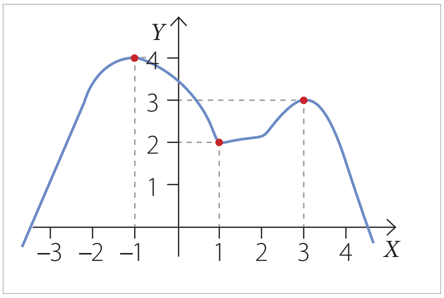
- Una función f es **creciente** si al aumentar los valores de x aumentan los valores de $f(x)$. En otras palabras, si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$.
- Una función f es **decreciente** si al aumentar los valores de x disminuyen los valores de $f(x)$. En otras palabras, si $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$.
- La **asíntota** de una función es una recta que la cual se acerca indefinidamente sin llegar a tocarla. Por ejemplo la recta $x = 2$ es una asíntota de la función cuya gráfica se muestra en la figura.

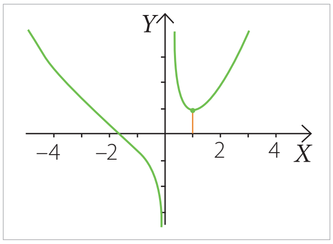


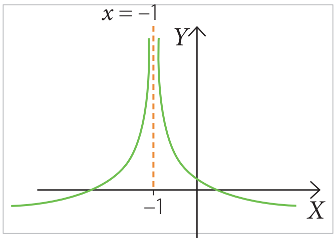
Actividades

1. Determina para cuáles valores de x cada función es creciente y para cuáles es decreciente.

a.


c.


b.


d.


2. Responde las siguientes preguntas respecto de la función $f(x) = log(x)$.

a. ¿Cuál es el dominio de f?, ¿y su recorrido?

b. ¿Entre qué valores de x la función f es creciente?

c. ¿Entre qué valores de x la función f es decreciente?

d. ¿Cuáles son las asíntotas de f?

Desafío

Determina todos los valores de a para los cuales la función $f(x) = a(x - 6)^2 + (3 - a)x$ es creciente.

3. En tu cuaderno, dibuja la gráfica de una función que cumpla las características indicadas, en cada caso.

a. Creciente entre –9 y –2, 0 y 4, y 7 y 10. Decreciente entre –2 y 0, 4 y 7, y 10 y 12.

b. Creciente entre –5 y –3, y 2 y 3. Decreciente entre –3 y 2, 3 y 9.

c. Con asíntotas $x = 2$ y $x = 10$.

d. Con asíntotas $x = -3$, $y = 6$ y $x = 5$.

4. EN PAREJAS ▶ Reúnete con un compañero y realicen las siguientes actividades.

a. Usando un *software* para graficar funciones, construyan la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$.

b. ¿Cuál es el dominio de la función?, ¿y su recorrido?

c. ¿Para cuáles valores de x la función es creciente?, ¿y para cuáles es decreciente?

d. ¿Cuáles son las asíntotas de la función? Verifiquen su respuesta graficándolas.

e. Repitan lo anterior para la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x}$.

Antes de continuar

1. ¿Cuál es la diferencia entre el codominio y el recorrido de una función?
2. Nombra 3 funciones que sean crecientes en todo su dominio.

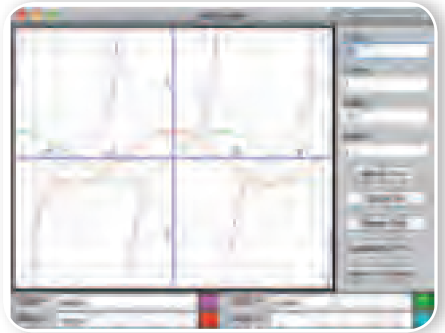
Proyecto de la unidad

El proyecto que aquí te presentamos tendrás que desarrollarlo por etapas mientras avances en la unidad. Su objetivo es utilizar herramientas tecnológicas para caracterizar funciones y sus elementos.

Con lo que has aprendido hasta aquí puedes avanzar en la etapa 1.

Etapa 1

1. **Ingresen al sitio web http://math.hws.edu/javamath/ y luego realicen lo siguiente.**



   a. Con el *mouse* hagan clic en el link "Configurable applets".
   b. Seleccionen "MultiGraph" y, luego, "Launch MultiGraph". Aparecerá una ventana como la que se muestra en la figura de la derecha. Si se fijan, en la parte inferior de la ventana aparecen cuatro barras de entrada. En ellas escribirán las funciones que quieren graficar.
   c. Para graficar funciones en las que intervengan adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones de términos, como por ejemplo, $f(x) = \dfrac{3x+3}{5-x}$, tienen que escribir **(3*x+3)/(5-x)**.

2. **Grafiquen la función $f(x) = \dfrac{4x-2}{1+x}$. Luego, respondan a partir de la gráfica.**
   a. ¿Cuál es el dominio de f?, ¿y su recorrido?
   b. ¿Entre qué valores de x la función es creciente?, ¿entre qué valores es decreciente?
   c. La función, ¿tiene asíntotas?, ¿cuáles son sus ecuaciones?

3. **Repitan la actividad 2 para las siguientes funciones.**

   a. $f(x) = \dfrac{3x+3}{x-5}$ b. $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-6}$ c. $f(x) = \dfrac{5x+3}{x+4}$

4. **A partir de la función f definida como $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$, discutan las siguientes preguntas.**
   a. A partir de lo que obtuvieron en las actividades 2 y 3, ¿cuál es el dominio y el recorrido de f?
   b. ¿Cuáles son las ecuaciones de las rectas correspondientes a las asíntotas de la función?
   c. Verifiquen sus respuestas anteriores asignando valores a a, b y c, y graficando la función resultante.

Etapa 2

1. Usando el *software* que ocuparon en la etapa anterior, grafiquen tres funciones que no sean inyectivas. En cada caso, determinen también la ecuación de una recta paralela al eje X cuya gráfica interseque a la gráfica de la función en más de un punto y grafíquenla junto con la función.
2. Grafiquen las siguientes funciones definidas en los números reales y, luego, determinen si son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.
   a. $f(x) = 4x - 9$
   b. $f(x) = 3x^6 - 12$
   c. $f(x) = 5 - x^3$
   d. $f(x) = 4x - 20$
   e. $f(x) = e^{-2x}$
   f. $f(x) = ln(x - 10)$
3. Las siguientes funciones están definidas en el conjunto de números reales. Grafíquenlas y, luego, redefinan el codominio de manera que puedan ser funciones sobreyectivas.
   a. $f(x) = 12 - x^2$
   b. $f(x) = \dfrac{3x + 3}{5 - x}$
   c. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$
   d. $f(x) = x^4 + 2$
   e. $f(x) = \sqrt{x - 5}$
   f. $f(x) = 6 + e^x$

Etapa 3

1. Usando el *software* que ocuparon en la etapa anterior, grafiquen simultáneamente las funciones: $f_1(x) = 2x - 4$, $f_2(x) = \frac{x}{2} + 2$ y $f_3(x) = x$.
   a. ¿Qué pueden observar en las gráficas?, ¿cómo se relacionan las gráficas de f_1 y f_2?
   b. ¿Pueden afirmar si la función f_2 es la inversa de f_1?, ¿por qué?
2. Grafiquen los siguientes pares de funciones y determinen si una es la inversa de la otra, a partir de sus gráficas.
   a. $f_1(x) = x + 1$ y $f_2(x) = x - 1$
   b. $f_1(x) = x + 5$ y $f_2(x) = 5 - x$
   c. $f_1(x) = 5 - 4x$ y $f_2(x) = \dfrac{5}{4} + \dfrac{x}{4}$
   d. $f_1(x) = e^{x+3} - 5$ y $f_2(x) = ln(x + 5) - 3$
3. Grafiquen la función $f: \mathbb{R} - \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{4x - 2}{1 + x}$. Luego, comenten.
   a. La función, ¿es inyectiva?, ¿y sobreyectiva?, ¿y biyectiva? Justifiquen su respuesta.
   b. ¿Cómo redefinirían el codominio de la función de modo que la función tenga una inversa? En tal caso, ¿cuál sería la función inversa de f? Expliquen cómo lo hicieron.

Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

Aprenderé a: identificar funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

En una biblioteca, todas las revistas están catalogadas por título, además de otros identificadores; igualmente existen títulos con más de una copia.

Considera la función *f* que tiene como dominio el conjunto de todas las revistas de la biblioteca y como codominio el conjunto de títulos de las revistas catalogadas en la biblioteca.

- ¿Por qué *f* es una función? Argumenta.
- En esta función, ¿cuál es el recorrido?, ¿es igual que el codominio?, ¿por qué?
- ¿Cuántas preimágenes pueden tener los elementos del recorrido?
  Justifica tu respuesta.

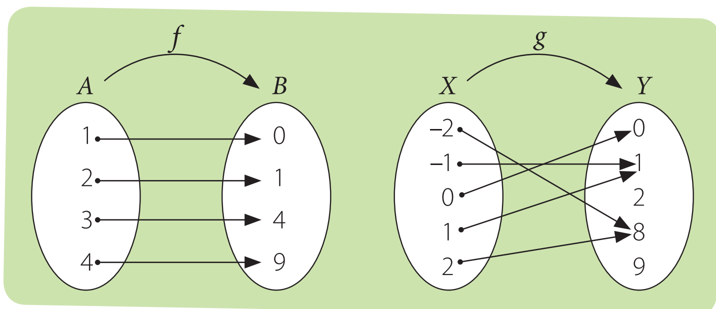
Archivo editorial

Las funciones pueden tener diversas propiedades, las cuales facilitan su análisis y solución en muchos problemas de aplicación.

¿Lo entiendes?

La función del contexto inicial, ¿es inyectiva? Argumenta.

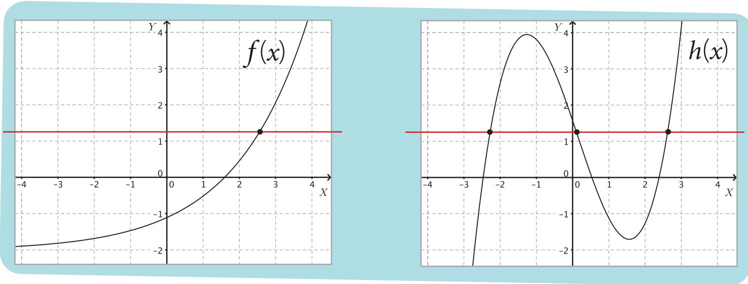
Una **función *f*** es **inyectiva** o **uno a uno** si para todo par de elementos diferentes del dominio, sus imágenes son diferentes. Es decir, ningún elemento del recorrido es imagen de dos preimágenes diferentes; por ejemplo, sean las funciones $f: A \longrightarrow B$ y $g: X \longrightarrow Y$, dos funciones cuya representación mediante diagramas sagitales es la siguiente:



Tenemos que la función $f: A \longrightarrow B$ es inyectiva porque las imágenes de cada uno de los elementos del dominio son diferentes, en cambio la función $g: X \longrightarrow Y$ no es inyectiva porque $g(-1) = 1$ y $g(1) = 1$, es decir, -1 y 1 tienen la misma imagen.

Para determinar si la función es inyectiva, resulta útil construir su representación gráfica y luego realizar el **criterio de la recta horizontal**, que consiste en trazar rectas horizontales que intersequen a la gráfica. Si la recta corta a la gráfica en un solo punto, la función es inyectiva. En cambio, si la recta interseca a la gráfica en más de un punto, la función no es inyectiva.

Por ejemplo, observa las gráficas de las funciones f y h.

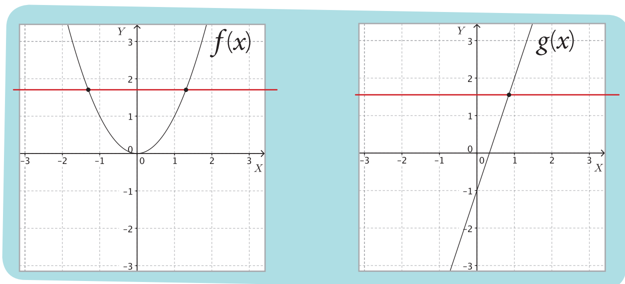


La función f es inyectiva, ya que toda línea horizontal corta la gráfica en un único punto. En tanto, que la función h no es inyectiva, puesto que la recta horizontal dibujada corta a la gráfica de h en tres puntos.

¿Cómo hacerlo?

Sean las funciones f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$ y g: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $g(x) = 3x - 1$. Determina si f y g son inyectivas.

Al graficar las funciones f y g, nos queda:



Si te fijas, en el caso de f, la recta horizontal interseca a la curva en dos puntos, por lo tanto, la función no es inyectiva. Por otro lado, en el caso de g, cualquier recta horizontal interseca a la gráfica de la función en un solo punto. Luego g es inyectiva.

Otra manera de resolver el problema es de manera algebraica ya que en una función inyectiva se cumple que **si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces, $x_1 = x_2$.**

Ya que si dos imágenes son iguales, entonces la preimagen debe ser el mismo número.

Aplicamos lo anterior a f y g:

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$x_1^2 = x_2^2$$
$$x_1^2 - x_2^2 = 0$$
$$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0$$

De donde:

$$(x_1 + x_2) = 0 \text{ o } (x_1 - x_2) = 0$$
$$x_1 = -x_2 \text{ o } x_1 = x_2$$

$$g(x_1) = g(x_2)$$
$$3x_1 - 1 = 3x_2 - 1$$
$$3x_1 = 3x_2$$
$$x_1 = x_2$$

¿Lo entiendes?

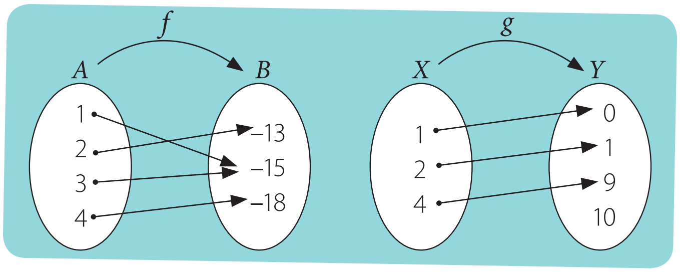
Explica los pasos realizados en cada demostración.

En el caso de g obtuvimos que si dos imágenes son iguales entonces las preimágenes deben ser iguales. En cambio, en el caso de f, podemos ver que si dos imágenes son iguales entonces también puede cumplirse que un elemento del dominio sea el opuesto de otro, por ejemplo, $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$. Luego, la función f no es inyectiva.

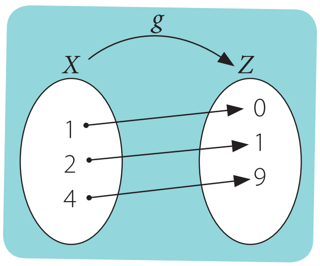
¿Lo entiendes?

La función del contexto inicial, ¿es sobreyectiva? Argumenta.

Una **función f** es **sobreyectiva** cuando el recorrido de la función es igual al codominio, es decir, cuando todos los elementos del conjunto de llegada son imagen de por lo menos un elemento del dominio; por ejemplo, en las funciones cuyas representaciones sagitales están dibujadas a continuación tenemos que $f: A \longrightarrow B$ es una función sobreyectiva ya que $Rec\, f = B$. Por otro lado, la función $g: X \longrightarrow Y$ no es sobreyectiva ya que hay elementos del conjunto de llegada que no son imágenes de ningún número, en este caso, el 10.

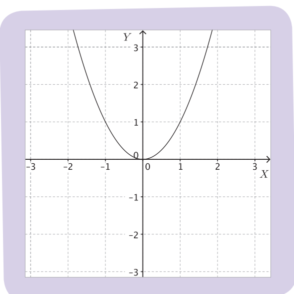


Como g no es sobreyectiva podemos redefinir el codominio para que sí lo sea; por ejemplo, si definimos el conjunto $Z = Y - \{10\}$, tenemos que la función $g: X \longrightarrow Z$ es sobreyectiva ya que todo elemento de Z es imagen de algún elemento del dominio. Observa.



¿Cómo hacerlo?

Determina si la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$ es sobreyectiva.



Si te fijas en la gráfica de f, que se muestra a la izquierda, tenemos que $rec\, f = \mathbb{R}^+_0$, ya que los valores que toma y son todos los números reales positivos y el 0. Luego, como el codominio de la función es el conjunto de los números reales, tenemos que

$$rec\, f \neq \mathbb{R}$$

Por lo tanto, la función no es sobreyectiva.

¿Cómo hacerlo?

Redefine el codominio de la función $f(x) = x^2$ de modo que f sea una función sobreyectiva.

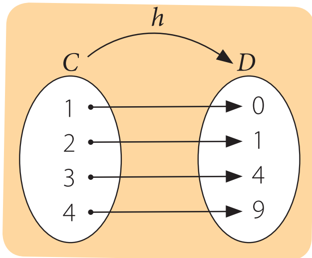
En el ejemplo anterior observaste que $rec\, f = \mathbb{R}^+_0$

Por lo tanto, si el codominio es el conjunto $\mathbb{R}^+_0$, entonces la función es sobreyectiva. Luego, podemos definir f como:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+_0$$

En este caso la función $f(x) = x^2$ es sobreyectiva pues $rec\, f = codom\, f = \mathbb{R}^+_0$

Una función f es **biyectiva** si es **inyectiva** y **sobreyectiva** a la vez, es decir, cuando todos y cada uno de los elementos del codominio son imagen de solo un elemento del dominio; por ejemplo, sea la función $h: C \longrightarrow D$ cuya representación es la siguiente:



Se tiene que la función h es biyectiva porque cada elemento del codominio D es imagen de solo un elemento del dominio C, es decir, h es inyectiva y sobreyectiva.

¿Lo entiendes?

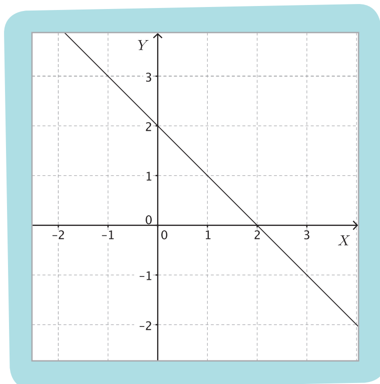
La función del contexto inicial, ¿es biyectiva? Argumenta.

¿Cómo hacerlo?

Determina si la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 2 - x$ es biyectiva.

Para saber si la función f es biyectiva debemos verificar que sea inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Si te fijas en la gráfica, cualquier recta horizontal interseca a la gráfica de la función en un solo punto. Por lo tanto, la función es inyectiva.



Por otro lado, a partir de la gráfica también podemos concluir que el recorrido de la función son todos los números reales, de modo que el recorrido es igual que el codominio, por lo tanto, la función es sobreyectiva.

Finalmente, como f es inyectiva y sobreyectiva, entonces f es biyectiva.

¿Lo entiendes?

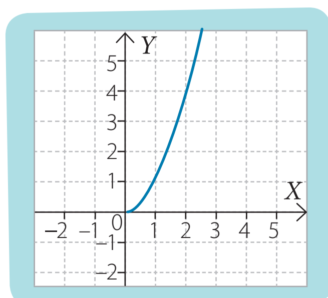
Demuestra algebraicamente que f es inyectiva.

¿Cómo hacerlo?

Redefine el dominio y el codominio de la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$, de modo que f sea una función biyectiva.

Como ya hemos analizado, la función $f(x) = x^2$ no es ni inyectiva ni sobreyectiva.

Para lograr que la función cuadrática sea inyectiva podemos considerar únicamente una de sus ramas. Por ejemplo, la rama de la derecha, tal como se muestra en la figura. En este caso, el dominio de la función son todos los números reales positivos y el 0, es decir, $dom\, f = \mathbb{R}^+_0$.

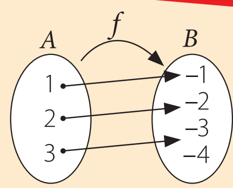


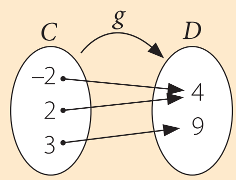
A partir del dominio definido anteriormente podemos determinar el recorrido de la función. Luego, $rec\, f = \mathbb{R}^+_0$.

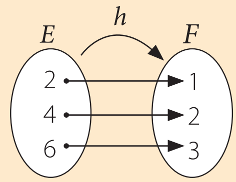
Finalmente, para que la función sea sobreyectiva, su recorrido debe ser igual que el codominio. Por lo tanto, el codominio debe ser el conjunto de todos los números reales y el 0. En resumen, la función $f: \mathbb{R}^+_0 \longrightarrow \mathbb{R}^+_0$, definida como $f(x) = x^2$ es biyectiva.

Tomo nota

- Una función es **inyectiva** si a cada elemento del recorrido le corresponde una única preimagen. Por ejemplo, la función $f\colon A \longrightarrow B$ representada en el diagrama sagital es inyectiva ya que todos los elementos del dominio tienen imágenes diferentes.
- Una función es **sobreyectiva** si su recorrido es igual al codominio, es decir, cada elemento del codominio tiene al menos una preimagen. Por ejemplo, la función $g\colon C \longrightarrow D$ representada en el diagrama sagital es sobreyectiva ya que todo elemento del codominio D tiene al menos una preimagen.
- Una función es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez, es decir, cada elemento del codominio tiene una única preimagen. Por ejemplo, en la función $h\colon E \longrightarrow F$ representada en el diagrama sagital, a cada elemento de codominio F le corresponde una única preimagen.



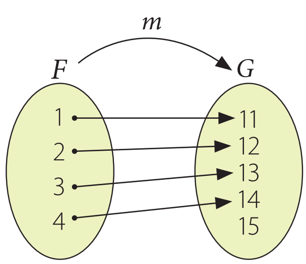




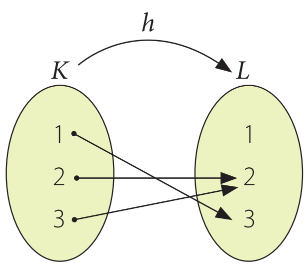
Actividades

1. Determina si la función dada es inyectiva y/o sobreyectiva. Justifica tu respuesta.

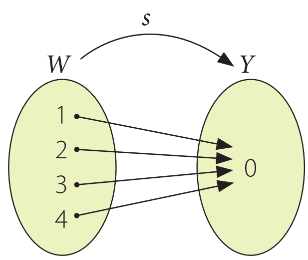
a.



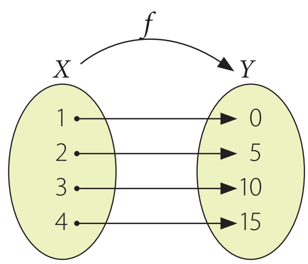
b.



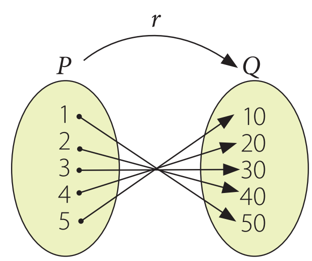
c.



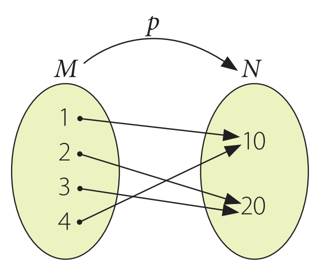
d.



e.



f.



2. De las funciones anteriores, ¿cuál o cuáles son biyectivas? Justifica tu respuesta.

3. Dados los conjuntos
$A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{10, 100, 1\,000, 10\,000\}$ y la función $f\colon A \longrightarrow B$ definida por $f(x) = 10^x$ para cada $x \in A$.

a. Representa con un diagrama sagital a f.

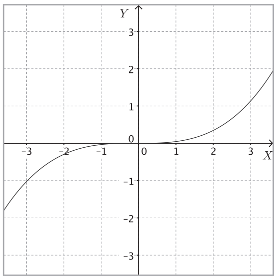
b. Establece el conjunto de pares ordenados de f.

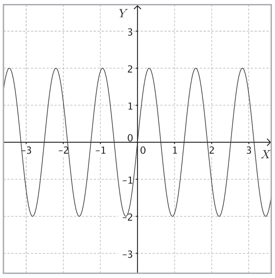
c. Determina si f es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

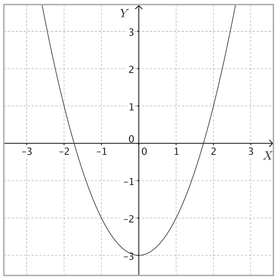
Proyecto

EN PAREJAS ▶ **Realicen la etapa 2 del proyecto de la unidad de las páginas 26 y 27.**

4. **Determina si las siguientes funciones son inyectivas o no. Justifica tu respuesta.**

a. 

b. 

c. 

5. **Determina, en cada caso, si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica las falsas.**

a. La función $f(x) = 8 - 4x$ es inyectiva.
b. Toda función inyectiva es biyectiva.
c. Toda función biyectiva es sobreyectiva.
d. La función $f: M \longrightarrow N$ es sobreyectiva si $Rec\, f = N$.

Desafío

Explica cuál es la similitud entre la definición de función y la de función biyectiva.

6. **Determina cuáles de las siguientes funciones son inyectivas. Justifica tu respuesta.**

a. $f(x) = (x + 1)^2 - x^2$ b. $f(x) = 0{,}3x^4$ c. $f(x) = 3 + e^x$ d. $f(x) = log\, x + 2$

7. **Determina cuáles de las siguientes funciones, definidas en los números reales, son sobreyectivas. Justifica tu respuesta.**

a. $f(x) = 5(x - 6)$ b. $f(x) = 3(x - 2)^3 + 5$ c. $f(x) = 6^x$ d. $f(x) = log\, x$

8. **Responde las siguientes preguntas.**

a. ¿Cómo identificas a una función inyectiva a partir de su representación gráfica?
b. ¿Cómo determinas si una función es sobreyectiva a partir de su expresión algebraica?

9. **Define una función que cumpla con las condiciones dadas.**

a. $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ que sea inyectiva.
b. $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que sea sobreyectiva.
c. Que sea sobreyectiva pero no inyectiva.
d. Que sea inyectiva pero no biyectiva.

10. CONEXIÓN CON LA INDUSTRIA ▶ **En una fábrica el costo de x camisas está dado por la expresión: $C(x) = 3x^2 + 5$.**

a. ¿Cuánto valen 1 000 camisas?
b. ¿Cuál sería el dominio de la función costo para esta situación?
c. En este contexto, ¿la función es biyectiva? Justifica tu respuesta.

11. **Se quiere construir un acuario de 3 m³ de volumen y 1,5 m de altura, donde x representa el largo e y el ancho de la base del acuario.**

a. Determina la cantidad M de metros cuadrados de vidrio necesarios, como función de x.
b. Indica el dominio de la función $M(x)$.
c. Determina si la función $M(x)$ es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva. Justifica tu respuesta.

Antes de continuar

1. ¿Cuál es la diferencia entre una función inyectiva y una sobreyectiva?
2. ¿Qué condiciones debe cumplir una función para que sea biyectiva? Comenta con tu curso.

Función inversa

Aprenderé a: analizar las condiciones para la existencia de la función inversa y la determinación de funciones inversas.

Repaso

1. ¿Qué condiciones debe cumplir una relación para que sea función?
2. Si $f(x) = 2x$ y $g(x) = 3x + 1$, determina $f \circ g$ y $g \circ f$.

Antonio estaba revisando noticias en Internet y se distrajo con el informe del tiempo. El pronóstico para ese día, en la ciudad de Nueva York, era de 91 ºF, la temperatura máxima y 68 ºF, la temperatura mínima.

Archivo editorial

- Si la función que relaciona las escalas Celsius (ºC) y Fahrenheit (ºF) está dada por la expresión $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$, donde x es la temperatura en grados Celsius y $f(x)$, en grados Fahrenheit, ¿cuáles son las temperaturas mínima y máxima pronosticadas, en grados Celsius?
- Las personas que viven en Nueva York, ¿deberán usar ropa abrigada ese día?, ¿por qué?
- ¿En qué países se utiliza la escala Fahrenheit de temperatura? Averigua.
- ¿Qué otras escalas de temperaturas conoces? Nómbralas.

En la situación inicial observaste que si tenemos una función $y = f(x)$ a veces necesitamos calcular el valor de la variable independiente x, la cual tenemos que despejar; por ejemplo, la temperatura de ebullición del agua a nivel del mar corresponde a 212 °F. Si quisiéramos transformar esta medida a grados Celsius, podemos escribir:

$$212 = \frac{9}{5}x + 32$$

Luego, despejamos la x, es decir:

$212 = \frac{9}{5}x + 32$ .... Restamos 32.

$180 = \frac{9}{5}x$ .... Multiplicamos por $\frac{5}{9}$.

$100 = x$

Por lo tanto, el agua ebulle a 100 °C.

Podemos generalizar lo anterior considerando una función que relacione la temperatura en grados Celsius en función de la temperatura en grados Fahrenheit. Para esto debemos expresar x en función de y (o $f(x)$), es decir, despejaremos la variable x de la expresión original:

$y = \frac{9}{5}x + 32$ .... Restamos 32.

$y - 32 = \frac{9}{5}x$ .... Multiplicamos por 5.

$5(y - 32) = 9x$ .... Dividimos por 9.

$\frac{5}{9}(y - 32) = x$

Atención

Con frecuencia se representa la inversa de una función f mediante f^{-1},

esta notación no debe confundirse con un exponente. Es decir,

$f^{-1}(x) \neq [f(x)]^{-1}$

pues $[f(x)]^{-1} = \frac{1}{f(x)}$

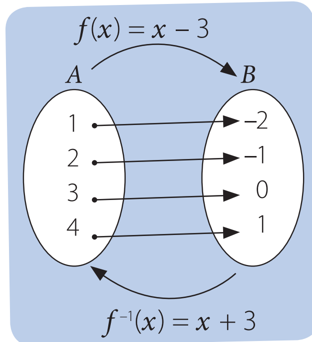
La expresión obtenida en el procedimiento anterior se conoce como la función inversa de f y se escribe como f^{-1}. En este caso:

$$f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$$

Si te fijas, escribimos la expresión anterior en términos de x. Luego, tenemos, por ejemplo, que:

$$f^{-1}(212) = \frac{5}{9}(212 - 32) = \frac{5}{9}(180) = 100$$

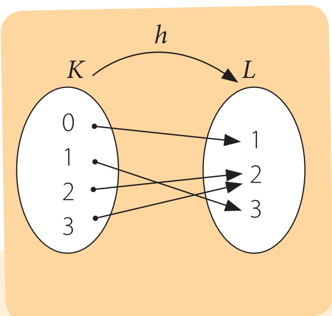
El resultado anterior es igual al que obtuvimos en la página anterior, es decir, que 212 °F equivalen a 100 °C.



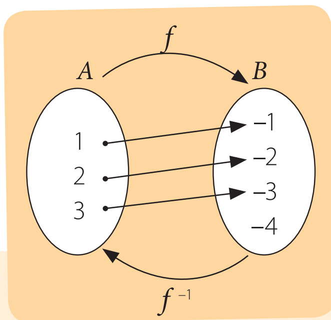
En el diagrama sagital de la derecha se representa una función f y su inversa f^{-1}. Si te fijas, el dominio de f equivale al recorrido de f^{-1} y el recorrido de f es el dominio de f^{-1}.

Además, para que f^{-1} sea función, a cada elemento de B le corresponde una única preimagen, de manera que f debe ser una función biyectiva.

Por lo tanto, no todas las funciones tienen una inversa, es decir, solo tienen inversa aquellas funciones que son biyectivas. Observa:



En el diagrama anterior h no es inyectiva ya que $h(2) = h(3) = 2$. Luego, h^{-1} no es función pues un elemento de su dominio tiene dos imágenes (2 y 3).



En el diagrama anterior f no es sobreyectiva ya que el −4 no tiene preimagen. Luego, f^{-1} no es función pues no todos los elementos de su dominio tienen una imagen.

¿Lo entiendes?

Determina $(f^{-1} \circ f)(x)$ y verifica que f^{-1} es la inversa de f.

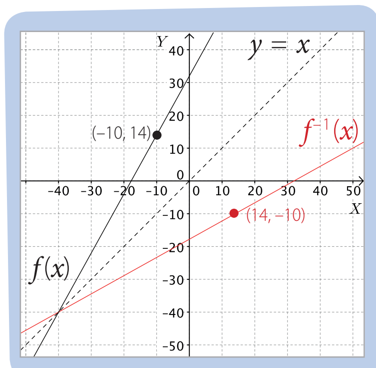
Por otra parte, si calculamos la composición $(f \circ f^{-1})(x)$, o bien, $(f^{-1} \circ f)(x)$, obtendremos la función lineal $f(x) = x$, de esta manera podemos determinar si cierta función es la inversa de otra; por ejemplo, más arriba concluimos que:

$$f(x) = \frac{9}{5}x + 32 \qquad f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$$

Si calculamos $(f \circ f^{-1})(x)$, tenemos:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = \frac{9}{5}\left(\frac{5}{9}(x - 32)\right) + 32 = \frac{45}{45}(x - 32) + 32 = x - 32 + 32 = x$$

Como $(f \circ f^{-1})(x) = x$, la función $f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ es la inversa de $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$.



En la figura de la derecha se muestran las gráficas de f y f^{-1}. Si te fijas, las gráficas son simétricas respecto de la recta $y = x$ (representada con las líneas punteadas). Esto ocurre para todas las funciones y sus inversas. En otras palabras, si f es una función biyectiva y f^{-1} es su función inversa, entonces las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la gráfica de la función $f(x) = x$.

¿Cómo hacerlo?

Determina la inversa de la función $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}$. Luego, traza la gráfica de f y f^{-1}.

Como la función $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}$ es una función afín, entonces es biyectiva, por lo tanto, tiene inversa. Luego, como $(f \circ f^{-1})(x) = x$, tenemos:

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f\ (f^{-1}(x)) = \frac{1}{2}f^{-1}(x) + \frac{1}{5} = x$$

Ahora despejamos $f^{-1}(x)$. Observa.

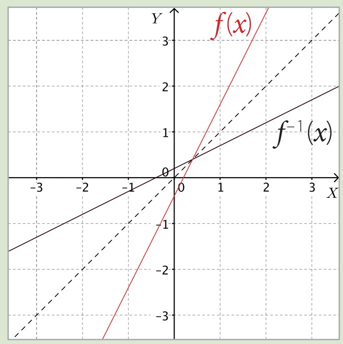
$\frac{1}{2}f^{-1}(x) + \frac{1}{5} = x$ .... Restamos $\frac{1}{5}$.

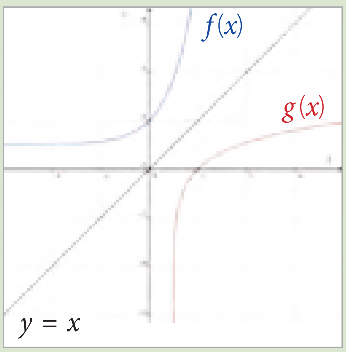
$\frac{1}{2}f^{-1}(x) = x - \frac{1}{5}$ .... Multiplicamos por 2.

$f^{-1}(x) = 2x - \frac{2}{5}$

Luego, la inversa de la función $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}$ es $f^{-1}(x) = 2x - \frac{2}{5}$.

En la figura de la derecha se muestran las gráficas de f y f^{-1}. Si te fijas, las gráficas de ambas funciones son simétricas respecto de la recta $y = x$.





¿Cómo hacerlo?

Construye la gráfica de las funciones $f(x) = e^x + 1$ y $g(x) = ln(x - 1)$. Luego, verifica que g es la inversa de f.

En la figura de la izquierda se muestran las gráficas de las funciones f y g. Al parecer las gráficas son simétricas respecto de la recta $f(x) = x$, de modo que podemos suponer que g es la inversa de f.

Para verificar lo anterior podemos calcular $(g \circ f)(x)$. Observa:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = ln((e^x + 1) - 1) = ln(e^x) = x$$

Luego, como $(g \circ f)(x) = x$, la función g es la inversa de f.

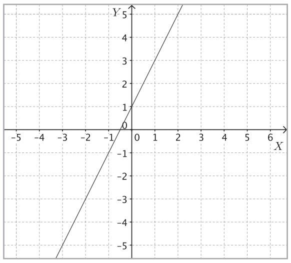
Tomo nota

- Dada una función $f : A \longrightarrow B$ biyectiva, llamamos función inversa de f a la función $f^{-1}: B \longrightarrow A$, tal que para cualquier x del dominio de f se cumple que: Si $f(x) = b$, entonces $f^{-1}(b) = x$.
- Dada una función $f(x)$, para determinar la representación algebraica de $f^{-1}(x)$, su función inversa, se escribe la ecuación $(f \circ f^{-1})(x) = x$, aplicando $f(x)$ a la expresión $f^{-1}(x)$, y luego se resuelve la ecuación, considerando a $f^{-1}(x)$ como la incógnita.
- En un mismo gráfico, las gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son simétricas respecto de la recta $y = x$.

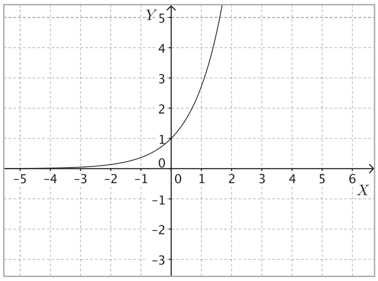
Actividades

1. Traza la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f.

a.



b.



2. Responde las siguientes preguntas.

a. ¿Qué condición debe cumplir una función para tener una función inversa?

b. Si f es creciente, ¿es f^{-1} una función creciente?

3. Determina si las siguientes funciones, definidas en los números reales, tienen inversa. En el caso de que la tengan, determina f^{-1}.

a. $f(x) = 3x + 4$

b. $f(x) = 2x^3 - 1$

c. $f(x) = x^2 - 4$

d. $f(x) = log(x - 5)$

e. $f(x) = 1 - e^x$

f. $f(x) = x^6 - 4$

4. CONEXIÓN CON LA ECONOMÍA ▶ El precio de un automóvil está dado por la función $p(t) = 30\,000\,000 - 2\,000\,000t$, donde p corresponde al precio del automóvil en el año t.

a. Demuestra que p es una función biyectiva.

b. Halla p^{-1} y determina su significado.

5. Al colocar un objeto en el platillo de una balanza analógica, el puntero describe un arco de medida, en grados, directamente proporcional a la masa del cuerpo. Para 1 kg el puntero describe un arco de 36°.

a. Escribe una función que exprese el desplazamiento del puntero en función de la masa corporal x de un objeto, con $x < 10$.

b. Escribe una función que exprese la masa, en kilogramos, de un objeto colocado en la balanza, en función del desplazamiento x del puntero, con $x < 360°$.

c. ¿Cuál es la relación entre las funciones obtenidas en los puntos anteriores?

6. CONEXIÓN CON LA FÍSICA ▶ La ley de enfriamiento de Newton permite determinar el momento de la muerte de una persona con la función $T(t) = T_0 + (T_1 - T_0)(0{,}97)^t$, donde T es la temperatura del individuo t horas después de su muerte. T_0 es la temperatura ambiente y T_1 la temperatura en el momento de su muerte.

a. Halla T^{-1} y explica su significado.

b. Si $T_0 = 25$ °C, $T_1 = 37$ °C y $T = 31$ °C, ¿cuánto tiempo ha pasado desde que murió la persona?

Desafío

Dada la función $f(x) = mx + n$, ¿cuál es el valor de $m \cdot p$, si p es la pendiente de la recta asociada a f^{-1}?

Proyecto

EN GRUPO ▶ **Realicen la etapa 3 del proyecto de la unidad de las páginas 26 y 27.**

Antes de continuar

1. Argumenta por qué una función que tiene inversa debe ser biyectiva.
2. Explica cómo verificas que una función es la inversa de otra .

Practico

Resuelve las siguientes actividades para consolidar los conceptos y los procedimientos que has aprendido.

1. **Modela cada situación mediante una función.**
   a. La longitud del lado y el perímetro de un hexágono regular.
   b. La longitud de un cable y su precio en pesos.
   c. La cantidad de entradas de cine compradas y la cantidad de dinero pagado.
   d. El dinero prestado y el interés que se debe pagar por el préstamo.

2. **Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica las falsas.**
   a. La función $g(x) = 7x^2 - 5$ es sobreyectiva.
   b. La función $h(x) = 2 \cdot \log x$ es biyectiva.
   c. La función $g: X \longrightarrow Y$ es inyectiva si $dom\ g = X$.
   d. La función $p: X \longrightarrow Y$ es biyectiva si $dom\ p = X$ y $rec\ p = Y$.

3. **Define una función que cumpla con las condiciones dadas.**
   a. $h: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ que sea biyectiva.
   b. Que no sea inyectiva ni sobreyectiva.

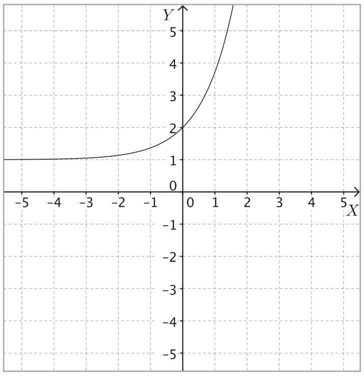
4. **Dibuja la gráfica de las siguientes funciones y, luego, determina para cuáles valores de x la función es creciente.**
   a. $f(x) = 20 - x$
   b. $f(x) = x^2 + 2$
   c. $f(x) = x^2 + 4x + 4$
   d. $f(x) = x^3$
   e. $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$
   f. $f(x) = x^4 - 4$

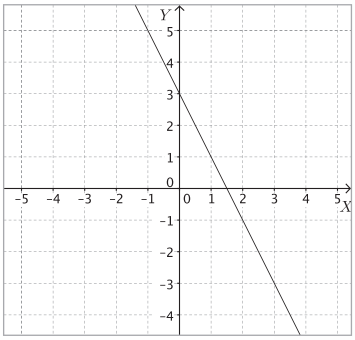
5. **Si el costo de una entrada para un concierto aumenta en x pesos, el incremento de la ganancia, en miles de pesos, está dada por la función $g(x) = 24 - 5x + x^2$, $x > 8$. ¿Es posible afirmar dentro del contexto que la función es biyectiva? Justifica tu respuesta.**

6. **¿Cuál es el dominio y el recorrido de la inversa de una función exponencial?**

7. **Restringe el dominio de la función $f(x) = (x + 5)^2$ para que sea inyectiva.**

8. **Sea $h: A \longrightarrow B$ una función biyectiva definida por $h(x) = x - 1$ para cada $x \in A$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Halla el conjunto de partida A.**

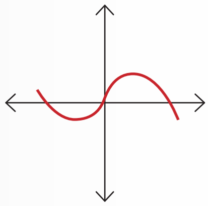
9. **Construye la gráfica de la función inversa de cada una de las funciones cuyas gráficas se muestran a continuación.**
   a.


   b.


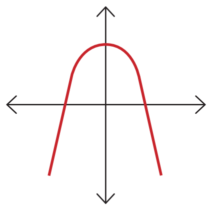
10. CONEXIÓN CON LA FÍSICA ▶ **La ley de Torricelli determina el volumen de agua que permanece en el recipiente después de t minutos, se expresa como $V(t) = 100 \cdot \left(1 - \frac{t}{40}\right)^2$, donde 100 representa el volumen inicial de líquido que se encuentra en el recipiente, en m³, el cual sale de este hasta desocuparlo en 40 minutos.**
    a. Halla V^{-1} y explica lo que representa.
    b. Determina el tiempo que demora en salir 15 m³ de agua.

11. Determina, a partir de cada gráfica, cuál o cuáles de las siguientes funciones sobreyectivas tienen inversa. Justifica tu respuesta.

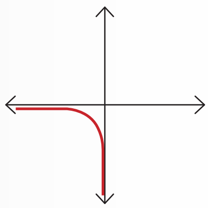
a.



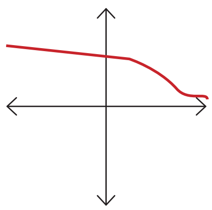
c.



b.



d.



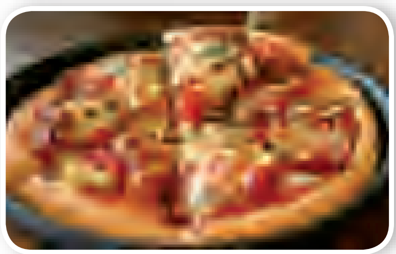
12. CONEXIÓN CON LA ECONOMÍA ▶ La cantidad vendida de un producto se conoce como demanda del producto. La demanda de un producto está dada por la función $D(q) = 26q + 300$, donde q es el precio.

a. Encuentra la función D^{-1}.

b. Determina $D^{-1}(600)$.

c. Explica qué representa la función inversa de la demanda, es decir, D^{-1}.

13. En una pizzería se vende una *pizza* mediana por \$ 15 000 y se cobra \$ 2 000 por cada ingrediente adicional.



Archivo editorial

a. Escribe una expresión algebraica que represente el valor V de una *pizza* mediana, en función de una cantidad x de ingredientes adicionales.

b. Si $V(x)$ es la expresión hallada en el punto anterior, determina $V^{-1}(x)$.

c. Calcula $V^{-1}(21\,000)$.

d. Explica qué representa la función V^{-1}.

14. Roberto quiere construir una caja a partir de una pieza cuadrada de cartón, cortando piezas cuadradas en cada una de las esquinas y doblando los lados hacia arriba.

a. Determina el volumen de la caja en función del lado que se recorta, si se sabe que la pieza de cartón tiene 30 cm de lado.

b. En el contexto dado, ¿cuál es el dominio de la función?, ¿y su recorrido?

c. La función obtenida, ¿es creciente o decreciente?, ¿cómo lo supiste?

d. Si el volumen de la caja es de 1 000 cm^3, ¿cuánto mide el lado de los cuadrados que se recortaron?

e. ¿Cuál es la expresión que relaciona la medida del lado que se recorta en función del volumen de la caja?

15. CONEXIÓN CON LA BIOLOGÍA ▶ Una de las funciones que se emplean para modelar el crecimiento de una población de animales o la propagación de enfermedades es la llamada "función logística". Esta función, en su forma más simple, se define como:

$$P(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}$$

donde P corresponde a la población en el instante de tiempo t.

a. Usando un *software*, grafica la función anterior.

b. La función P, ¿es creciente o decreciente?

c. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de P?

d. La función P, ¿tiene asíntotas?, ¿cuáles?

e. La función P, ¿es inyectiva?, ¿y sobreyectiva?, ¿y biyectiva? Argumenta tu respuesta.

f. Determina P^{-1}. ¿Qué representa esta función?

g. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de P^{-1}?

16. Responde las siguientes preguntas.

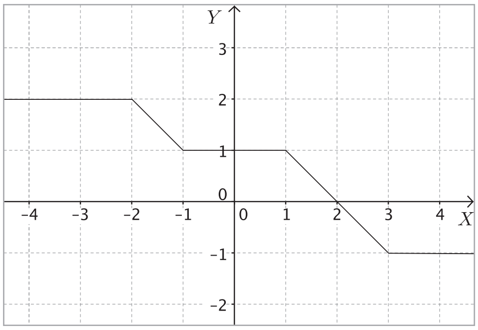
a. ¿Por qué una función que no sea inyectiva no puede tener inversa?

b. ¿Por qué una función que no sea sobreyectiva no puede tener inversa?

17. Si $f(x) = 3x + 2a$, determina a si $f(a^2) = f^{-1}(a + 2)$.

Marca la opción correcta en las preguntas 18 a 33.

18. De acuerdo a la gráfica de la función f de la figura, ¿cuál o cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?



I. $f(-2) + f(2) = 0$
II. $f(1) = f(-1)$
III. $f(2) = f(-1) + f(3)$

A. Solo I
B. Solo II
C. Solo III
D. Solo II y III
E. I, II y III

19. La temperatura inicial de un proceso químico es de 25 ºC y aumenta en 0,2 ºC cada 1 minuto. ¿Cuál de las siguientes funciones relaciona la temperatura T del proceso con el tiempo t transcurrido desde que se inició el experimento?

A. $T(t) = 0{,}2t - 25$
B. $T(t) = 25t + 0{,}2$
C. $T(t) = t + 0{,}2 + 25$
D. $T(t) = t + 25$
E. $T(t) = 0{,}2t + 25$

20. Sea la función $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = log\, x - 1$. ¿Por qué punto pasa la gráfica de f^{-1}?

A. (0, 1)
B. (1, 1)
C. (–1, 1)
D. (0, 2)
E. (0, 0)

21. Sea la función $f(x) = x^2 + px$. Si $f(-2) = 6$, ¿cuál es el valor de $f(2)$?

A. –4
B. –2
C. 1
D. 2
E. 4

22. Dada la función $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$, ¿cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I. $Dom\, f = \mathbb{R}$
II. El recorrido de f son los reales mayores que $\frac{23}{12}$.
III. $f(3) = 8$

A. Solo I
B. Solo II
C. Solo III
D. Solo I y II
E. Solo II y III

23. Si $k(x) = 3x^3 - 4$, entonces $k^{-1}(20)$ es:

A. 1
B. 2
C. 4
D. 6
E. 8

24. Dada la función $f(x) = log_2\left(\frac{3}{2}x - 2\right)$, ¿cuál es la preimagen de 4?

A. 12
B. $\frac{34}{3}$
C. $\frac{28}{3}$
D. $\frac{20}{3}$
E. 2

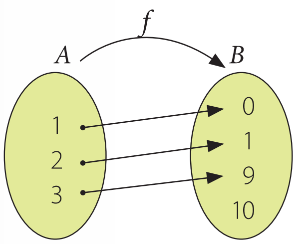
25. ¿Cuál de las siguientes funciones es estrictamente creciente?

A. $f(x) = ln(x - 10)$
B. $f(x) = 5 - x^3$
C. $f(x) = 20 - 2x^2$
D. $f(x) = 4x - e^x$
E. $f(x) = (-4)^x$

26. **Una bacteria se reproduce según la expresión $P(x) = 2^x$, donde x es el tiempo en horas. ¿En cuántas horas habrá 2 048 bacterias?**

A. 8
B. 9
C. 10
D. 11
E. 12

27. **El siguiente diagrama sagital representa la función f. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?**



I. f es inyectiva.
II. f es sobreyectiva.
III. $rec\, f = \{0, 1, 9, 10\}$

A. Solo I
B. Solo II
C. Solo III
D. Solo I y III
E. Solo II y III

28. **¿Cuál debe ser el codominio de la función $f(x) = \sqrt{x}$ para que f sea una función sobreyectiva?**

A. $\mathbb{R}$
B. $\mathbb{R}^+$
C. $\mathbb{R}^+_0$
D. $\mathbb{R}^-$
E. $\mathbb{R}^-_0$

29. **¿Cuál es la función inversa de $f(x) = x^3 + 1$?**

A. $f(x) = \sqrt[3]{x} - 1$
B. $f(x) = x - \sqrt[3]{x}$
C. $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$
D. $f(x) = \sqrt[3]{1 - x}$
E. $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$

30. **¿Para qué valor de n la función $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^n$ es inyectiva?**

A. 0
B. 2
C. 4
D. 8
E. 9

Sea f una función biyectiva definida como $f(x) = 7x - 32$. Sea g otra función tal que se cumple $(f \circ g)(x) = x$. ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas corresponde a g?

F. $g(x) = 7x + 32$
G. $g(x) = \dfrac{x + 32}{7}$
H. $g(x) = \dfrac{x - 32}{7}$
I. $g(x) = -7x - 32$
J. $g(x) = 7x - 32$

31. **Sea f una función biyectiva tal que $f(x) = 2x + 1$. Se pide calcular el valor de $a + b$.**

(1) $f(a) = 6$
(2) $f^{-1}(b) = 7$

A. (1) por sí sola.
B. (2) por sí sola.
C. Ambas juntas, (1) y (2).
D. Cada una por sí sola, (1) o (2).
E. Se requiere información adicional.

32. **Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$. f es una función sobreyectiva si:**

(1) n es positivo.
(2) n es impar.

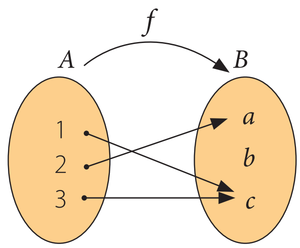
A. (1) por sí sola.
B. (2) por sí sola.
C. Ambas juntas, (1) y (2).
D. Cada una por sí sola, (1) o (2).
E. Se requiere información adicional.

Evaluación de proceso

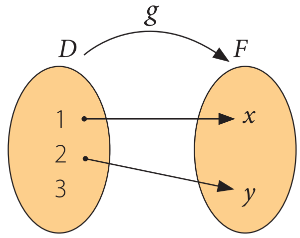
Aplica lo aprendido hasta este momento en la unidad y desarrolla las siguientes actividades.

1. **Determina cuál o cuáles de los siguientes diagramas sagitales representan una función. Justifica tu respuesta, en cada caso.**

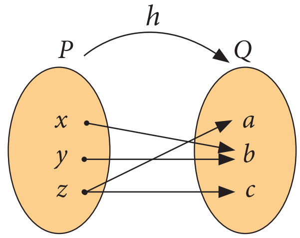
a.



b.



c.



2. **A partir de las funciones:**

$$f(x) = 2x^2 - 1 \qquad g(x) = \frac{x-3}{5} \qquad h(x) = \sqrt{x+2}$$

determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica las falsas.

a. $g(8) = 0$

b. La preimagen de $\frac{7}{5}$ en g es 10.

c. $f(2) - h(2) = 5$

d. La imagen de 7 en h es $\sqrt{7}$.

e. La imagen de 10 en g es 2.

f. La preimagen de 49 en f es 7.

g. f tiene un máximo relativo.

h. El dominio de g es el conjunto de los números reales, menos el 5.

i. $Dom\ h = \mathbb{R}^+$

3. **Las siguientes tablas corresponden a valores de dos funciones f y g desconocidas.**

x	0	–1	1	–2	2	–3	3
$f(x)$	1	–1	3	–3	5	–5	7

x	0	–1	1	–2	2	–3	3
$g(x)$	$-\frac{1}{2}$	–1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	–2	1

a. Representa gráficamente, en el plano cartesiano, las funciones f y g.

b. A partir de la gráfica, define las funciones f y g, usando una expresión algebraica.

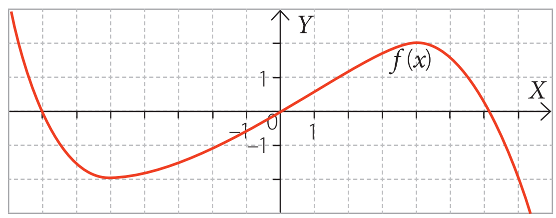
c. Las funciones f y g, ¿son crecientes o decrecientes?, ¿cómo lo supiste?

d. ¿Cuál es el valor de $f(-4) + g(7) \cdot f(5) - g(-6)$?

4. **Determina si las funciones f y g de la pregunta anterior son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.**

5. **Respecto de las funciones f y g de la pregunta 3, ¿g podría ser la inversa de f? Justifica.**

6. **Observa la gráfica de la función f y, luego, realiza las actividades indicadas.**



a. ¿Para qué valores de x la función es creciente?, ¿y para qué valores es decreciente?

b. La función, ¿tiene mínimos relativos?, ¿cuáles?

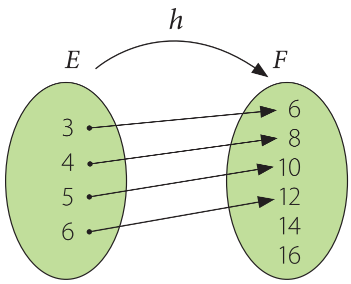
c. La función, ¿tiene máximos relativos?, ¿cuáles?

d. Determina 3 puntos que pertenezcan a la gráfica de la función.

e. ¿Cuál es el valor de $f(4) + f(5)$?

7. La función f de la pregunta anterior, ¿es inyectiva?, ¿por qué?

Observa el siguiente diagrama sagital que representa la función h y realiza las actividades 8, 9 y 10.



8. **Determina el dominio, el codominio y el recorrido de h.**

9. **Determina si h es una función inyectiva, sobreyectiva o biyectiva. Argumenta tu respuesta.**

10. **La función h, ¿tiene inversa? Si no la tiene, redefine el codominio de la función de modo que exista h^{-1} y, luego, escribe una expresión algebraica para representar $h^{-1}(x)$.**

11. **Si $B = \{1, 2, 3, 4\}$, define el dominio de h para que la función $h: A \longrightarrow B$, con $h(x) = x + 1$ sea biyectiva.**

12. **La altura alcanzada por un cuerpo que fue lanzado hacia arriba, en forma vertical, se puede modelar con la función $y(t) = 10t - 5t^2$, donde $y(t)$ es la altura alcanzada en el tiempo t.**
   a. Según el contexto, ¿y tiene inversa? Argumenta tu respuesta.
   b. Determina la expresión algebraica correspondiente a y^{-1}.
   c. ¿A los cuántos segundos el objeto se encuentra a 2 m de altura?
   d. ¿Cuántos segundos, en total, estuvo el objeto en el aire?

13. **Si f es una función biyectiva y creciente, la función f^{-1}, ¿es creciente o decreciente? Justifica tu respuesta.**

14. **Inventa una función que no sea ni inyectiva ni sobreyectiva. Represéntala en un diagrama sagital y en forma algebraica.**

Marca la opción correcta en los ítems 15 a 18.

15. **Dada una función biyectiva f, ¿cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?**
   I. f es inyectiva.
   II. f es sobreyectiva.
   III. $dom\, f = rec\, f$

   A. Solo I
   B. Solo II
   C. Solo I y II
   D. Solo II y III
   E. I, II y III

16. **¿Cuál es la función inversa de $f(x) = 3x + 1$?**
   A. $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{1}$
   B. $f^{-1}(x) = x - 3$
   C. $f^{-1}(x) = -3x - 1$
   D. $f^{-1}(x) = x + 3$
   E. $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{3}$

17. **Si $f(x) = x^5 + 8$, entonces $f^{-1}(40)$ es:**
   A. 2
   B. 4
   C. 8
   D. 18
   E. 32

18. **Respecto de la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \left(\dfrac{6}{5}\right)^x$ se puede afirmar que:**
   I. $dom\, f = \mathbb{R}$
   II. $rec\, f = \mathbb{R}$
   III. f es una función creciente.

   A. Solo I
   B. Solo II
   C. Solo I y III
   D. Solo II y III
   E. I, II y III

Mi progreso

Verifica en el solucionario del Texto si tus respuestas son correctas. Si tienes respuestas incorrectas, marca en la tabla el criterio correspondiente y realiza las actividades de refuerzo indicadas.

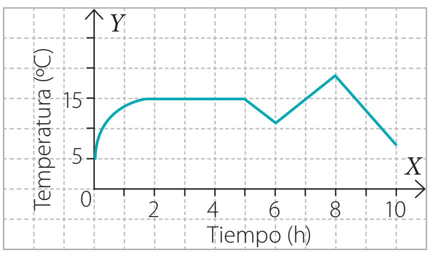
Criterio	Ítems	¿Qué debo hacer?
Caracterizar las funciones y sus elementos.	1, 2, 3, 6, 8, y 18	Si tuviste menos de 4 ítems correctos, realiza las actividades 1, 2 y 3.
Identificar funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.	4, 7, 9, 11, 13, 14 y 15	Si tuviste menos de 4 ítems correctos, realiza las actividades 4, 6 y 7.
Analizar las condiciones para la existencia de la función inversa y la determinación de funciones inversas.	5, 10, 12, 16 y 17	Si tuviste menos de 3 ítems correctos, realiza las actividades 5, 8, 9, 10 y 11.

Para reforzar

Según los resultados obtenidos en la evaluación de proceso, resuelve las actividades correspondientes para reforzar los contenidos en los que tuviste dificultades.

1. **Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.**
   a. El dominio de la función $f: X \longrightarrow Y$ es siempre el conjunto de partida X.
   b. El recorrido de la función $f: X \longrightarrow Y$ es siempre el codominio Y.
   c. En una función f, cada elemento del conjunto $dom\ f$ debe tener su correspondiente imagen en el conjunto $rec\ f$.
   d. En una función f, cada elemento de su recorrido debe ser la imagen de solo un elemento de su dominio.

2. **La gráfica registra la temperatura de una ciudad durante 10 h. De acuerdo con ella, realiza una descripción de la función, en términos de los valores de x en que la función es creciente, decreciente y constante.**



3. CONEXIÓN CON LA FÍSICA ▶ **En el siglo XVII, Isaac Newton explicó la fuerza de atracción entre dos cuerpos, en lo que hoy se conoce como ley de gravitación universal:**

   "Dados dos cuerpos cualesquiera separados a una distancia determinada, se atraen con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa".

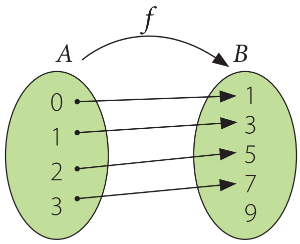
   a. Representa algebraicamente la función que expresa la ley de gravitación universal.
   b. Establece cuáles son las variables independientes y dependientes.
   c. Según el contexto, ¿cuál es el dominio y el recorrido de la función que obtuviste?

4. **Menciona un ejemplo de una función que solo sea inyectiva y otro de una función que solo sea sobreyectiva.**

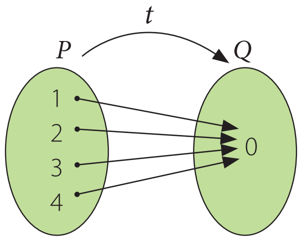
5. **Define el dominio y el codominio de las siguientes funciones para que tengan inversa.**
   a. $f(x) = -x^2 + 3$
   b. $f(x) = (x + 3)^4$
   c. $f(x) = 3^x$
   d. $f(x) = log(x - 4)$

6. **Observa los siguientes diagramas sagitales e indica si las funciones que representan son inyectivas o sobreyectivas. Determina, además, aquellas que son biyectivas. Justifica tu respuesta, en cada caso.**

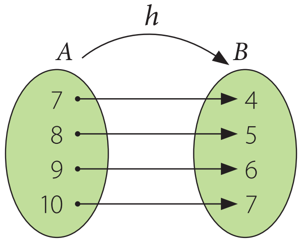
a.



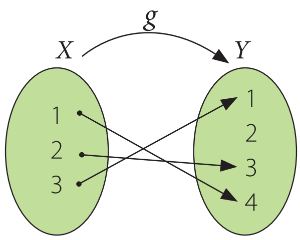
b.



c.



d.



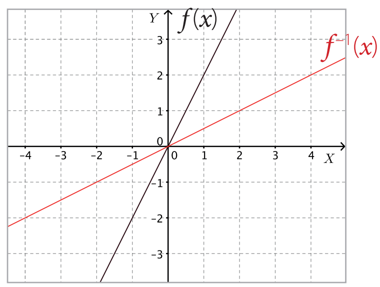
7. **Determina, en cada caso, si la función dada es solo inyectiva, solo sobreyectiva o es biyectiva.**
   a. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^3$
   b. $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = log(x)$
   c. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = (x + 5)^2 - x^2$
   d. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida como $f(x) = 5^{x+1}$
   e. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida como $f(x) = x^4$
   f. $f: \mathbb{R}^+_0 \longrightarrow \mathbb{R}^-_0$ definida como $f(x) = -x^2$

8. **Determina la inversa de las siguientes funciones biyectivas.**
   a. $f(x) = -x + 6$
   b. $f(x) = x^3 - 4$
   c. $f(x) = (x - 1)^2 - x^2$
   d. $f(x) = ln(x) - 10$
   e. $f(x) = e^{2x} + 5$
   f. $f(x) = log_2(x + 5)$

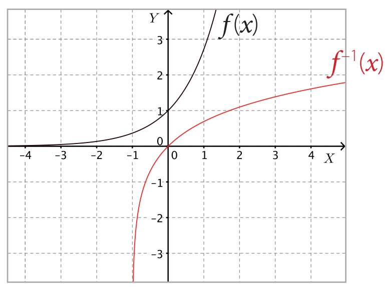
9. **CONEXIÓN CON LA ECONOMÍA ▸ El IVA es el impuesto que se paga por la compra de algunos artículos, bienes o servicios. Este valor es el 19 % del precio original del producto adquirido.**
   a. Si el precio de un producto es x y no tiene IVA incluido, ¿cuál es la expresión que permite calcular el precio real que debe pagar el cliente, en función de su precio sin IVA?
   b. Halla el valor que debe pagar un cliente por un computador que cuesta $ 1 850 000 y que no tiene incluido el IVA.
   c. Escribe una función que permita conocer el precio de un producto sin IVA incluido en función de su valor con IVA.

10. **Determina si las siguientes gráficas corresponden a la de una función f y su inversa f^{-1}. En el caso de que no lo sean, esboza la gráfica de f^{-1}.**

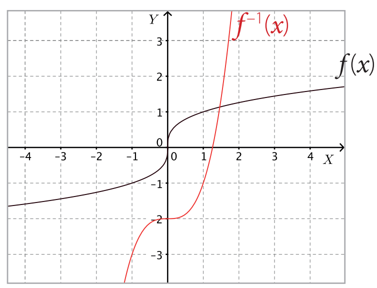
a.



b.



c.



11. **¿Qué condiciones debe cumplir una función para que tenga inversa? Explica.**

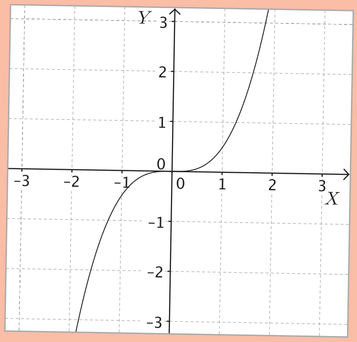
Función potencia

Aprenderé a: analizar la función potencia.

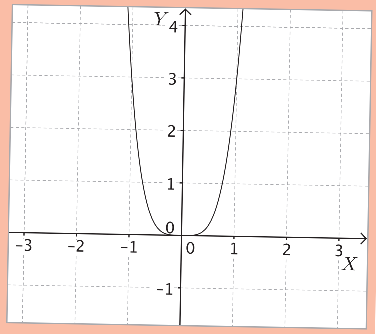
Repaso

1. ¿Cómo es la gráfica de una función cuadrática?, ¿qué nombre recibe?
2. Esboza la gráfica de las funciones: $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2$

Observa las gráficas de las siguientes funciones.



$f(x) = \frac{1}{2}x^3$



$g(x) = 3x^4$

- ¿Cuál es el valor de $f(1)$?, ¿y el de $g(-1)$?
- ¿Cuál es el dominio y el recorrido de cada función?

Las funciones anteriores pertenecen al tipo de función llamada **función potencia**. La función potencia es de la forma $f(x) = ax^n$, donde a y n son números reales distintos de 0.

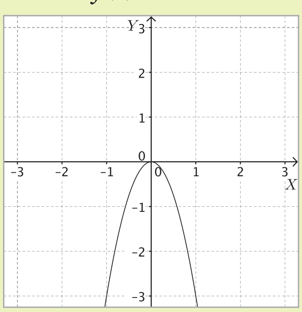
Luego, la función f del contexto inicial es una función potencia con $a = \frac{1}{2}$ y $n = 3$, mientras que en el caso de g, $a = 3$ y $n = 4$.

Observa que si el exponente n es un número entero positivo no hay restricciones para los valores que puede tomar x en la función potencia, es decir, la función está definida para todo $\mathbb{R}$, luego, $dom\, f = \mathbb{R}$. En cambio, para determinar el recorrido de la función, es necesario distinguir qué sucede en los casos cuando n es par o impar.

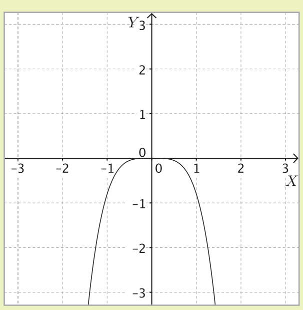
Observa que la gráfica de la función $f(x) = ax^n$, con n par positivo, es simétrica respecto del eje Y.

Observa las siguientes gráficas de funciones potencia, con n par.

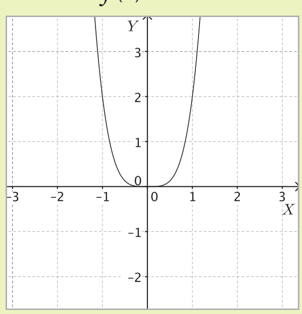
$f(x) = -3x^2$



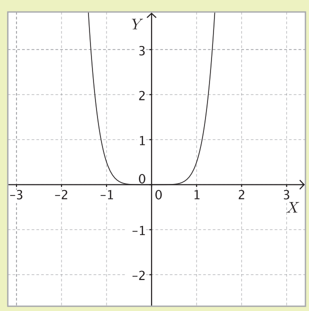
$f(x) = -\frac{4}{5}x^4$



$f(x) = 2x^4$



$f(x) = \frac{1}{2}x^6$



Si te fijas, los valores de y correspondientes a la función $f(x) = ax^n$, para n par positivo, dependen de si a es mayor o menor que 0.

Cuando $a > 0$, los valores que puede adoptar $f(x)$ son siempre positivos o cero. Luego, $rec\ f = \mathbb{R}^+_0$. Además, la gráfica de la función se encuentra en el primer y segundo cuadrante y tiene su vértice en el punto más bajo de la curva.

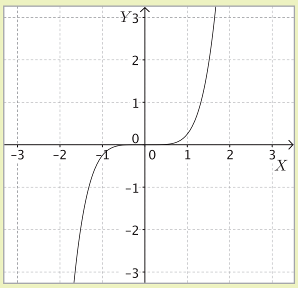
Por otra parte, cuando $a < 0$, la gráfica de cada función tiene su vértice en el punto más alto y la curva está en el tercer y cuarto cuadrante. Además, el recorrido de la función potencia son los números reales negativos y el cero, es decir, $rec\ f = \mathbb{R}^-_0$.

El año pasado aprendiste que la gráfica de una función cuadrática es una curva llamada parábola. Si te fijas, la forma de la gráfica de $f(x) = ax^n$, con n par positivo, es similar a una parábola, aunque realmente la curva es una parábola solo en el caso de $n = 2$, es decir, si f es una función cuadrática. En general, cuando $a > 0$, la curva se abre hacia arriba y el vértice es el punto más bajo de la gráfica, mientras que cuando $a < 0$, la curva se abre hacia abajo y el vértice es el punto más alto de la gráfica. En ambas situaciones, las coordenadas del vértice son (0, 0).

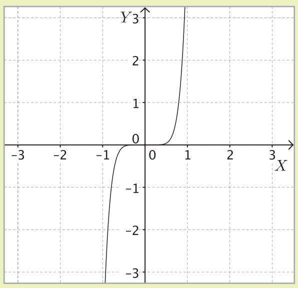
Observa que la gráfica de la función $f(x) = ax^n$, con n impar positivo es simétrica respecto del origen.

Las siguientes gráficas corresponden a funciones potencia, con n impar positivo.

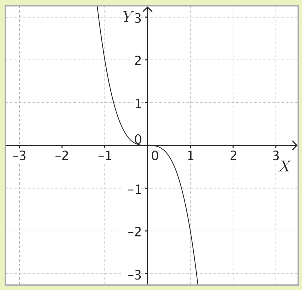
$f(x) = \frac{1}{4}x^5$



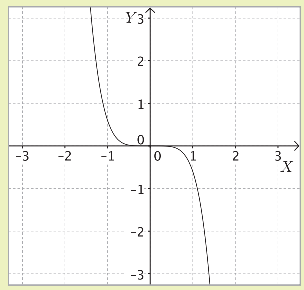
$f(x) = 5x^7$



$f(x) = -2x^3$



$f(x) = -\frac{3}{5}x^5$



Si te fijas, cuando n es impar positivo, el recorrido de la función siempre es el conjunto de los números reales, independiente del valor que adopta a, es decir, $rec\ f = \mathbb{R}$.

Por otra parte, la gráfica de la función $f(x) = ax^n$, para n impar positivo y $a > 0$, se encuentra en el primer y tercer cuadrante y la función siempre es creciente. En cambio, cuando $a < 0$, la función es decreciente y se encuentra en el segundo y cuarto cuadrante. En todos los casos anteriores, la gráfica pasa por el origen.

¿Lo entiendes?

¿Qué ocurre si $n = 1$? Explica

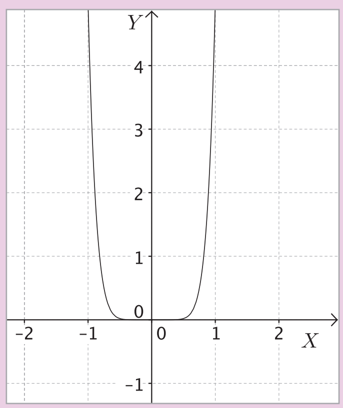
¿Cómo hacerlo?

Determina el dominio y el recorrido de la función $f(x) = 5x^8$.

f es una función potencia con n par positivo y $a > 0$.

El dominio de cualquier función potencia con exponente entero positivo siempre es el conjunto de todos los números reales. Luego, $dom\ f = \mathbb{R}$.

El recorrido de la función depende de los valores de n y a. En este caso, tenemos que $n = 8$ y $a = 5$. Como n es par positivo, entonces la gráfica de f es similar a una parábola (aunque en realidad no lo es). Además, la curva se abre hacia arriba, ya que $a > 0$, y el vértice es el punto más bajo de la gráfica. De esta manera, el recorrido de la función es $rec\ f = \mathbb{R}^+_0$. En la figura de la derecha se muestra la gráfica de f.



Uso GeoGebra

EN PAREJAS

GeoGebra es un *software* libre que relaciona aritmética, geometría, álgebra y cálculo. Por una parte, es un sistema de geometría interactiva, en el que se pueden construir puntos, vectores, rectas y funciones, y luego modificarlas dinámicamente. Pero también se pueden ingresar las ecuaciones y coordenadas directamente y obtener las gráficas correspondientes. Esto permite construir y analizar gráficas de diversas funciones.

Para descargar este programa ingresa a **www.geogebra.org/cms/es**. Pulsa el botón **Descarga**, y luego haz clic en el botón **Java Webstart**. De este modo podrás trabajar con este *software* sin tener la necesidad de instalarlo en tu computador.

Para graficar una función, se escribe directamente en la celda Entrada, ubicada en la parte inferior de la ventana. Si la función tiene potencias, los exponentes se anotan a continuación del símbolo ^. Por ejemplo, para graficar $f(x) = x^3$ se escribe **f(x)=x^3** y luego se presiona **Enter**.

Con un compañero, realicen las siguientes actividades.

1. **Utilizando GeoGebra, grafiquen simultáneamente las siguientes funciones. Luego, respondan.**

   a. $f(x) = x^4$ b. $f(x) = x^6$ c. $f(x) = x^8$ d. $f(x) = x^{10}$

   - Las funciones dadas, ¿son simétricas?, ¿por qué?
   - A medida que el exponente aumenta, ¿qué pueden observar en las gráficas de las funciones?

2. **Grafiquen simultáneamente las siguientes funciones y respondan.**

   a. $f(x) = 0{,}05x^4$ b. $f(x) = 3x^4$ c. $f(x) = 5x^4$ d. $f(x) = 12x^4$

   - ¿Qué sucede a medida que a crece?
   - ¿Ocurrirá lo mismo para $a < 0$?, ¿cómo lo saben?

3. **Grafiquen simultáneamente las siguientes funciones y respondan.**

   a. $f(x) = 0{,}8x^3$ b. $f(x) = x^3$ c. $f(x) = 7x^3$ d. $f(x) = 10x^3$

   - ¿Qué sucede a medida que a crece?
   - ¿Ocurrirá lo mismo para $a < 0$?, ¿cómo lo saben?

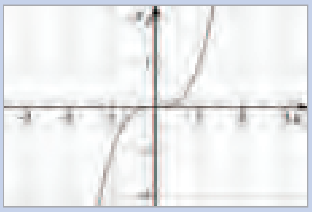
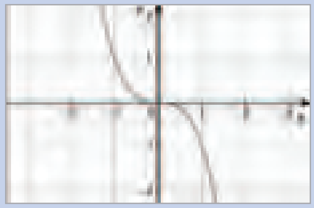
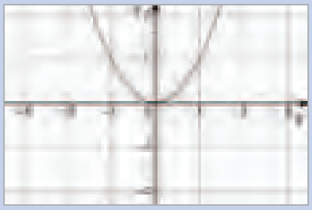
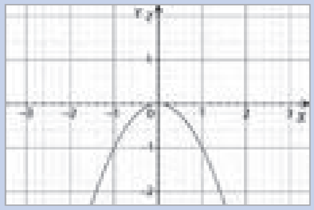
4. **Grafiquen simultáneamente las siguientes funciones y respondan.**

   a. $f(x) = 8x^4$ b. $f(x) = 5x^{-4}$ c. $f(x) = 2x^6$ d. $f(x) = 9x^{-6}$

   - ¿Cuál es el dominio de la función?, ¿y el recorrido?
   - ¿Cuál es la diferencia entre la función potencia con exponente par positivo y otra con exponente par negativo?
   - ¿Que sucede si el exponente es impar negativo? Respondan a partir de la gráfica de $f(x) = x^{-3}$.

Tomo nota

- Una función potencia es una función de la forma $f(x) = ax^n$, donde a y n son números reales, distintos de cero.
- El dominio de una función potencia $f(x) = ax^n$, con n entero positivo, es $\mathbb{R}$.
- La gráfica de la función $f(x) = ax^n$, con n entero positivo, depende de si n es par o impar y del signo de a:

	$a > 0$	$a < 0$
n impar		
n par		

Actividades

1. De las siguientes funciones, ¿cuál o cuáles son funciones potencia? Justifica tu respuesta en cada caso.

a. $f(x) = x^3$
b. $f(x) = -x^2$
c. $f(x) = x^{-4}$
d. $f(x) = -7x^6$
e. $f(x) = 9x^2 + 3$
f. $f(x) = 3 \cdot 5^x$

2. Sin construir ninguna gráfica, determina el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.

a. $f(x) = 7x^8$
b. $f(x) = -4x^4$
c. $f(x) = 0{,}3x^5$
d. $f(x) = -1{,}25x^9$
e. $f(x) = \sqrt{3}x^{36}$
f. $f(x) = -5x^{67}$

3. Dibuja en un mismo gráfico las funciones $f(x) = x^6$, $g(x) = -x^6$ y $h(x) = 5x^6$. Luego, responde.

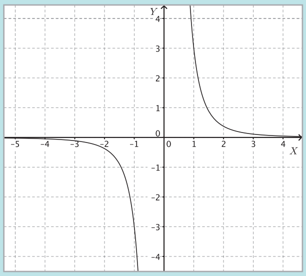
a. ¿Qué semejanzas hay entre las gráficas de f y g?, ¿cuáles son sus diferencias?
b. ¿Y entre las gráficas de g y h?, ¿cuáles son sus semejanzas y diferencias?
c. ¿Cómo crees que es la gráfica de la función $f(x) = -5x^6$? Argumenta tu respuesta.

4. Dibuja en un mismo gráfico las funciones $p(x) = x^3$, $q(x) = -x^3$ y $r(x) = -4x^3$. Luego, responde.

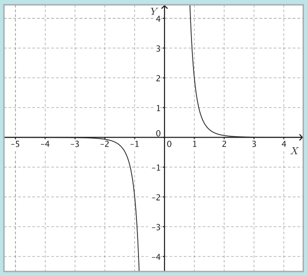
a. ¿Qué semejanzas hay entre las gráficas de p y q?, ¿cuáles son sus diferencias?
b. ¿Y entre las gráficas de q y r?, ¿cuáles son sus semejanzas y diferencias?
c. ¿Cómo crees que es la gráfica de la función $f(x) = 4x^3$? Argumenta tu respuesta.

Observa las siguientes funciones potencia, si n es un número impar negativo.

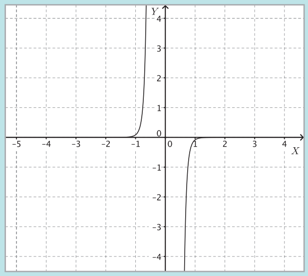
$f(x) = 3x^{-3}$



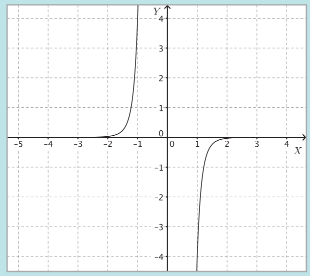
$f(x) = 2x^{-5}$



$f(x) = -\frac{1}{12}x^{-9}$



$f(x) = -4x^{-7}$

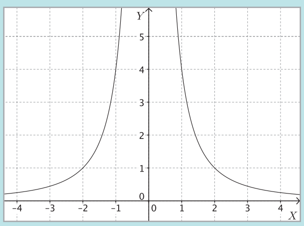


A partir de las gráficas anteriores podemos observar que en todos los casos tanto el dominio de f como su recorrido es el conjunto de todos los números reales menos el cero. Es decir, $dom\, f = rec\, f = \mathbb{R} - \{0\}$. En este caso, los ejes X e Y son asíntotas de la función.

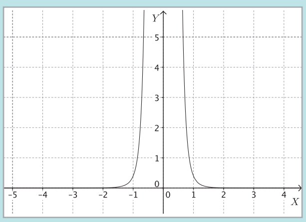
Además, cuando $a > 0$ la función es decreciente y se encuentra en el primer y tercer cuadrante, mientras que si $a < 0$, la función es creciente y se encuentra en el segundo y cuarto cuadrante.

Finalmente, observa las siguientes gráficas que representan funciones potencia cuando el exponente n es un número negativo par.

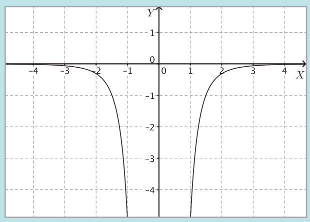
$f(x) = 4x^{-2}$



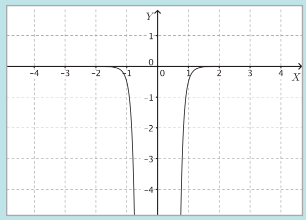
$f(x) = \frac{2}{5}x^{-6}$



$f(x) = -5x^{-4}$



$f(x) = -\frac{1}{2}x^{-8}$



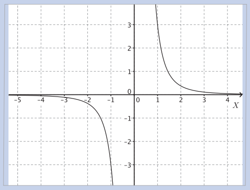
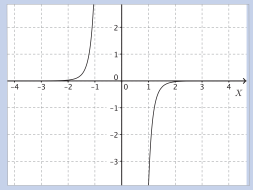
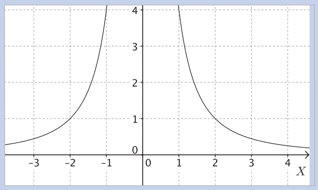
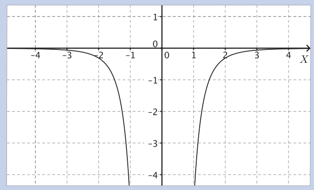
Si te fijas en las gráficas anteriores, podemos verificar que cuando n es un numero par negativo, el dominio de la función potencia son los números reales diferentes de 0, o sea, $dom\, f = \mathbb{R} - \{0\}$. Sin embargo, el recorrido de f, depende del signo de a:

Cuando $a > 0$ los valores que puede tomar la función son todos los números reales positivos. Es decir, $rec\, f = \mathbb{R}^+$. En este caso, la función es creciente para los valores negativos de x y decreciente para los valores positivos de x. Por último, la función tiene dos asíntotas: en $x = 0$ e $y = 0$, o sea, los ejes Y y X, respectivamente.

En el caso de que $a < 0$, el recorrido de la función potencia son todos los números reales negativos, es decir, $rec\, f = \mathbb{R}^-$. Además, la función decrece para los valores negativos de x y es creciente para los valores positivos de x. Al igual que en el caso anterior, la función tiene dos asíntotas, las cuales son los ejes X e Y.

Tomo nota

- En el caso de una función potencia del tipo $f(x) = ax^n$ con n entero negativo, las características de la función también dependen de si n es par o impar y del signo de a.
- El dominio de una función potencia $f(x) = ax^n$ con n entero negativo es $\mathbb{R} - \{0\}$.

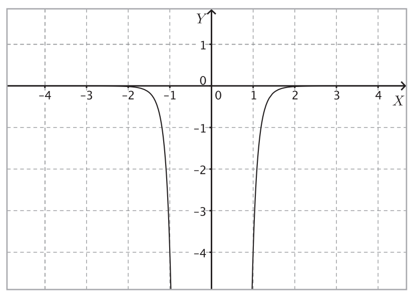
	$a > 0$	$a < 0$
n negativo impar		
n negativo par		

Actividades

1. **Sin construir ninguna gráfica, determina el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.**
   a. $f(x) = x^{-2}$
   b. $f(x) = 3x^{-7}$
   c. $f(x) = 0{,}6x^{-5}$
   d. $f(x) = -1{,}2x^{-8}$
   e. $f(x) = 16x^{-20}$
   f. $f(x) = -\sqrt{2}x^{-13}$

2. EN PAREJAS ▶ **Usando un *software* para graficar, dibujen en un mismo gráfico las funciones $f(x) = 3x^{-2}$ y $g(x) = -3x^{-2}$. Luego, respondan las siguientes preguntas.**
   a. ¿Qué semejanzas hay en la forma de las gráficas de f y g?, ¿qué diferencias hay?
   b. ¿Cuál es el dominio y recorrido, en cada caso?, ¿cómo lo supieron?

3. EN GRUPO ▶ **Observen la gráfica de la función de la forma $f(x) = ax^n$ que se muestra en la figura. Luego discutan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifiquen las falsas.**
   a. a es un número real menor que 0.
   b. f no es una función potencia.
   c. n es un número entero par negativo.
   d. El dominio de f son los reales negativos.
   e. La recta $x = 0$ es una asíntota de f.



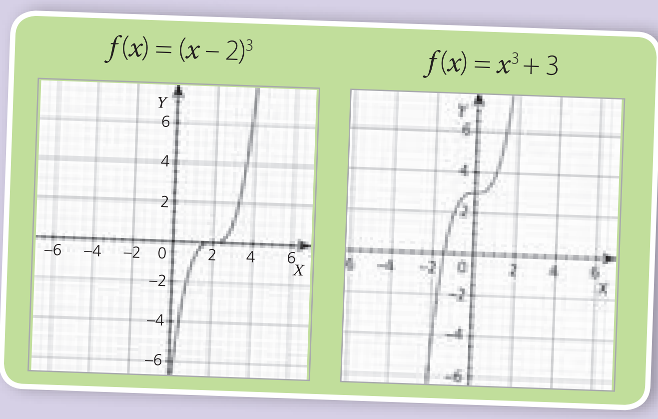
Antes de continuar

1. En una función potencia, ¿cuál es el dominio y el recorrido?

Traslaciones horizontales y verticales

Aprenderé a: analizar los desplazamientos de la función potencia.

Observa las gráficas de las siguientes funciones. Luego, responde.



- Las funciones anteriores, ¿son funciones potencia?, ¿por qué?
- ¿En qué se parecen y en qué se diferencian ambas funciones?

Repaso

Determina las coordenadas del vértice de las siguientes funciones cuadráticas.

1. $f(x) = x^2 + 3$
2. $g(x) = (x - 5)^2$
3. $h(x) = (x + 2)^2 + 7$

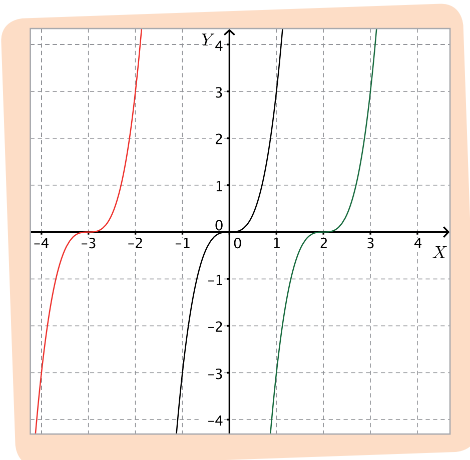
En el curso anterior aprendiste que la gráfica de una función cuadrática se puede trasladar hacia la derecha, izquierda, arriba o abajo. Con la gráfica de una función potencia puedes hacer lo mismo.

La figura muestra las gráficas de las siguientes funciones.

$f(x) = 3x^3$

$g(x) = 3(x + 3)^3$

$h(x) = 3(x - 2)^3$



Observa que la forma de la gráfica de las tres funciones es la misma, solo se diferencian en que están trasladadas horizontalmente. Si te fijas en el eje X, la gráfica de f pasa justo por el origen. La gráfica de g interseca al eje X en el punto (–3, 0), es decir, está trasladada 3 unidades hacia la izquierda respecto de la gráfica de f. Finalmente, la gráfica de h interseca al eje X en el punto (2, 0). Por lo tanto, se encuentra trasladada 2 unidades a la derecha respecto de la gráfica de f.

Luego, podemos concluir que si c es un número positivo, la gráfica de la función $f(x) = a(x + c)^n$ está trasladada c unidades a la izquierda respecto de $f(x) = ax^n$ y la gráfica de $f(x) = a(x - c)^n$ está trasladada c unidades a la derecha respecto de $f(x) = ax^n$.

Atención

Las funciones g y h no son funciones potencia ya que no son de la forma $f(x) = ax^n$, sino que pertenecen a otro tipo de funciones llamado **funciones polinomiales**.

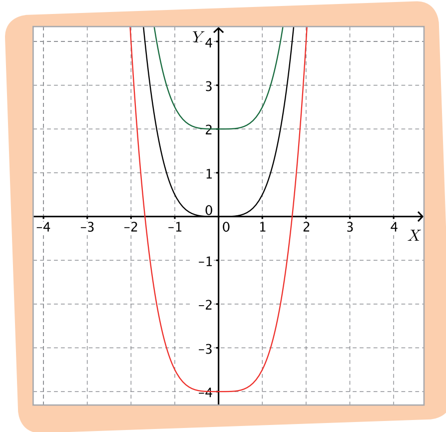
Las funciones polinomiales se pueden formar sumando múltiplos de potencias de x con exponentes enteros positivos o cero; por ejemplo: $f(x) = 2x^4 + 6x^3 + x - 7$.

En la siguiente figura se muestran las gráficas de las funciones:

$f(x) = \frac{1}{2}x^4$

$g(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2$

$h(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4$



Observa que las gráficas de las funciones g y h están trasladadas verticalmente respecto de la gráfica de f. En el caso de g, su gráfica está trasladada 2 unidades arriba de la de f. Por otra parte, la gráfica de h está trasladada 4 unidades abajo de la gráfica de f.

Por lo tanto, podemos concluir que si c es un número positivo, la gráfica de la función $f(x) = ax^n + c$ está trasladada c unidades hacia arriba respecto de $f(x) = ax^n$ y la gráfica de la función $f(x) = ax^n - c$ está trasladada c unidades hacia abajo respecto de $f(x) = ax^n$.

¿Cómo hacerlo?

Determina la función g cuya gráfica está representada en la figura, si se sabe que corresponde a una traslación de $f(x) = 2x^4$.

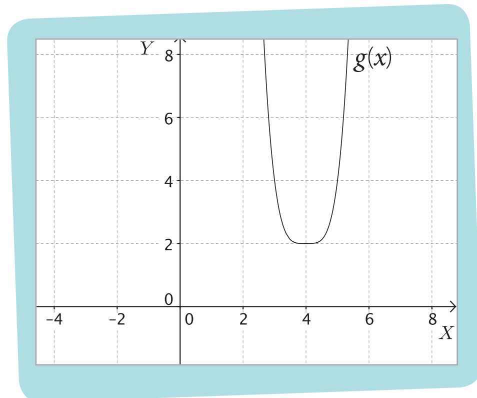
Si te fijas, el vértice de la función g es el punto (4, 2). Dado que el vértice de f es (0, 0), entonces la gráfica de g está trasladada 4 unidades hacia la derecha y 2 hacia arriba respecto de f.

Luego, la función g corresponde a:

$$g(x) = 2(x - 4)^4 + 2$$

Traslación de 4 unidades hacia la derecha.

Traslación de 2 unidades hacia arriba.



¿Cómo hacerlo?

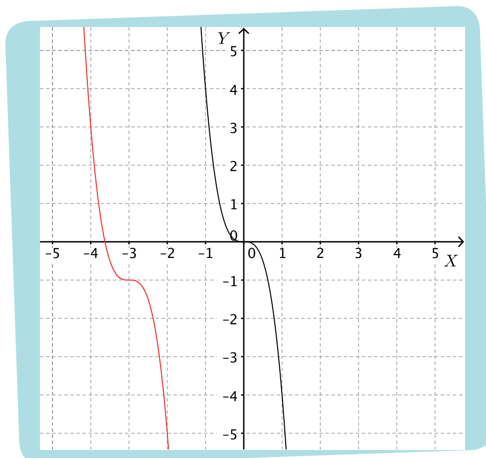
A partir de la gráfica de $f(x) = -4x^3$, esboza la gráfica de $h(x) = -4(x + 3)^3 - 1$.

La gráfica de h corresponde a una traslación de la de f. Observa:

$$h(x) = -4(x + 3)^4 - 1$$

Traslación de 3 unidades hacia la izquierda.

Traslación de 1 unidad hacia abajo.



Luego, a partir de la gráfica de f (de color negro), dibujamos la misma curva pero trasladada 3 unidades hacia la izquierda y una unidad hacia abajo. Por lo tanto, la gráfica de h es la que se muestra en la figura, de color rojo.

Uso GeoGebra

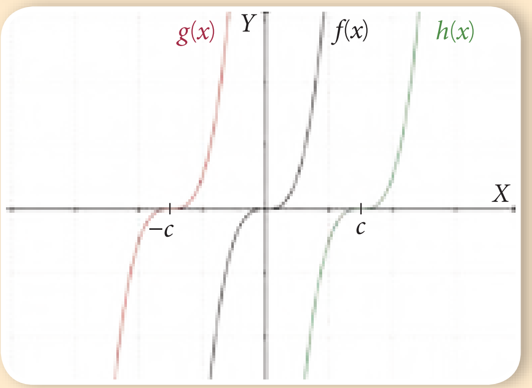
EN PAREJAS

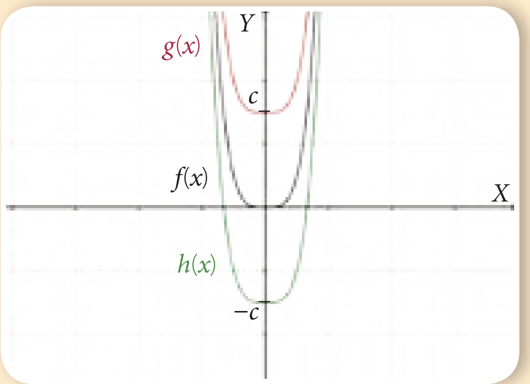
Ahora utilizarán GeoGebra para trasladar funciones potencia. En parejas, realicen las siguientes actividades.

1. **Abran el programa y grafiquen la función $f(x) = 2{,}5x^6$. Luego, respondan.**
   a. ¿Cuáles son las coordenadas de su vértice?
   b. ¿Cuál es el dominio y recorrido de f?
2. **Sin borrar la función anterior, grafiquen la función $g(x) = 2{,}5(x + 9)^6 - 12$.**
   a. ¿En qué se parecen ambas gráficas?, ¿en qué se diferencian?
   b. ¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la gráfica de g?, ¿qué relación hay entre estas coordenadas y la definición de la función?
3. **Sin construir el gráfico, discutan cuáles son las coordenadas del vértice de la gráfica de la función $h(x) = 2{,}5(x - 6)^6 + 5$. Verifiquen su respuesta dibujando la gráfica de h con el *software*.**
4. **Si $f(x) = 2x^3$, determinen una función cuya gráfica sea igual a la de f pero trasladada 6 unidades a la izquierda y 9 hacia arriba. Verifiquen su respuesta graficando la función usando el programa.**

Tomo nota

- Sea $f(x) = ax^n$ y sea c un número positivo:
  - La gráfica de $g(x) = a(x + c)^n$ se traslada en c unidades hacia la izquierda con respecto a $f(x)$.
  - La gráfica de $h(x) = a(x - c)^n$ se traslada en c unidades hacia la derecha con respecto a $f(x)$.
  - La gráfica de $g(x) = ax^n + c$ se traslada en c unidades hacia arriba con respecto a $f(x)$.
  - La gráfica de $h(x) = ax^n - c$ se traslada en c unidades hacia abajo con respecto a $f(x)$.

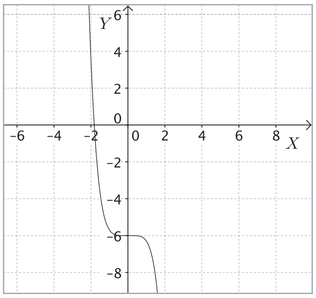


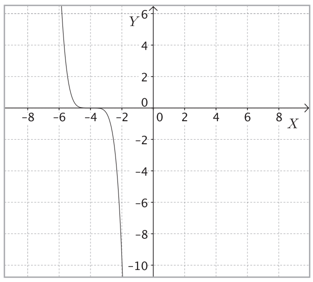


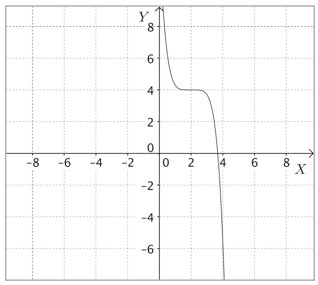
Actividades

1. **A partir de la gráfica de la función $g(x) = x^5$, dibuja la gráfica de las siguientes funciones.**
   a. $f(x) = -x^5$
   b. $h(x) = x^5 + 1$
   c. $h(x) = (x - 2)^5$
   d. $q(x) = (x + 1)^5 - 2$

2. **Determina en cada caso la función graficada, considerando que todas son traslaciones de la función $f(x) = -0{,}3x^5$.**

a. 

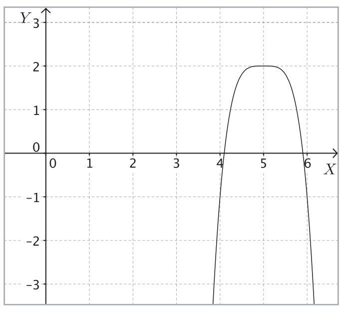
b. 

c. 

3. **Determina las coordenadas del vértice de las siguientes funciones.**
   a. $f(x) = 3x^4$
   b. $g(x) = 8(x - 6)^8$
   c. $h(x) = -7x^{12} - 17$
   d. $i(x) = -1{,}8(x + 1{,}6)^8$
   e. $j(x) = 7(x - 8)^{16} + 32$
   f. $k(x) = -0{,}25(12 + x)^4 + 32$

4. **Determina el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.**
   a. $f(x) = x^4 + 5$
   b. $g(x) = 3(x + 2)^3$
   c. $h(x) = -3(x + 8)^{-6}$
   d. $i(x) = x^7 - 1$
   e. $j(x) = 7(x + 1)^{-2} - 4$
   f. $k(x) = -(x + 1)^{10} + 13$

5. **A partir de la gráfica de la función $f(x) = a(x + b)^n + c$ que se muestra en la figura, determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica las falsas.**
   a. a es un número real menor que 0.
   b. b es un número real positivo.
   c. n es un número natural par.
   d. c es un número real positivo.
   e. f es una función potencia.
   f. La gráfica de f es una parábola.
   g. El vértice de f es el punto (5, 2).



6. **Encuentra una función cuya gráfica sea idéntica a la de $f(x) = 4x^6$, pero cuyo recorrido corresponda a todos los números reales mayores que –8.**

7. **¿Para qué valores de a y b el vértice de la función $f(x) = (x - 2a)^5 + 3b$ es el punto (–4, 12)?**

8. **¿Cuáles son las asíntotas de la función $f(x) = (x - 3)^{-2} + 4$?**

Desafío

¿Para qué valores de m, la distancia entre el vértice de la gráfica de $f(x) = 3x^6$ y el vértice de la gráfica de $g(x) = (x - 3)^6 + m - 2$ es de 5 unidades?

Antes de continuar

1. ¿Cuál es la diferencia entre la función potencia y la función polinomial?
2. Explica, paso a paso, cómo determinarías la ubicación del vértice en la gráfica de la función $f(x) = (x + 2)^4 - 9$.

Situaciones que involucran la función potencia

Aprenderé a: modelar situaciones o fenómenos cuyo modelo resultante sea la función potencia.

Repaso

1. **Inventa una secuencia numérica que cumpla un patrón y pídele a algún compañero que la complete con los 3 términos que siguen.**

En las siguientes secuencias, determina los tres términos que las continúan. Justifica tu respuesta en cada caso.

7 - 13 - 19 - 25 - 31 - 37 - 43 - 49 - ...
11 - 22 - 33 - 44 - 55 - 66 - 77 - 88 - ...
1- 2 - 4 - 8 - 16 - 32 - 64 - 128 - ...
5 - 20 - 80 - 320 - 1 280 - 5 120 - ...

- ¿Obtuviste las mismas respuestas que tus compañeros?, ¿por qué?

En la actividad inicial observaste que en cada una de las secuencias había un patrón que permitía formarlas y, aplicando esta regla, se podía continuar agregando términos.

En algunos casos los términos que continúan la secuencia se obtienen sumando una cantidad fija al número anterior. En este caso se dice que los términos están en una **progresión aritmética**, y la cantidad fija se llama **diferencia**; por ejemplo, en la secuencia:

14 - 20 - 26 - 32 - 38 - 44 - ...

cada término se genera sumando 6 al término anterior. Luego, la diferencia es 6 y el número que continúa la secuencia es 50, ya que $44 + 6 = 50$.

Asimismo, si el término que continúa la secuencia se obtiene multiplicando el término anterior por una cantidad fija, se dice que los términos están en una **progresión geométrica**. En este caso, la cantidad fija recibe el nombre de **razón**. Por ejemplo, en la secuencia:

2 - 6 - 18 - 54 - 162 - 486 - ...

cada término se genera multiplicando el término anterior por 3. Por lo tanto, en la secuencia anterior, la razón es 3 y el número que sigue es 1 458, ya que $486 \cdot 3 = 1\,458$.

En general dada una progresión aritmética o geométrica, podemos hallar el término en cualquier posición a partir del primer término y de la diferencia o razón, respectivamente.

En una progresión aritmética, si el primer término de la secuencia es a_1 y la diferencia es d, los términos que siguen, en función de a_1 y d, son:

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + d \\
a_3 &= a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d \\
a_4 &= a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d \\
&\vdots \\
a_n &= a_1 + (n-1)d
\end{aligned}
$$

En la expresión anterior, a_n corresponde al término n-ésimo de la secuencia; por ejemplo, si el primer término de una progresión aritmética es 7 y la diferencia es 9, los seis primeros términos son:

7 - 16 - 25 - 34 - 43 - 52 - ...

Si quisiéramos conocer el término 20 de la secuencia anterior, podemos ir sumando 9 a cada número hasta llegar a la posición que deseamos, pero también podemos usar la expresión $a_n = a_1 + (n - 1)d$ de la siguiente manera:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$
$$a_{20} = 7 + (20 - 1) \cdot 9 = 7 + 19 \cdot 9 = 7 + 171 = 178$$

En el ejemplo:

$a_1 = 7$

$n = 20$

$d = 9$

Luego, el término 20 de la secuencia es $a_{20} = 178$.

En una progresión geométrica, si el primer término de la secuencia es a_1 y la razón es r, entonces podemos definir los términos que siguen de esta manera:

$$a_2 = a_1 r$$
$$a_3 = a_2 r = a_1 r \cdot r = a_1 r^2$$
$$a_4 = a_3 r = a_1 r^2 \cdot r = a_1 r^3$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

En el caso anterior, a_n corresponde al término n-ésimo de la secuencia; por ejemplo, en la secuencia:

3 - 6 - 12 - 24 - 48 - 96 - 192 - ...

el primer término es 3 y la razón es 2 ya que cada término se genera multiplicando el anterior por 2. Luego, si queremos saber cuál es el número que ocupa la posición 13 de la secuencia, podemos usar la expresión $a_n = a_1 r^{n-1}$. Observa.

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$
$$a_{13} = 3 \cdot 2^{13-1}$$
$$a_{13} = 3 \cdot 2^{12}$$
$$a_{13} = 3 \cdot 4\,096$$
$$a_{13} = 12\,288.$$

Por lo tanto, el término 13 de la secuencia es el 12 288.

Podemos modelar una progresión geométrica por medio de una función potencia de la forma $f(x) = ax^{n-1}$, donde $f(x)$ representa el término n-ésimo en una progresión geométrica con razón x y dado su primer término a.

Por ejemplo, la función $f(x) = 5x^7$, permite conocer el octavo término de una progresión geométrica que comienza con el número 5 y cuya razón es x. Luego, si tenemos la progresión 5, 15, 45, 135, ..., la razón es 3, y su octavo término es $f(3) = 5 \cdot 3^7 = 10\,935$.

Podemos usar funciones potencia para modelar situaciones en las que aparecen progresiones geométricas, como por ejemplo, divisiones celulares y reproducción de bacterias.

Atención

El término n-ésimo de una secuencia se refiere al término que ocupa la posición n

¿Cómo hacerlo?

Un grupo de bacterias se reproduce de tal manera que en un día la cantidad de microorganismos se puede duplicar, triplicar o cuadruplicar, dependiendo de las condiciones ambientales que existan. Si inicialmente hay 2 bacterias, ¿cuántas habrá después de una semana, en cada caso?

El crecimiento de bacterias lo podemos modelar con una función potencia. Como la cantidad inicial de bacterias es 2 y se pide la cantidad de bacterias luego de 7 días (una semana), podemos modelar la situación mediante una función potencia de la forma: $f(x) = 2x^6$, donde x es la tasa de crecimiento de las bacterias y $f(x)$ es la cantidad de bacterias después de una semana. Dado que la tasa de crecimiento puede ser 2, 3 o 4, tenemos:

$f(2) = 2 \cdot 2^6 = 2 \cdot 64 = 128$ bacterias.

$f(3) = 2 \cdot 3^6 = 2 \cdot 729 = 1\,458$ bacterias.

$f(4) = 2 \cdot 4^6 = 2 \cdot 4\,096 = 8\,192$ bacterias.

Por lo tanto, si las bacterias se duplican, al cabo de una semana habrá 128; si se triplican, habrá 1 458; y si se cuadruplican habrá 8 192 bacterias.

Tomo nota

- Una **progresión aritmética** es una secuencia numérica en la cual cada término, excepto el primero, se obtiene de sumar al término anterior una cantidad constante llamada **diferencia**. El término general está dado por la expresión $a_n = a_1 + d(n - 1)$.
- Una **progresión geométrica** es una secuencia numérica en la cual cada término, excepto el primero, es igual al anterior multiplicado por una cantidad constante llamada **razón**. En una progresión geométrica, el término n-ésimo está dado por la expresión $a_n = a_1\, r^{n-1}$.
- Una progresión geométrica puede modelarse con la función potencia $f(x) = ax^{n-1}$, donde $f(x)$ es el término n-ésimo de una progresión geométrica con razón x y cuyo primer término es a.

Actividades

1. En las siguientes progresiones aritméticas, determina el término que ocupa la posición 2 014.

a. 1, 5, 9, 13, 17, ... b. 6, 17, 28, 39, 50, ... c. 39, 60, 81, 102, 123, ...

2. En las siguientes progresiones geométricas, determina el término que ocupa la décima posición.

a. 2, 6, 18, 54, 162, ... b. 5, 30, 180, 1 080, ... c. 7, 63, 567, 5 103, ...

3. Usando una función potencia, determina el término que ocupa la doceava posición de una progresión geométrica en la que el primer término es el 4 y cuya razón es la indicada, en cada caso.

a. $r = 2$ b. $r = 3$ c. $r = 4$ d. $r = 5$

4. En una hora, cierto tipo de bacteria triplica su número. En el mismo período de tiempo la cantidad de otro tipo de bacterias aumenta siete veces. Si en un determinado momento hay 20 bacterias de cada tipo, ¿cuántas habrá luego de 12 horas?

La función potencia y sus traslaciones también se pueden aplicar en situaciones financieras; por ejemplo, cuando una persona deposita dinero en un banco durante un cierto tiempo el banco paga intereses. Una de las opciones es depositar el dinero definiendo una tasa de **interés compuesto**, durante un periodo de tiempo determinado.

En el interés compuesto los intereses obtenidos al final de un periodo se suman al capital inicial y el monto así obtenido se convierte en el nuevo capital para el cálculo de los intereses en el siguiente periodo; por ejemplo, si una persona deposita $ 2 000 por 5 años a una tasa de interés compuesto del 10 % anual, observa cómo podemos calcular su capital final a medida que pasan los años.

Periodo	Capital inicial	Interés	Capital final	Expresión
1	$ 2 000	$2\,000 \cdot 0{,}1 = 200$	$ 2 200	$C_f = C_i \cdot (1 + 0{,}1)^1$
2	$ 2 200	$2\,200 \cdot 0{,}1 = 220$	$ 2 420	$C_f = C_i \cdot (1 + 0{,}1)^2$
3	$ 2 420	$2\,420 \cdot 0{,}1 = 242$	$ 2 662	$C_f = C_i \cdot (1 + 0{,}1)^3$
4	$ 2 662	$2\,662 \cdot 0{,}1 = 266{,}2$	$ 2 928	$C_f = C_i \cdot (1 + 0{,}1)^4$
5	$ 2 928	$2\,928 \cdot 0{,}1 = 292{,}8$	$ 3 221	$C_f = C_i \cdot (1 + 0{,}1)^5$

Luego, el capital final al cabo de 5 años es $ 3 221.

La siguiente expresión permite calcular directamente el capital final C_f que se obtiene a partir de un capital inicial C_i en t años a una tasa de interés compuesto anual r:

$$C_f = C_i \cdot (1 + r)^t$$

En el ejemplo anterior, para calcular el capital final usando la expresión anterior, queda:

$$C_f = 2\,000 \cdot (1 + 0{,}1)^5 = 2\,000 \cdot 1{,}1^5 = 2\,000 \cdot 1{,}16051 = 3\,221{,}2$$

Luego, el capital final al cabo de 5 años con una tasa de interés compuesto del 10 % anual es $ 3 221.

En el ejemplo:

C_i = $ 2 000

$r = 10\ \% = 0{,}1$

$t = 5$ años

¿Cómo hacerlo?

Francisca depositó $ 32 000 con una tasa de interés compuesto de un 10 % anual. ¿Cuál será su capital final, al cabo de 4 años?

Para calcular el capital final de Francisca podemos utilizar la expresión $C_f = C_i \cdot (1 + r)^t$. Luego, si remplazamos por la información dada, tenemos:

$C_f = 32\,000 \cdot (1 + 0{,}1)^4$ Resolvemos la adición del paréntesis.

$C_f = 32\,000 \cdot (1{,}1)^4$ Desarrollamos la potencia.

$C_f = 32\,000 \cdot 1{,}4641$ Multiplicamos los términos del lado derecho.

$C_f = 46\,851{,}2$

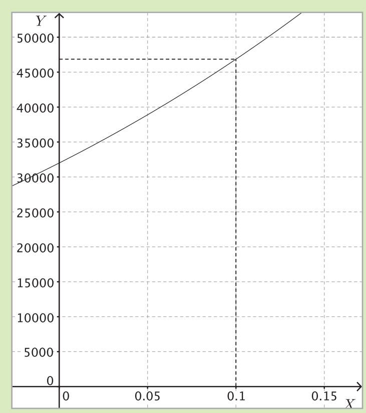
Luego, el capital final de Francisca, al cabo de 4 años, es $ 46 851.

Otra forma de resolver el problema anterior consiste en modelar la situación usando una función del tipo $f(x) = a \cdot (1 + x)^t$, donde $f(x)$ corresponde al capital final cuya tasa de interés anual es x. Las constantes a y t son el capital inicial y el periodo de tiempo de inversión, respectivamente. En este caso como $a = 32\,000$ y $t = 4$, entonces la función queda $f(x) = 32\,000 \cdot (1 + x)^4$.

Si graficamos f usando un *software*, obtendremos que para $x = 0{,}1$, el valor de $f(x)$ es un número comprendido entre 45 000 y 50 000. Luego, acercándonos lo suficiente, llegaremos finalmente a que $f(0{,}1) = 46\,851{,}2$.

¿Lo entiendes?

En el ejemplo, ¿por qué el capital final es 46 851 y no 46 851,2? Justifica.



Uso GeoGebra

EN PAREJAS

En la siguiente actividad utilizarán GeoGebra para modelar situaciones que involucran la función potencia.

1. **Podemos usar el *software* para representar una función potencia que modele el capital final en una inversión, en función de la tasa de interés compuesto anual, dado el capital inicial y el periodo de tiempo en que el dinero fue invertido. Abran el programa y sigan los siguientes pasos.**
   a. En la barra de entrada escriban la función **$f(x)$ = 10000(1 + x)^6**. De esta manera podrán observar cómo varía el capital final en función de la tasa de interés compuesto anual, cuando se invierten $ 10 000 durante 6 años. Para visualizar mejor la gráfica, hagan clic con el botón secundario sobre alguno de los ejes. Luego, elijan **Vista gráfica** y, después, ajusten los valores de **x Mín** y **x Máx** a –0,1 y 1, respectivamente; y ajusten **y Mín** e **y Máx** a –10 000 y 100 000, respectivamente.
   b. Cuando $x = 0$, ¿cuál es el valor de x?, ¿siempre ocurrirá eso?, ¿por qué?
   c. A partir de la gráfica estimen los valores de $f(0{,}05)$ y $f(0{,}1)$. Según el contexto, ¿qué representan las cantidades anteriores?
   d. A partir de la gráfica de f estimen el valor de x para el cual el capital inicial se duplica, al cabo de los 6 años.
   e. María y Pedro depositaron $ 10 000 cada uno. María lo hizo a 6 años con una tasa de interés del 0,04 % anual y Patricio, a un interés compuesto del 0,08 % durante el mismo periodo de tiempo. María dice que al cabo de 6 años, Pedro tendrá el doble de dinero que ella. ¿Está María en lo correcto? Argumenten usando la función graficada en el programa.
2. **Modela una función g que te permita calcular el capital final en función de la tasa de interés compuesto anual, sabiendo que el capital inicial es $ 150 000 durante un periodo de 3 años. Luego, grafícala usando GeoGebra.**
3. **Usa la gráfica obtenida para estimar los siguientes valores de la función.**
   a. $g(0{,}01)$ b. $g(0{,}05)$ c. $g(0{,}6)$
4. **Verifica los valores que obtuviste en la pregunta anterior evaluando directamente la función g para los valores de x dados. Por ejemplo, para evaluar g(0,01) escribe en la barra de entrada g(0.01).**
5. **En el contexto anterior, ¿es pertinente calcular $f(2)$? , ¿por qué? Comenten.**
6. **Un tipo de bacteria se reproduce de tal manera que en una hora la cantidad de microorganismos se puede duplicar o cuadruplicar, dependiendo de las condiciones ambientales que existan. Si inicialmente hay 1 bacteria.**
   a. Modela con una función el crecimiento de la bacteria en función de la tasa de crecimiento, después de 6 horas.
   b. Usando GeoGebra grafica la función anterior y estima la cantidad de horas que debe transcurrir para que la cantidad de bacterias sea más de 10 000, en cada caso.

Tomo nota

- Podemos utilizar la función potencia y sus traslaciones para modelar situaciones de interés compuesto, por medio de la expresión:

$$f(x) = a \cdot (1 + x)^t$$

donde $f(x)$ es el capital final obtenido al invertir un capital inicial a con una tasa de interés compuesto anual x, durante un periodo de tiempo t, en años.

Actividades

1. CONEXIÓN CON LA ECONOMÍA ▶ **Patricia invirtió $ 6 000 a una tasa de interés compuesto anual durante 4 años. Determina el capital final, considerando la tasa de interés, en cada caso.**
   a. $r = 0{,}01$
   b. $r = 0{,}02$
   c. $r = 0{,}06$
   d. $r = 0{,}08$
   e. $r = 9\,\%$
   f. $r = 12\,\%$
2. **Sea f una función de la forma $f(x) = a \cdot (1 + x)^t$ que modela una situación de interés compuesto. A partir de este contexto determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica las falsas.**
   a. El dominio de f son todos los números reales.
   b. Los elementos del recorrido de f son números mayores o iguales que a.
   c. El valor de $f(2)$ corresponde al capital final obtenido con una tasa de interés compuesto de 2 %.
   d. La función siempre es creciente.
   e. a es un número real positivo.
   f. t es un número real.
   g. f es una función potencia.
3. **Hugo, Alicia y Camila depositaron cada uno $ 32 000 en sus cuentas con una tasa de interés compuesto anual, durante 3 años. Hugo realizó el depósito con una tasa del 2 % anual, Alicia lo realizó con un 0,05 % anual y Camila, con un 1 % anual.**
   a. Determina la función que te permite modelar la situación anterior.
   b. Al cabo de los 3 años, ¿quién obtuvo mayor ganancia?, ¿cuánto más?
   c. ¿Cuál es la diferencia entre lo que recibió Camila y Alicia?
4. **Resuelve los siguientes problemas.**
   a. Mario invirtió $ 42 000 a una tasa de interés compuesto del 5 % anual durante 6 años, ¿cuál será el capital final? Y si la tasa de interés fuera el doble, ¿cuál será el capital final?
   b. Antonia y Pedro depositaron cada uno $ 37 000 en sus cuentas bancarias. Antonia lo hizo al 5 % anual, por 6 años; y Pedro, al 0,5 % anual por el mismo periodo de tiempo. Al retirar el dinero, ¿quién tiene más dinero?, ¿cuánto más?

Antes de continuar

1. ¿Cuáles son las principales aplicaciones de la función potencia? Nómbralas.
2. ¿Cuál es la diferencia entre la función potencia y la función exponencial?

Practico

Resuelve las siguientes actividades, para consolidar los conceptos y los procedimientos que has aprendido.

1. **Modela las siguientes situaciones usando una función potencia.**
   a. El volumen de un cilindro cuya altura mide el doble que su radio basal.
   b. La energía cinética de un cuerpo de masa m y que viaja con una velocidad v.
   c. El área de un rectángulo de largo a^2 y cuyo ancho es la mitad que el largo.
   d. El perímetro de un triángulo rectángulo de catetos $3x^7$ y $4x^7$.
   e. El perímetro de un círculo con radio igual a $4u^4$.

2. **¿Por qué la función $f(x) = (x - 2)^6$ no corresponde a una función potencia? Justifica tu respuesta.**

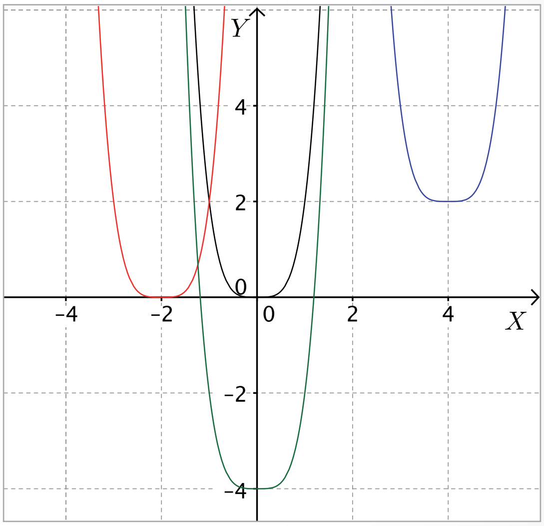
3. **Determina el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.**
   a. $f(x) = 3x^5$
   b. $f(x) = -x^6$
   c. $f(x) = x^8 - 9$
   d. $f(x) = (x + 4)^{13} + 2$
   e. $f(x) = 5(x + 9)^4 + 1$
   f. $f(x) = 13 - (x + 6)^3$

4. **Determina las coordenadas del vértice de las siguientes funciones.**
   a. $f(x) = 2x^8 + 7$
   b. $f(x) = (x - 3)^6$
   c. $f(x) = 5 + x^{10}$
   d. $f(x) = (x - 3)^6 + 7$
   e. $f(x) = 3(x - 3)^{18} - 9$
   f. $f(x) = 2,3 - 7(x + 0,5)^{26}$

5. **¿Para qué valores de a y b el vértice de la función $f(x) = (x - a + 6)^4 + 8 - b$ es el punto (7, 4)?**

6. **Determina la función cuya gráfica está desplazada 6 unidades a la derecha y 3 arriba de la gráfica de $f(x) = 7x^4$. Grafica ambas funciones.**

7. **A partir de la gráfica de $f(x) = x^4$ (en color negro) determina las funciones cuyas gráficas son las de color rojo, azul y verde.**



8. **CONEXIÓN CON LA FÍSICA ▶ Un cuerpo negro emite radiación en función de su temperatura. La relación entre la radiación que emite un cuerpo negro y su temperatura está dada por la función:**

$$E(T) = \sigma T^4$$

donde E es la energía emitida por el cuerpo negro (en W/m²), T es la temperatura (medida en K) y σ es un valor constante e igual que $5,67 \cdot 10^{-8}$ (W/m²K⁴).
   a. ¿Qué punto es el vértice de E?
   b. Si la temperatura de un cuerpo es de 4 000 K, ¿cuánta energía emite?
   c. Según el contexto, ¿cuál es el dominio de la función?, ¿y su recorrido?
   d. Según el contexto la función, ¿es creciente, decreciente o ambos? Explica.
   e. Esboza la gráfica aproximada de E.
   f. Si un cuerpo tiene el triple de temperatura que otro, ¿cuál es la relación entre la cantidad de energía que emite cada uno?

9. Utilizando una función potencia, determina el octavo término de las progresiones geométricas en las que el primer término es 1 y cuya razón es la indicada en cada caso.

a. $r = 2$
b. $r = 3$
c. $r = 6$
d. $r = 2{,}3$
e. $r = 1{,}2$
f. $r = 0{,}5$

10. CONEXIÓN CON LA ECONOMÍA ▸ Patricia invirtió $ 200 000 a una tasa de interés compuesto anual durante 8 años. Determina el capital final, considerando la tasa de interés, en cada caso.

a. $r = 1$ %
b. $r = 2$ %
c. $r = 3$ %
d. $r = 6$ %
e. $r = 9$ %
f. $r = 15$ %

11. ¿Con qué función potencia se puede modelar la situación anterior? Explica tu respuesta.

12. Javier y Andrea depositaron cada uno $ 120 000 en sus cuentas a una tasa de interés compuesto anual, durante 6 años. Si Andrea realizó el depósito con una tasa del 4 % anual y Javier lo realizó con una tasa del 8 % anual:

a. las ganancias de Javier, ¿fueron el doble que las de Andrea? Justifica tu respuesta.
b. al cabo de 6 años, ¿cuánto dinero retiró cada uno?

13. CONEXIÓN CON LA INDUSTRIA ▸ En una fábrica, los tarros de duraznos se elaboran de tal manera que la medida del radio basal de cada tarro es la mitad que la medida de su altura.

a. Modela la función que permite determinar el volumen de cada tarro en función de su radio basal.
b. Según el contexto del problema, ¿cuál es el dominio de la función?, ¿cuál es su recorrido?
c. Si el radio basal de cada tarro es 10 cm, ¿cuál es su volumen?
d. Si la altura de cada tarro es 18 cm, ¿cuánto mide su radio basal?, ¿cuál es su volumen?
e. Si el radio de un tarro se duplica, ¿qué ocurre con su altura?, ¿y con su volumen?

14. Determina si las siguientes funciones tienen asíntotas. En el caso de que tengan, determina su ecuación de la recta asociada.

a. $f(x) = x^{-4}$
b. $f(x) = 2(x - 3)^{-3}$
c. $f(x) = (x + 4)^5 + 1$
d. $f(x) = 5x^{-4} + 6$
e. $f(x) = -3x^{-7} - 4$
f. $f(x) = (x + 1)^{-8} - 7$

15. CONEXIÓN CON LA INDUSTRIA ▸ Una fábrica que elabora envases cilíndricos comenzó a producir un nuevo tipo de envase de 10 cm de altura.

a. La función f que relaciona la capacidad de cada envase con el radio de la base, ¿es una función potencia? En caso de que sea así, ¿cuáles son los valores de las constantes involucradas?
b. Según el contexto, ¿la función es creciente o decreciente?
c. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función, a partir del contexto dado?
d. Define el conjunto de partida y el de llegada de modo que la función sea biyectiva.
e. ¿Cuál es el significado de $f(10)$? Calcula su valor.

16. CONEXIÓN CON LA FÍSICA ▸ Isaac Newton postuló que la fuerza de atracción gravitacional entre dos cuerpos de masas m_1 y m_2 está dada por la expresión $F(r) = Gm_1m_2r^{-2}$, donde G es un valor constante aproximadamente igual a $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg², r es la distancia entre los cuerpos, en metros, y $F(r)$ es la magnitud de la fuerza, en Newton.

a. Según el contexto, ¿cuál es el dominio de la función?, ¿y el recorrido?
b. La función, en el contexto dado, ¿es creciente o decreciente?
c. Si la distancia entre dos cuerpos de duplica, ¿qué ocurre con la fuerza de atracción?, ¿y si la distancia se reduce a la cuarta parte?
d. Aproximadamente, las masas del Sol y de la Tierra son $2 \cdot 10^{30}$ kg y $6 \cdot 10^{24}$ kg, respectivamente. Si ambos cuerpos celestes están aproximadamente a $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m de distancia, ¿cuál es la fuerza de atracción entre los cuerpos?

Marca la opción correcta en los ítems 17 a 31.

17. ¿Cuál es el recorrido de la función $f(x) = (x + 5)^8$?

A. Todos los números reales.
B. Los números reales positivos.
C. Los números reales mayores que 5.
D. Los números reales menores que 5.
E. Los números reales positivos y el 0.

18. ¿Qué punto corresponde al vértice de la función $f(x) = 3 + (x + 5)^6$?

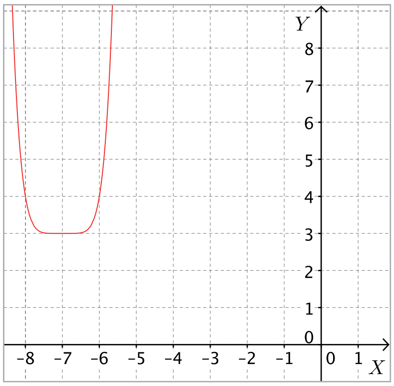
A. (3, 5)
B. (5, 3)
C. (–5, 3)
D. (–3, 5)
E. (–3, –5)

19. ¿Cuál es el término vigésimo de la siguiente progresión geométrica?

3 - 6 - 12 - 24 - 48 - 96 - ...

A. $3 \cdot 2^{19}$
B. $3 \cdot 2^{20}$
C. $3 \cdot 2^{21}$
D. $2 \cdot 3^{19}$
E. $2 \cdot 3^{21}$

20. ¿A que función corresponde la siguiente gráfica?



A. $f(x) = (x + 3)^6 + 7$
B. $f(x) = (x - 3)^6 + 7$
C. $f(x) = (x + 7)^6 + 3$
D. $f(x) = (x - 3)^6 - 7$
E. $f(x) = (x - 7)^6 + 3$

21. ¿Cuál o cuáles de las siguientes funciones tienen su gráfica en el segundo y cuarto cuadrante?

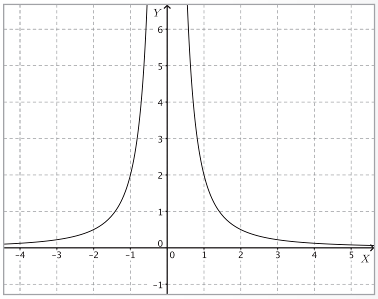
I. $f(x) = x^5$
II. $f(x) = -5x^3$
III. $f(x) = 2x^{-3}$

A. Solo I
B. Solo II
C. Solo III
D. Solo I y II
E. Solo II y III

22. Respecto de la función $f(x) = ax^n$, que se muestra en la figura, ¿cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

I. $a > 0$
II. n es un impar negativo.
III. El eje X es una asíntota de la función.

A. Solo I
B. Solo II
C. Solo I y III
D. Solo II y III
E. I, II y III



23. ¿Cuál de las siguientes rectas es una asíntota de la función $f(x) = 3(x - 2)^{-5} + 4$?

A. $y = -2$
B. $y = -4$
C. $y = 2$
D. $x = 3$
E. $x = 2$

24. ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = (x - 6)^{-4}$?

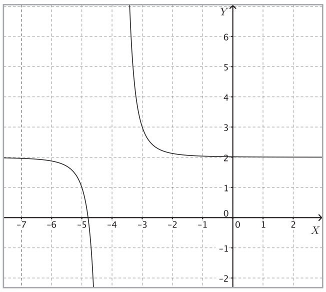
A. $\mathbb{R}$
B. $\mathbb{R} - \{-6\}$
C. $\mathbb{R} - \{6\}$
D. $\mathbb{R} - \{-4\}$
E. $\mathbb{R} - \{4\}$

25. Respecto de la función $f(x) = 4(x + 2)^3 - 5$, ¿cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

I. La función es estrictamente creciente.
II. La función tiene un vértice en el punto (–2, –5).
III. La gráfica de la función se encuentra en el primer y segundo cuadrante.

A. Solo I
B. Solo II
C. Solo III
D. Solo I y III
E. Solo II y III

26. ¿Cuál es la función cuya gráfica se muestra en la figura?



A. $f(x) = (x - 2)^3 - 4$
B. $f(x) = (x + 4)^3 + 2$
C. $f(x) = (x - 2)^3 + 4$
D. $f(x) = (x - 4)^{-3} + 2$
E. $f(x) = (x + 4)^{-3} + 2$

A partir de la siguiente situación, marca la opción correcta en las preguntas 27 y 28.

Constanza invirtió \$ 16 000 a una tasa de interés compuesto anual durante 4 años.

27. ¿Qué función permite determinar el capital final, en función de la tasa de interés expresada como número decimal?

A. $f(x) = 16\,000 \cdot x^4$
B. $f(x) = 16\,000 \cdot (x + 1)^4$
C. $f(x) = 16\,000 \cdot (x - 1)^4$
D. $f(x) = 16\,000 \cdot (100x + 1)^4$
E. $f(x) = 16\,000 \cdot (100x - 1)^4$

28. Si Constanza realiza la inversión con una tasa de interés anual de 8 %, ¿cuál es el capital final, al cabo de los 4 años?

A. \$ 21 767
B. \$ 30 236
C. \$ 64 000
D. \$ 65 536
E. \$ 104 976

29. ¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = ax^n$?, si:

(1) $a = 4$
(2) $n = 3$

A. (1) por sí sola.
B. (2) por sí sola.
C. Ambas juntas, (1) y (2).
D. Cada una por sí sola, (1) o (2).
E. Se requiere información adicional.

30. Dada la función $f(x) = (x - a)^{-3} + b$, se quiere determinar los valores de a y b, si:

(1) La función tiene una asíntota en $x = -6$
(2) $Rec\, f = \mathbb{R} - \{7\}$

A. (1) por sí sola.
B. (2) por sí sola.
C. Ambas juntas, (1) y (2).
D. Cada una por sí sola, (1) o (2).
E. Se requiere información adicional.

31. Andrés invirtió una cantidad de dinero a 5 años con una tasa de interés compuesto. ¿Cuál será su capital final al cabo de ese tiempo?, si:

(1) La tasa de interés es de un 7 % anual.
(2) El capital inicial fue de \$ 76 000.

A. (1) por sí sola.
B. (2) por sí sola.
C. Ambas juntas, (1) y (2).
D. Cada una por sí sola, (1) o (2).
E. Se requiere información adicional.

Evaluación de proceso

Aplica lo aprendido hasta este momento en la unidad para desarrollar las siguientes actividades.

1. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica las falsas.

a. El recorrido de la función potencia $f(x) = ax^n$, con n par y $a < 0$, corresponde a todos los números reales positivos y el 0.

b. La gráfica de la función $f(x) = ax^n$, con $n = 2$ y $a \neq 0$, es una curva llamada parábola.

c. La función $f(x) = ax^n$, con n impar y $a \neq 0$, es siempre creciente.

d. La gráfica de $f(x) = ax^n$, con n impar y $a > 0$ se encuentra en el primer y tercer cuadrantes.

2. Determina si las siguientes funciones corresponden a una función potencia.

a. $f(x) = 2x^5$

b. $f(x) = x^2 + 1$

c. $f(x) = 6^x$

d. $f(x) = -6x^8$

e. $f(x) = 8x^{-6}$

f. $f(x) = 5x^1$

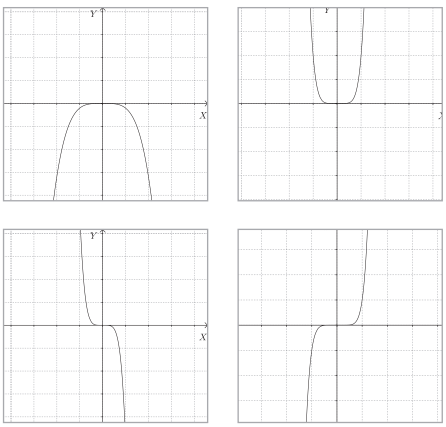
3. Relaciona las gráficas con las funciones que se indican.

a. $f(x) = -5x^5$

b. $f(x) = -0{,}2x^4$

c. $f(x) = x^7$

d. $f(x) = 2x^6$



4. Grafica las siguientes funciones.

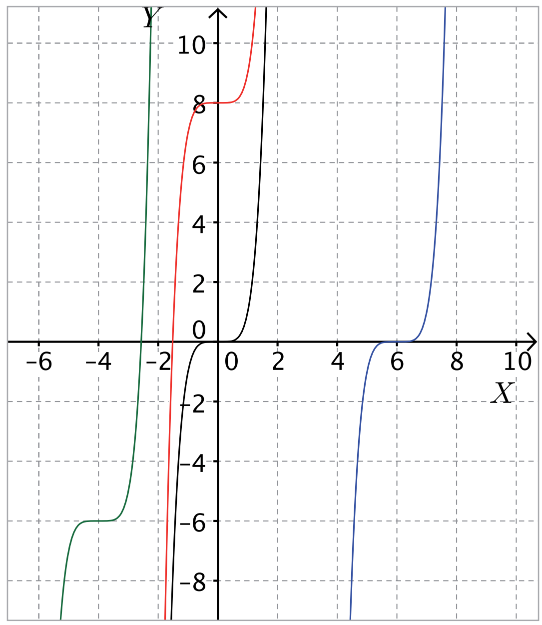
a. $f(x) = -2x^4$

b. $f(x) = x^5$

c. $f(x) = 0{,}5x^8$

d. $f(x) = 8x^6$

5. A partir de la gráfica de $f(x) = x^5$ (en color negro) determina las funciones cuyas gráficas son las de color rojo, azul y verde.



6. Determina el recorrido de las siguientes funciones.

a. $f(x) = x^3 + 8$

b. $f(x) = -2x^4 - 9$

c. $f(x) = 8x^6 + 5$

d. $f(x) = (x - 3)^7$

e. $f(x) = 2\,(x + 5)^8$

f. $f(x) = -3\,(x - 1)^2 + 7$

7. Dada la función $f(x) = 3x^4$, determina otra función cuya gráfica sea idéntica a la de f pero cuyo vértice sean los puntos que se indican.

a. (0, 4)

b. (3, 0)

c. (1, 8)

d. (–5, 2)

e. (9, –9)

f. $(-a, -b)$

8. Determina el vértice de las siguientes funciones.

a. $f(x) = x^2 + 8$

b. $f(x) = -2x^4 - 9$

c. $f(x) = (x - 3)^6$

d. $f(x) = 2(x + 5)^8$

9. **El volumen de un cono de altura h y radio basal r, se puede calcular mediante la expresión:**

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

a. Si en un cono su radio es la novena parte de su altura, modela una función que permita representar el volumen del cono en función de su altura.

b. La función anterior, ¿es una función potencia? Argumenta tu respuesta.

c. De acuerdo al contexto dado, ¿cuál es el dominio de la función anterior?, ¿cuál es su recorrido? Justifica.

10. **Modela las siguientes situaciones usando una función potencia.**

a. El volumen de un cubo en función de la medida de su arista.

b. El área de un círculo en función de la medida de su diámetro.

c. El volumen de un prisma de base rectangular cuyo ancho mide el doble que el largo y el alto mide el triple que el ancho.

11. **Resuelve los siguientes problemas.**

a. Si se invierten $ 42 000 a una tasa de interés compuesto del 2 % anual durante 10 años, ¿cuál será el capital final? Y si la tasa de interés fuera del 4 %, ¿cuál sería el capital final?

b. Un tipo de bacteria se reproduce al doble cada hora que pasa. Otro tipo de bacteria se triplica por cada hora transcurrida. Si se hace un cultivo en el que inicialmente hay 1 000 bacterias de cada tipo, ¿cuántas habrá al cabo de cinco horas?

c. Sergio y Alicia depositaron cada uno $ 62 000 en sus cuentas bancarias. Sergio lo hizo al 6 % anual, por 4 años; y Alicia, al 8 % anual por el mismo periodo de tiempo. Al retirar el dinero, ¿cuánto dinero más tiene Alicia que Sergio?

d. Dos progresiones geométricas parten con el número 6. Si la razón de una de ellas es 9 y la razón de la otra es 6, ¿cuál es la suma entre los términos que ocupan la posición 10 en cada progresión?

Marca la opción correcta en los ítems 12 a 15.

12. **¿Cuál de las siguientes funciones está representada en la gráfica de la figura?**

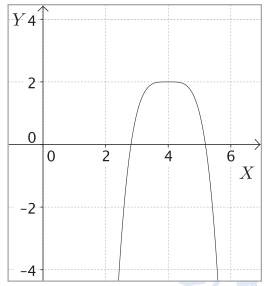
A. $f(x) = -(x - 4)^4 + 2$

B. $f(x) = -(x + 4)^4 + 2$

C. $f(x) = -(x + 4)^4 - 2$

D. $f(x) = (x + 4)^4 - 2$

E. $f(x) = (x - 4)^4 + 2$



13. **¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde al término 101 de la progresión que se muestra a continuación?**

5 - 10 - 20 - 40 - 80 - ...

A. $5 \cdot 2^{100}$

B. $5 \cdot 100^2$

C. $100 \cdot 2^5$

D. $100 \cdot 5^2$

E. $2 \cdot 5^{100}$

14. **¿Cuál de las siguientes funciones permite calcular el volumen de una pirámide de base cuadrada, sabiendo que la medida de su arista basal es el doble que la medida de su altura?**

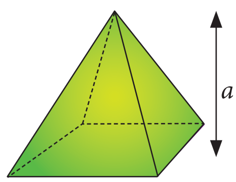
A. $V(a) = \frac{1}{3}a^3$

B. $V(a) = \frac{4}{3}a^3$

C. $V(a) = \frac{3}{4}a^3$

D. $V(a) = a^3$

E. $V(a) = 2a^3$



15. **¿Cuál de los siguientes números no pertenece al recorrido de la función $f(x) = -6x^6 + 9$?**

A. 36

B. 9

C. 0

D. –6

E. –24

Mi progreso

Verifica en el solucionario del Texto si tus respuestas son correctas. Si tienes respuestas incorrectas, marca en la tabla el criterio correspondiente y realiza las actividades de refuerzo indicadas.

Criterio	Ítems	¿Qué debo hacer?
Analizar la función potencia.	1, 2, 3, 4 y 15	Si tuviste menos de 3 ítems correctos, realiza las actividades 1, 2, 3 y 4.
Analizar los desplazamientos de la función potencia.	5, 6, 7, 8 y 12	Si tuviste menos de 3 ítems correctos, realiza las actividades 5, 6, 7, 8 y 9.
Modelar situaciones o fenómenos cuyo modelo resultante sea la función potencia.	9, 10, 11, 13 y 14	Si tuviste menos de 3 ítems correctos, realiza las actividades 10, 11, 12, 13 y 14.

Para reforzar

Según los resultados obtenidos en la evaluación de proceso, resuelve las actividades correspondientes para reforzar los contenidos en los que tuviste dificultades.

1. **Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica las falsas.**
   a. La gráfica de $f(x) = ax^n$, con n par y $a > 0$ se encuentra en el primer y segundo cuadrantes.
   b. El dominio de la función potencia $f(x) = ax^n$, con n par y $a < 0$, son todos los números reales positivos y el 0.
   c. En la función potencia $f(x) = ax^n$, n debe ser un número natural.
   d. En toda función potencia $f(x) = ax^n$, el recorrido son todos los números reales.

2. **En cada caso, determina por qué la función no corresponde a una función potencia.**
   a. $f(x) = 6^x$
   b. $f(x) = 5x^1$

3. **Grafica las siguientes funciones potencia.**
   a. $f(x) = x^4$
   b. $f(x) = 2x^6$
   c. $f(x) = -x^8$
   d. $f(x) = x^7$
   e. $f(x) = 9x^5$
   f. $f(x) = -7x^3$

4. **Respecto de los gráficos que construiste en la pregunta anterior, responde.**
   a. ¿En qué se parecen las gráficas obtenidas en a, b y c?, ¿en qué se diferencian?
   b. ¿En qué se parecen las gráficas obtenidas en d, e y f?, ¿en qué se diferencian?
   c. ¿Cómo es la gráfica de una función potencia cuando el exponente es par?, ¿cuál es su dominio?, ¿y su recorrido?
   d. ¿Qué ocurre con el domino y el recorrido de una función potencia cuando el exponente es impar?

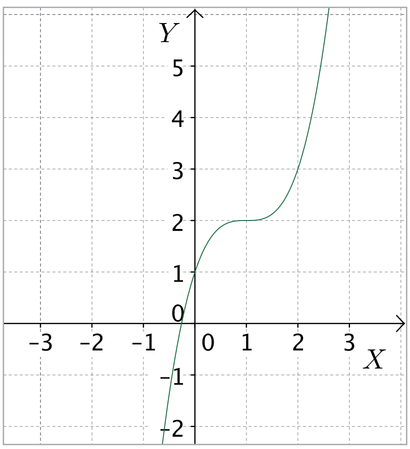
5. **Determina una función cuya gráfica es idéntica a la de $f(x) = -6x^6$, y cuyo vértice es el punto indicado, en cada caso.**
   a. (1, 0)
   b. (0, 1)
   c. (2, 6)
   d. (–4, 2)
   e. (5, –3)
   f. (–6, –7)

6. **¿Cuál es el vértice de la función $f(x) = 4 - 6(x + 2)^6$? Justifica tu respuesta.**

7. Observa la siguiente gráfica y responde.

a. ¿Cuál es el dominio de la función?, ¿y el recorrido?
b. ¿Para cuáles valores de x la función es creciente?, ¿para cuáles es decreciente?
c. ¿Cuáles son las coordenadas del vértice?
d. Si la gráfica tiene la misma forma que la de la función $f(x) = x^6$, ¿qué función está graficada en la figura?

8. Observa la siguiente gráfica y responde.



a. ¿Cuál es el dominio de la función?, ¿y el recorrido?
b. La función, ¿es creciente o decreciente? Justifica tu respuesta.
c. Si la gráfica tiene la misma forma que la de la función $f(x) = x^3$, ¿qué función está graficada en la figura?

9. ¿Para qué valores de a y b el vértice de la función $f(x) = 2a - b + 6(x + b - 4a)^4$ es el punto (4, 6)?

10. Modela las siguientes situaciones usando una función potencia.

a. El área de un cuadrado de lado a^2.
b. El perímetro de un triángulo equilátero de lado b^3.
c. El octavo término de una progresión geométrica cuyo primer término es 7 y de razón x.
d. El n-ésimo término de una progresión geométrica cuyo primer término es a y de razón x.

11. El volumen de un prisma de base cuadrada de lado l y altura h, se puede calcular mediante la expresión $V = l^2h$.

a. Si la altura de un prisma de base cuadrada mide el doble que el lado de la base, modela el volumen del prisma, en función de l.
b. La función anterior, ¿es una función potencia? Argumenta tu respuesta.
c. De acuerdo al contexto dado, ¿cuál es el dominio de la función anterior?, ¿cuál es su recorrido? Justifica.

12. Se invierten \$ 42 000 a una tasa de interés compuesto anual durante 6 años. Calcula el capital final, para cada una de las tasas de interés dadas.

a. 1 %
b. 2 %
c. 4 %
d. 8 %
e. 10 %
f. 20 %

13. Ramón depositó \$ 72 000 con una tasa de interés anual del 7 %, durante 5 años.

a. ¿Cuánto dinero obtuvo de ganancia?
b. Si hubiese realizado el depósito a un 14 % anual, ¿su ganancia habría sido el doble? Argumenta tu respuesta.
c. ¿Cuánto más habría ganado si hubiese realizado la inversión con una tasa de interés del 21 %?

14. Determina el término que ocupa la posición 12 en una progresión geométrica cuyo primer término es el 2 y cuya razón es la indicada.

a. $r = 2$
b. $r = 3$
c. $r = 6$
d. $r = 9$

Síntesis

Caracterizar las funciones y sus elementos.

1. **Considera la función $f(x) = x^2 - 3x - 4$.**
   a. Construye la gráfica de la función anterior.
   b. Determina el dominio y el recorrido de f.
   c. ¿Para cuáles valores de x la función es creciente?

- ¿Cómo puedes determinar el dominio y el recorrido de una función, a partir de su gráfica? Explica el procedimiento que utilizaste.
- ¿Cómo sabes cuando una función es creciente o decreciente?

Identificar funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

2. **En cada caso se define la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Evalúa si las funciones son biyectivas.**
   a. $f(x) = x^2 - 9$
   b. $f(x) = 3x + 4$
   c. $f(x) = 5 \cdot 6^x$
   d. $f(x) = -3x^3$

- Explica cómo determinas si una función es inyectiva. ¿Y si es sobreyectiva?
- ¿Qué condiciones deben cumplirse en una función para que esta sea biyectiva?

Analizar las condiciones para la existencia de la función inversa y la determinación de funciones inversas.

3. **Halla la inversa de las siguientes funciones.**
   a. $f(x) = x^2 - 9$
   b. $f(x) = 3x + 4$
   c. $f(x) = 5 \cdot 6^x$
   d. $f(x) = -3x^3$

4. **Sea $f(x) = x + 3$. Construye la gráfica de f y luego la de f^{-1}.**

- ¿Qué condiciones deben cumplirse para que una función tenga inversa?
- ¿Cómo es la gráfica de una función respecto de la de su inversa?

Analizar la función potencia.

5. **De las siguientes funciones, ¿cuál o cuáles corresponden a una función potencia?**
   a. $f(x) = x^{-3}$
   b. $f(x) = x^5$
   c. $f(x) = 5 \cdot 6^x$
   d. $f(x) = 3^x$

6. **Determina el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.**
   a. $f(x) = x^7$
   b. $f(x) = 2x^6$
   c. $f(x) = -5x^8$
   d. $f(x) = -8x^9$

- ¿Cómo lograste identificar las funciones que correspondían a funciones potencia?
- ¿En qué se diferencia la función potencia de la función exponencial?
- Explica cómo determinas el dominio y el recorrido de una función potencia, sin visualizar su gráfica.

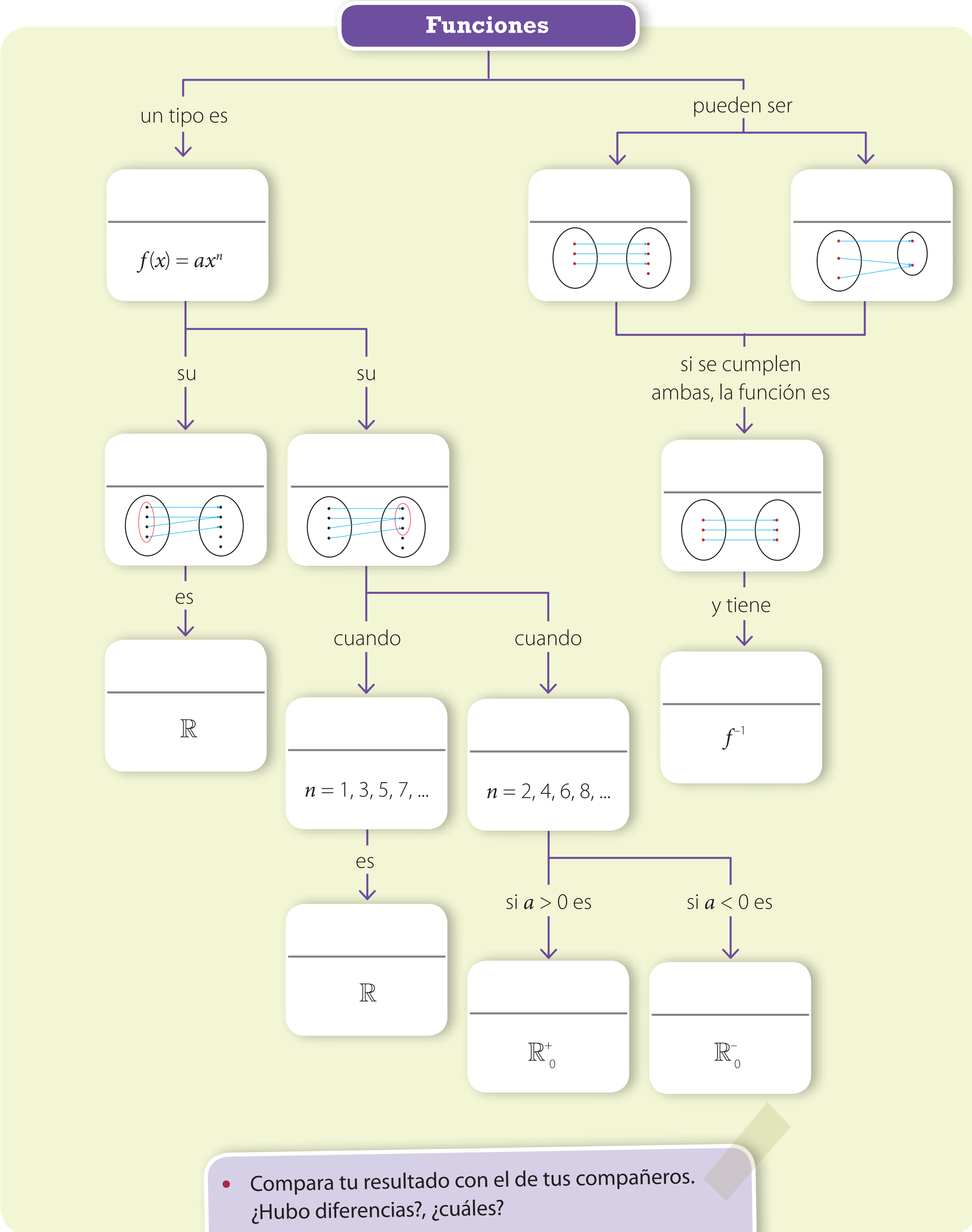
Analizar los desplazamientos de la función potencia.

7. **Dada la función potencia $f(x) = 3x^5$ determina la función g cuya gráfica está trasladada 3 unidades hacia la derecha y 2 unidades hacia arriba respecto de la gráfica de f.**

8. **¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la función $f(x) = -4(x + 5)^8 + 6$?**

- Explica el procedimiento que empleaste para hallar la función g a partir del desplazamiento de la gráfica de la función f.

9. **Completa el mapa conceptual con los conceptos fundamentales trabajados en la unidad.**

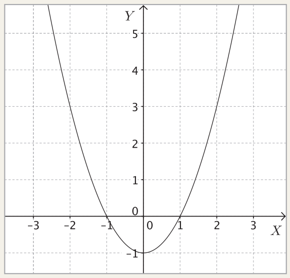


- Compara tu resultado con el de tus compañeros. ¿Hubo diferencias?, ¿cuáles?
- Revisa en el solucionario del Texto los conceptos correctos. ¿Qué otros conceptos agregarías?, ¿en qué lugar del mapa los pondrías?, ¿por qué?

Evaluación final

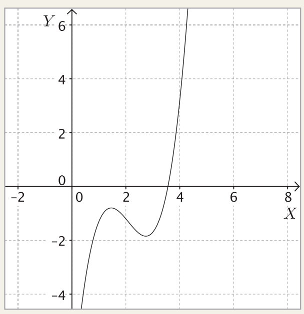
Aplica lo aprendido en la unidad para desarrollar las siguientes actividades.

1. **A partir de la gráfica de $f(x) = x^2 - 1$, que se muestra en la figura, responde.**
   a. ¿Cuál es el dominio de f?, ¿y el recorrido de f?
   b. ¿Para cuáles valores de x la función es decreciente?



2. **En una fábrica el costo de x camisas está dado por la expresión $C(x) = 3x^2 + 5$.**
   a. ¿Cuánto valen 1 000 camisas?
   b. ¿Cuál sería el dominio de la función costo para esta situación?

3. **Determina si la función, cuya gráfica se muestra en la figura, es inyectiva. Justifica tu respuesta.**



4. **La función anterior, ¿es biyectiva?, ¿por qué?**

5. **Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica las falsas.**
   a. La función $f(x) = 8 - 4x$ es sobreyectiva.
   b. La función $g(x) = 7x^2 + 5$ es inyectiva.
   c. La función $h(x) = 2 \cdot \log x$ es biyectiva.

6. **Escribe la expresión algebraica de una función inyectiva tal que no sea sobreyectiva.**

7. **¿Cómo representarías una función sobreyectiva pero que no sea inyectiva, algebraicamente?**

8. **Representa una función biyectiva con una expresión algebraica.**

9. **Determina la inversa de las siguientes funciones.**
   a. $f(x) = 3x - 4$
   b. $f(x) = \dfrac{x+5}{8}$
   c. $f(x) = 3 \cdot 4^x$
   d. $f(x) = \log_3 x$

10. **Si $f(x) = 3x - 25$, ¿existe $f^{-1}(x)$? Justifica.**

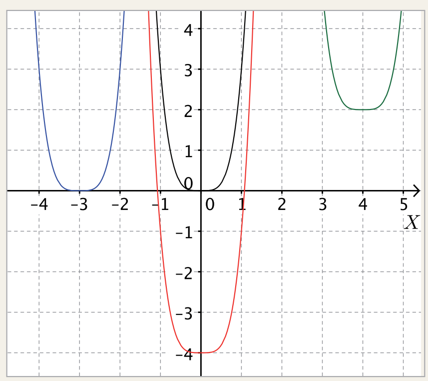
11. **Demuestra que si $f(x) = e^x + 1$, entonces $f^{-1}(x) = \ln(x - 1)$. ¿Cuál es la relación entre las gráficas de ambas funciones?**

12. **¿Para qué valores de k, el recorrido de la función $f(x) = -3x^k$ corresponde a $\mathbb{R}_0$?**

13. **Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica las falsas.**
    a. La función potencia $f(x) = ax^n$, con n positivo impar y $a > 0$, es siempre creciente.
    b. El vértice de una función potencia $f(x) = ax^n$ es el punto más bajo de la curva.
    c. La gráfica de la función potencia $f(x) = ax^n$, con n negativo impar y $a < 0$, se halla en el segundo y cuarto cuadrante.
    d. El dominio de la función potencia $f(x) = ax^n$, con n positivo par y $a < 0$, son todos los números reales positivos y el 0.
    e. La gráfica de la función potencia $f(x) = ax^n$, con n positivo par, es una curva llamada parábola.

14. **Grafica las funciones $f(x) = 2x^4$ y $g(x) = 2x^3$. Luego, responde.**
    a. ¿En qué puntos se intersecan?
    b. ¿Para qué valores de x es creciente cada una?
    c. ¿Cuál es el recorrido de cada función?

15. **A partir de la gráfica de $f(x) = 3x^2$ (en color negro) determina las funciones cuyas gráficas son las de color rojo, azul y verde.**



16. Determina la función cuya gráfica está desplazada 6 unidades a la derecha y 3 arriba de la gráfica de $f(x) = 7x^{-4}$.

17. ¿Para qué valores de a y b el vértice de la función $f(x) = (x - a + 2)^6 + 3 - b$ es el punto (5, 7)?

18. Jorge y Paula depositaron cada uno \$ 85 000 en sus cuentas bancarias. Jorge lo hizo al 4 % anual, por 5 años; y Paula, al 7 % anual por el mismo periodo de tiempo. Al retirar el dinero, ¿cuánto dinero más tiene Paula que Jorge?

19. ¿Cuál es el término vigésimo de la siguiente progresión geométrica?

2 - 6 - 18 - 54 - 162 - 486 - ...

20. Dos progresiones aritméticas parten con el número 4. Si la diferencia de una de ellas es 7 y la de la otra es 12, ¿cuál es el producto entre los términos que ocupan la posición 9 en cada una?

21. Un tipo de bacteria se reproduce al triple cada hora que pasa. Si se hace un cultivo en el que inicialmente hay 500 bacterias, ¿cuántas habrá al cabo de ocho horas?

Marca la opción correcta en los ítems 22 a 24.

22. Si $f(x) = 2x + 3$, ¿cuál es el valor de $f^{-1}(33)$?

A. 15
B. 18
C. 30
D. 69
E. 70

23. ¿Cuál de las siguientes funciones siempre es creciente?

A. $f(x) = 3 - x$
B. $f(x) = x^2 + 3x - 5$
C. $f(x) = 8 - 6^x$
D. $f(x) = (x + 5)^2 - 3$
E. $f(x) = \sqrt{x - 6} - 8$

24. ¿Cuántas unidades se encuentra trasladada la gráfica de $g(x) = 3x^3 + 5$, respecto de la gráfica de $f(x) = 3x^3$?

A. 5 hacia la izquierda.
B. 5 hacia la derecha.
C. 3 hacia la derecha.
D. 5 hacia arriba
E. 3 hacia arriba.

Mis logros

Verifica en el solucionario del Texto si tus respuestas son correctas. Si tuviste respuestas incorrectas, marca en la tabla el objetivo de aprendizaje correspondiente y revisa las páginas indicadas.

Criterio	Ítems	¿Que debo hacer si tengo dudas?
Caracterizar las funciones y sus elementos.	1, 2 y 23	Revisa las páginas 18 a 24.
Identificar funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.	3, 4, 5, 6, 7 y 8	Revisa las páginas 28 a 33.
Analizar las condiciones para la existencia de la función inversa y determinación de funciones inversas.	9, 10, 11 y 22	Revisa las páginas 34 a 37.
Analizar la función potencia.	12, 13 y 14	Revisa las páginas 46 a 51 y 56 a 61.
Analizar los desplazamientos de la función potencia.	15, 16, 17 y 24	Revisa las páginas 52 a 55.
Modelar situaciones o fenómenos cuyo modelo resultante sea la función potencia.	18, 19, 20 y 21	Revisa las páginas 56 a 61.

Vuelve a la página 13 y lee lo que se esperaba que aprendieras en esta unidad. ¿Crees que lo aprendiste?, ¿por qué? Si aún tienes dudas, acláralas con tu profesor antes de continuar.

Actividades complementarias

Funciones en la prevención de accidentes

En la actualidad, una de las causas más comunes de accidentes de tránsito en nuestro país son los choques causados por no conservar una distancia prudente entre los vehículos. En las ciudades, estos choques ocurren en las intersecciones o rotondas, mientras que en carretera se dan en tramos rectos, incorporaciones a la vía o salidas.

Los choques de este tipo están estrechamente relacionados con la rapidez del vehículo, tiempo de reacción al frenar y la distancia de frenado. A partir de estas variables las autoridades de tránsito pueden determinar la culpabilidad en un choque.

Existe una relación funcional entre la distancia de frenado, medida en metros, y el cuadrado de la rapidez que llevaba el vehículo, medida en kilómetros por hora. Esta función es:

$$d(v) = \frac{v^2}{170}$$

Donde d es la distancia de frenado, v es la rapidez que lleva el vehículo y 170 es un valor aproximado que depende de la masa del automóvil, la aceleración de gravedad y el roce de los neumáticos contra el terreno.

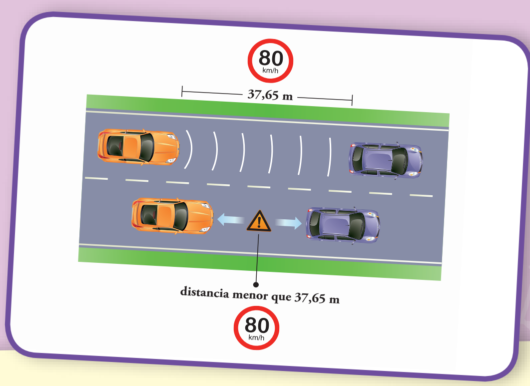
Esta expresión permite conocer la distancia a la que debe ir un automóvil para evitar un choque; por ejemplo, cuando un vehículo va a 80 km/h por una autopista, se puede obtener la distancia segura remplazando el valor de la rapidez en la expresión, de la siguiente manera:

$$d(80) = \frac{80^2}{170}$$

Resolviendo la expresión se obtiene que:

$$d(80) \approx 37{,}65 \text{ m}$$

Esto indica que la distancia que debe conservar el vehículo de otro cuando viaja a una velocidad de 80 km/h es de al menos 37,65 m, aproximadamente. Una distancia menor, en este caso, se considera insegura y, por lo tanto, puede generar un choque.



Archivo editorial

1. Completa la siguiente tabla. Luego, responde.

v (km/h)	5	10		50		100
$d(v)$ (m)			4		72,25	

a. ¿Cómo es la gráfica de la función que relaciona la distancia de frenado con la rapidez del vehículo?

b. ¿Qué tipo de función es?

c. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función?

d. Si se conduce un automóvil de tal forma que su distancia de frenado es de 70 m respecto de otro vehículo próximo, ¿a qué velocidad debe ir el automóvil?

e. Consulta la velocidad límite reglamentaria de la calle donde se encuentra tu casa o colegio. Luego, calcula la distancia de frenado a la que debe ir un automóvil para evitar un accidente.

¿Cómo se genera una radiografía?

Una radiografía es una imagen que se toma del cuerpo humano, se registra en una placa fotográfica o en forma digital y sirve, especialmente, para analizar partes del sistema óseo del cuerpo. Esta imagen se genera cuando se expone el receptor de imagen radiográfica a una fuente de radiación de alta energía procedente de isótopos radiactivos. Las sustancias radiactivas que se necesitan para tomar una radiografía se producen con un dispositivo denominado ciclotrón.

El ciclotrón es un dispositivo de tipo circular que permite acelerar partículas subatómicas a grandes velocidades hasta hacerlas chocar con un blanco, produciendo una reacción nuclear, y así generar elementos radiactivos.

Su funcionamiento se inicia con el ingreso de un protón (partícula subatómica con carga eléctrica positiva) en dos semicírculos llamados D's por su forma de "d mayúscula". Gracias a la interacción de campos eléctricos y magnéticos la partícula se mueve en forma espiral, como se muestra en la figura 1.

Archivo editorial

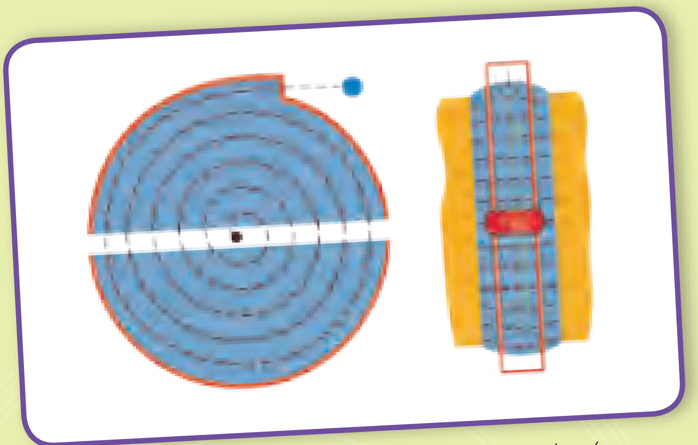


Figura 1. Trayectoria espiral del protón sobre el ciclotrón.

Cuando alcanza la energía necesaria, la partícula choca con el blanco y la energía de la partícula subatómica se puede calcular de acuerdo con la siguiente expresión:

$$K = \frac{q^2B^2R^2}{2m}$$

La energía K del protón, cuando sale del ciclotrón, depende del cuadrado del radio R de los semicírculos; q es la carga del protón equivalente a $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, B es la magnitud del campo magnético al cual se somete el protón cuando viaja por el ciclotrón y m es la masa del protón equivalente a $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

1. **Calcula la energía con la que sale un protón al pasar por un ciclotrón de campo magnético de 0,4 T y radio 1,2 m.**
2. **Completa la tabla con la energía de cada protón para los diferentes radios y realiza la gráfica de K respecto a R para un campo magnético de 0,52 T. Luego, responde.**

R (m)	5	10		50		100
K(J)			4		72,25	

   a. Usando un ***software***, grafica los puntos anteriores y determina la función asociada.
   b. ¿A qué tipo de función corresponde?
   c. Según el contexto dado, ¿cuál es el dominio y el recorrido de la función anterior?

Así se conoce la edad de los fósiles


Archivo editorial

¿Cómo es posible saber la edad de un fósil? ¿Cómo puede un científico afirmar que un objeto o los restos fósiles de un animal o una planta tienen, por ejemplo, 30 000 años?

Detrás de tales afirmaciones hay un exhaustivo trabajo de investigación. Uno de los sistemas utilizados es el método del carbono 14, válido para datar fósiles de no más de 50 000 años.

Los fósiles de más de 50 000 años se pueden datar utilizando otros métodos que consisten, básicamente, en el análisis del uranio-torio (el uranio se transforma en torio) y el potasio-argón (el potasio se transforma en argón) a partir del momento de la muerte.

Averigua más sobre estos procedimientos científicos en:

http://www.profesorenlinea.cl/Quimica/Carbono14.htm

http://www.ehu.es/biomoleculas/isotopos/carbono14.htm

Costo mínimo y costo máximo

Un fabricante de carpetas ha averiguado que el costo de fabricación por unidad viene dado por la función:

$$f(x) = \frac{20}{x}$$

donde x es el número de carpetas fabricadas y $f(x)$ es el costo, en pesos, de cada carpeta.

- ¿Cuál es el costo de cada carpeta si se fabrica 1 carpeta? ¿Y si se fabrican 2 carpetas? Completa la tabla.

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$							

- ¿Es cierto que cuantas más carpetas se fabriquen, menor será el costo de fabricación? Explica.
- ¿Cuál es el costo de fabricación por unidad cuando se fabrican 18 carpetas?
- Redondea a las unidades el costo del ejercicio anterior. ¿Puede ser el costo por unidad de fabricación menor que $ 1?, ¿por qué?
- ¿Puede tomar x el valor 2,5? ¿Y el valor 0? ¿Qué valores puede tomar la variable x?
- ¿Cuál es el mayor valor que puede tomar la fracción $\frac{20}{x}$? ¿Y la función costo anterior si x toma valores enteros positivos?
- Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{20}{x}$.

Funciones y situaciones cotidianas

Las funciones matemáticas pueden referirse a situaciones cotidianas, tales como el valor del consumo mensual de agua potable que depende del número de metros cúbicos consumidos en el mes; el valor de un departamento que depende del número de metros cuadrados construidos; la sombra proyectada por un edificio que depende de la hora del día; el costo de una llamada telefónica que depende de su duración; el costo de enviar una encomienda que depende de su peso… ¿Puedes agregar otras?

Números en progresión

Ubica en cada casillero vacío un número natural, de modo que en cada fila y en cada columna se forme una progresión aritmética.

2				14
		16		
				30
	29			

Ejercicios de profundización


Archivo editorial

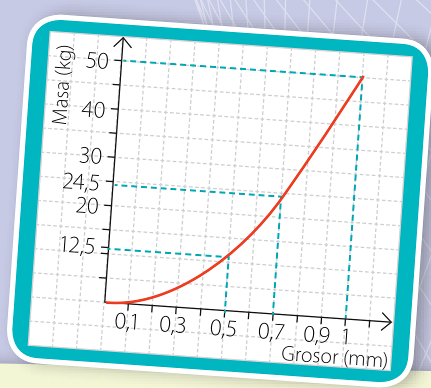
Para pescar con caña es aconsejable elegir el hilo más fino que resista el peso de los peces que se quieren capturar. Para facilitar esta elección, en los carretes de hilo de pescar se nos informa de tres cosas: la longitud del hilo, que normalmente es de 50 m; el grosor, expresado en milímetros, y la masa máxima de soporte, expresada en kilogramos.

En una tienda de artículos de pesca nos muestran hilos de pescar de 0,1; 0,2; 0,5 y 0,7 mm de grosor, que corresponden a unas masas máximas soportadas de 0,5; 2; 12,5 y 24,5 kg, respectivamente. Dibuja una gráfica que relacione el grosor del hilo con la masa máxima soportada. ¿Qué grosor de hilo debería comprarse si se estima que la masa de los peces en una laguna no excede de 5 kg?

Construimos una tabla de valores para las dos variables; a partir de ella, la gráfica.

Grosor del hilo (mm)	0,1	0,2	0,5	0,7
Masa máxima (kg)	0,5	2,0	12,5	24,5

Observamos la tabla y el gráfico y vemos que para una masa máxima de 5 kg, basta comprar hilo de 0,5 mm de grosor.



1. **Con los datos del problema, resuelve.**
   a. Calcula, de forma aproximada, el grosor mínimo necesario para capturar un pez cuya masa sea de 30 kg.
   b. Calcula, de forma aproximada, la masa máxima de un pez que pueda ser capturado con un hilo de 1 mm de grosor.
   c. Si sabemos que la gráfica es una parábola, halla su función asociada.

2. **Resuelve los siguientes problemas.**
   a. Unos amigos se encuentran de vacaciones. Desean arrendar un vehículo y tienen dos opciones:
      a) 70 dólares por día;
      b) 30 dólares por día más 0,4 dólares por kilómetro recorrido.
      Si piensan quedarse de vacaciones durante 8 días y estiman recorrer unos 400 km, ¿qué opción les será más conveniente?
      Determina a partir de qué recorrido es más conveniente la opción a) que la b) para el caso en que se queden 10 días.
   b. Un automóvil comprado hoy en $ 5 000 000 disminuye su valor a lo largo del tiempo transcurrido a partir de su compra. Si al cabo de 3 años de uso su precio será de $ 3 645 000, halla una expresión que relacione el precio p en función del tiempo t, en años. ¿A cuánto podrá venderse luego de 4 años de uso?
   c. Un jugador de fútbol patea un tiro libre de modo tal que la trayectoria de la pelota, mientras se encuentra en el aire, es la parábola correspondiente a la función $f(x) = -5x^2 + 37x$; donde $f(x)$ es la altura en metros de la pelota cuando se encuentra a x metros de distancia horizontal desde el punto en el que fue lanzada. ¿Cuál será el alcance del tiro libre?
   d. Si Mario lanza una piedra verticalmente hacia arriba, esta sube hasta cierto punto y luego empieza a caer. La relación que existe entre el tiempo t que la piedra lleva en el aire cuando se encuentra a una altura y está dada por la fórmula $y(t) = -5t^2 + 20t + 10$. ¿Cuándo alcanzará el punto más alto? ¿A qué altura se encuentra ese punto?

Unidad

2 Inecuaciones lineales

Archivo editorial

Antes aprendí a:

- Establecer relaciones de orden entre los números reales.
- Representar conjuntos y realizar operaciones con ellos.
- Resolver ecuaciones de primer grado.
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Sin duda la tecnología avanza a pasos agigantados. En menos de 30 años pasamos de transportar la información en disquetes, cuya capacidad máxima era de apenas 1,44 MB, a CD, en los cuales se pueden almacenar entre 650 MB y 700 MB de información, es decir, la contenida en más de 450 disquetes.

Posteriormente surgió el DVD, cuya capacidad de almacenamiento es de aproximadamente 4,7 GB, equivalente a la de aproximadamente 7 CD.

En la actualidad, el sucesor del DVD es el disco *Blu-ray* el cual se emplea mayormente para almacenar videos de alta definición, ya que su capacidad es más de 5 veces la de un DVD común.

1 La capacidad de un disco *Blu-ray*, ¿a la de cuántos CD equivale?

2 María quiere respaldar la información de su computador en CD. Si en total debe respaldar 2,21 GB con información, ¿cuántos CD necesita tener, como mínimo?

En esta unidad podré:

- Representar conjuntos numéricos usando lenguaje matemático.
- Expresar información por medio de desigualdades.
- Representar conjuntos de números reales usando intervalos.
- Conocer y utilizar las propiedades de las desigualdades.
- Resolver inecuaciones lineales y sistemas de inecuaciones.

Lo utilizaré para:

- Resolver problemas utilizando inecuaciones lineales y sistemas de inecuaciones.

Para recordar

Observa los siguientes cuadros que te permitirán recordar los prerrequisitos para activar tus conocimientos previos y resolver los ejercicios que se proponen en las páginas 82 y 83.

Establecer relaciones de orden entre los números reales.

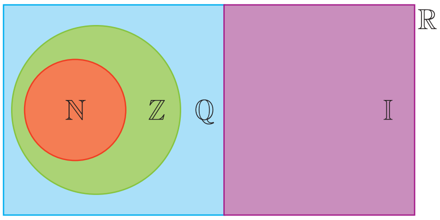
- Los signos que se utilizan para representar relaciones de orden entre los números son:

$<$: menor que	$>$: mayor que
$\leqslant$: menor o igual que	$\geqslant$: mayor o igual que

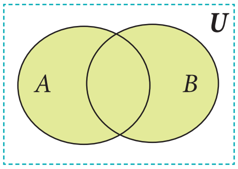
- En la recta numérica, un número real es mayor que todos los números que están a la izquierda de él, y es menor que cualquier número que esté a la derecha de él.

Representar conjuntos y realizar operaciones con ellos.

- Un conjunto es una colección de elementos. El conjunto que no tiene elementos se llama conjunto vacío y se denota $\varnothing$.
- Algunos conjuntos numéricos conocidos son:
  - El conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$), cuyos elementos son $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$.
  - El conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$), compuesto por los números naturales, el cero y los números negativos. Se representa por $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.
  - El conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$), conformado por todos los números que pueden escribirse como un cociente de dos números enteros. Los números naturales y los números enteros también son números racionales, al igual que los números decimales finitos e infinitos periódicos.
  - El conjunto de los números irracionales ($\mathbb{I}$), conformados por todos aquellos números que no pueden escribirse como un cociente de dos números enteros. Son números irracionales todos los decimales infinitos que no tienen periodo.
  - El conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$), que contiene a todos los números racionales e irracionales.

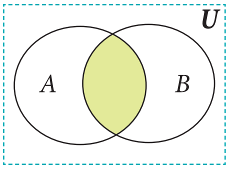


- Dados dos conjuntos, A y B, existe un conjunto llamado unión entre A y B, formado por todos los elementos de A y los que están en B. Se denota $A \cup B$.



$A \cup B$

- El conjunto $A \cap B$, llamado intersección entre A y B, está formado por los elementos que se encuentran tanto en A como en B, simultáneamente.



$A \cap B$

Resolver ecuaciones de primer grado.

- Una **ecuación** es una igualdad entre dos expersiones algebraicas que contiene al menos un valor desconocido llamado incógnita. Por ejemplo: $2x - 5 = 3$.
- Al sumar, restar, multiplicar o dividir cualquier número a ambos lados de una ecuación, la igualdad se mantiene.
- Resolver una ecuación es encontrar el o los valores de la incógnita que satisfacen la igualdad. Por ejemplo, $x = 4$ es solución de la ecuación $2x - 5 = 3$, ya que $2 \cdot 4 - 5 = 8 - 5 = 3$.
- Una **ecuación de primer grado** con una incógnita es una expresión de la forma $ax + b = 0$, con a y b números reales y $a \neq 0$.
- Toda ecuación de primer grado con una incógnita tiene una única solución en los números reales.
- Para resolver una ecuación de primer grado se pueden aplicar operaciones a ambos lados de la igualdad con el fin de despejar la incógnita. Por ejemplo:

$3x - 5 = 19$ Sumamos 5.

$3x = 24$ Dividimos por 3.

$x = 8$

- Se dice que una solución es **pertinente** al problema cuando no contradice el contexto del problema. Por ejemplo, la medida de un objeto siempre es positiva, o bien la cantidad de personas necesariamente es un número natural, nunca decimal.

Resolver sistemas de ecuaciones lineales.

- Un sistema de ecuaciones es un conjunto de dos o más ecuaciones con varias incógnitas. Por ejemplo, el sistema de ecuaciones lineales de la derecha tiene 2 ecuaciones y 2 incógnitas.

$$\begin{array}{r|} x + y = 1 \\ 5x - 2y = 11 \\ \hline \end{array}$$

- Resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas consiste en determinar los valores de las incógnitas que satisfacen todas las ecuaciones del sistema a la vez. Por ejemplo, la solución $\{x = 2, y = 1\}$ es la única que satisface el sistema de la derecha.

$$\begin{array}{r|} x + y = 3 \\ x - y = 1 \\ \hline \end{array}$$

- Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede tener una, ninguna o infinitas soluciones.
- Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se puede resolver mediante diversos métodos de resolución:
  - **método de igualación**, que consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar sus valores.
  - **método de sustitución**, que consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir su valor en la otra ecuación.
  - **método de reducción**, que consiste en buscar otro sistema equivalente, en el que los coeficientes de una de las incógnitas sean iguales o de signo opuesto.

¿Cuánto sé?

Antes de comenzar, resuelve las siguientes actividades, que te permitirán recordar conceptos y procedimientos necesarios para abordar los contenidos de esta unidad.

1. En cada caso, completa con los símbolos >, < o =, según corresponda.

a. $(12 + 7)^2$ ______ $12^2 + 7^2$

b. $\frac{5}{8} + \frac{1}{7}$ ______ $\frac{5+1}{8+7}$

c. $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{27}$ ______ $\sqrt{5^2 - 4^2}$

2. Representa cada uno de los siguientes grupos de números en una recta numérica.

a. $\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}$

b. $0{,}1; -1{,}4; -2; \frac{12}{8}; -\frac{3}{5}$

c. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, 4, 2, -2, -\sqrt{2}, 1$

3. Responde las siguientes preguntas.

a. ¿Qué números naturales cumplen con la condición de ser mayores que 3 y menores o iguales que 10?

b. ¿Qué números naturales cumplen con la condición de que su doble sea menor que 10?

c. ¿Qué números naturales cumplen con al menos una de las condiciones dadas en a y en b?

d. ¿Qué números naturales cumplen simultáneamente con las condiciones dadas en a y en b?

4. Determina a cuál o cuáles conjuntos numéricos pertenece cada uno de los siguientes números.

a. 3 c. $-3{,}2$ e. $\sqrt{7}$

b. -3 d. 4π f. $\sqrt[4]{16}$

5. Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 8, 9\}$ y $C = \{2, 3, 4, 5\}$. Determina:

a. $A \cup B$ c. $(A \cup C) \cap B$

b. $A \cap C$ d. $(A \cap B) \cap C$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a. $5x - (3 - 5x) = 7x$

b. $3x - \frac{x}{5} + 8 = 2x$

c. $\frac{3x - 2}{3} = \frac{x^2}{x + 3}$

d. $x(x + 3) = (x - 4)^2$

7. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

a. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = -10 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - 4y = 13 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 6x + 9y = 27 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ 3x - 5y + 7 = 0 \end{cases}$

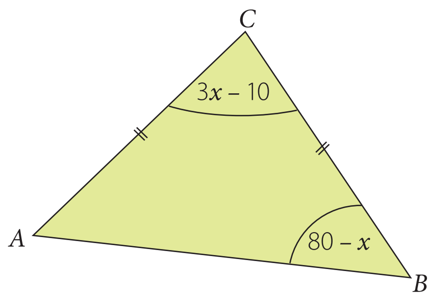
8. ¿Para qué valores de a y b el siguiente sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones?

$$\begin{cases} ax + 24y = 8 \\ 3x + by = 2 \end{cases}$$

9. Resuelve los siguientes problemas, planteando una ecuación de primer grado.

a. Camilo compró una pelota, un libro y un chocolate en $ 12 000. Si la pelota costó el triple del chocolate y el libro costó el doble del chocolate, ¿cuál es el valor de cada objeto?

b. El triángulo de la figura es isósceles de base $\overline{AB}$. ¿Cuál es la medida del $\measuredangle BAC$?



10. Resuelve los siguientes problemas, planteando un sistema de ecuaciones lineales.

a. Juan tiene en su bolsillo billetes de $ 5 000 y $ 2 000 que, en total, suman $ 23 000. Si en total Juan tiene 7 billetes, ¿cuántos billetes hay de cada tipo?

b. El perímetro de un rectángulo es 24 cm y la medida del largo equivale a la medida del ancho más 2 cm. ¿Cuál es el área del rectángulo?

Marca la opción correcta en los ítems 11 a 18.

11. ¿Cuál de las siguientes expresiones es verdadera?

A. $(7 + 5)^3 = 7^3 + 5^3$

B. $\sqrt{7 + 29} < 2 \cdot 3 \cdot 6$

C. $\dfrac{\sqrt{30}}{\sqrt{5}} > \dfrac{\sqrt{56}}{\sqrt{8}}$

D. $(2 \cdot 3 \cdot 5)^3 > 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$

E. $\sqrt{16 \cdot 4} < \sqrt[3]{8 \cdot 8}$

12. Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $A \cap B = \{3, 6\}$, ¿cuál es el conjunto B?

A. {2, 3, 6, 8}

B. {1, 2, 4, 5}

C. {3, 4, 6, 9, 12}

D. {3, 6, 9, 12, 15}

E. {3, 9, 27, 81}

13. ¿Cuál de los siguientes números es racional?

A. $\sqrt{20}$

B. $\sqrt[4]{8}$

C. $\sqrt[3]{9}$

D. $\sqrt[3]{36}$

E. $\sqrt[4]{81}$

14. El triple de un número, aumentado en 17 es igual al doble de la diferencia entre el mismo número y 5. ¿Cuál es el número?

A. –61

B. –27

C. –22

D. 7

E. 12

15. Camilo tiene $ 11 720 en monedas de $ 10 y de $ 50. Si en total tiene 600 monedas, ¿cuántas son de $ 10?

A. 143

B. 234

C. 366

D. 457

E. 501

16. Si a es un número real, ¿cuál de los siguientes números siempre es mayor que a?

A. $-a$

B. a^2

C. $2a$

D. $a - 1$

E. $1 + a$

17. ¿Para qué valor de b, la solución de la ecuación $bx - 4 = 20$ es $x = 4$?

A. 4

B. 6

C. 16

D. 20

E. 24

18. La suma de dos números es igual a 16 y su diferencia es –4. ¿Cuál es el número menor?

A. –10

B. 4

C. 6

D. 10

E. 20

Revisa tus respuestas en el solucionario y marca las correctas.

Criterio	Ítems
Establecer relaciones de orden entre los números reales.	1, 2, 3, 11, 16
Representar conjuntos y realizar operaciones con conjuntos.	4, 5, 12, 13
Resolver ecuaciones de primer grado.	6, 9, 14, 17
Resolver sistemas de ecuaciones lineales.	7, 8, 10, 15, 18

Si tuviste errores, revisa las páginas 80 y 81 del Texto, aclara tus dudas y corrígelos antes de continuar.

Conjuntos

Aprenderé a: representar conjuntos numéricos por extensión y por comprensión.

Repaso

1. **Menciona algunos de los elementos que forman el conjunto de los números naturales.**

Laura le propone a Tomás que describa algunos conjuntos, sin mencionar cada una de las letras. Observa.

$A = \{a, e, i, o\ u\}$

$B = \{c, e, i, h, l\}$

$C = \{b, c, d, f, g, l, m, n, p, r, s, t, v, w\}$

- ¿Cómo crees tú que se pueden describir? Explica.

En cursos anteriores aprendiste que un conjunto es una colección de elementos que tienen una característica en común y que se puede definir escribiendo los elementos que lo conforman; por ejemplo, si queremos definir el conjunto A que le presentó Laura a Tomás, podemos escribir:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

Otra manera de definir el conjunto anterior consiste en describir la característica común que tienen los elementos del conjunto. En este caso, como todas las letras son vocales, nos queda:

$$A = \{\text{letras que son vocales}\}$$

En el primer caso, el conjunto está definido por **extensión** y en el segundo, por **comprensión**.

Los conjuntos numéricos también pueden definirse por extensión o por comprensión; por ejemplo, si queremos definir el conjunto D de todos los dígitos nos queda:

Por extensión: $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Por comprensión: $D = \{\text{dígitos}\}$

Los conjuntos numéricos también pueden definirse por comprensión, usando simbología matemática; por ejemplo, para definir el conjunto P de los números positivos pares, podemos escribir:

tal que

$$P = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \text{ es par}\}$$

Conjunto numérico al que pertenecen todos los elementos de P.

Característica común de todos los elementos de P.

El conjunto anterior se interpreta como "los elementos del conjunto P son todos los números pertenecientes a los números naturales tales que sean pares".

En la tabla de la derecha se muestran algunos símbolos matemáticos que se usan para definir conjuntos por comprensión; por ejemplo, el símbolo $\wedge$ significa "y", y se usa para indicar que se deben cumplir ambas condiciones; por ejemplo, el conjunto $P = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x$ es par $\wedge$ x es de una cifra$\}$ representa el conjunto de aquellos números enteros que son pares y que además, tienen una cifra, es decir: $P = \{-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}$

Símbolo	Se lee:
/ o :	Tal que
$\in$	Pertenece
$\wedge$	y
$\vee$	o
$=$	Igual que
$\neq$	Distinto que

Al representar conjuntos por comprensión debes fijarte en que todos los elementos que forman el conjunto cumplan las condiciones dadas y que no existan otros elementos que cumplan la condición y que no estén en el conjunto; por ejemplo, no es correcto describir el conjunto $A = \{2, 4, 6, 9\}$ por comprensión de la forma $A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x$ es par$\}$, ya que hay números naturales que cumplen la condición de ser pares pero que no pertenecen a A. Además, un elemento del conjunto A (el 9) no cumple con la condición de ser par.

¿Cómo hacerlo?

Escribe por extensión el conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x$ es divisor de 36$\}$.

Para escribir el conjunto por extensión, solo escribimos sus elementos separados por una coma. Los elementos de A son todos los números naturales que sean divisores de 36, es decir: $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$.

¿Cómo hacerlo?

Escribe por comprensión el conjunto $A = \{3, 6, 9, 12, 15, ...\}$.

Si te fijas, los elementos de A corresponden a los múltiplos positivos de 3. Luego: $A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x$ es múltiplo de 3$\}$

¿Cómo hacerlo?

Escribe por extensión y por comprensión el conjunto H de todos los números positivos que sean divisores de 24, o bien, que sean divisores de 18.

Los divisores de 24 son: $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

Los divisores de 18 son: $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

Luego, del enunciado se desprende que los elementos del conjunto H son todos los divisores positivos de 24 o de 18. Si te fijas, puede darse cualquiera de las dos condiciones. Finalmente, definimos el conjunto H:

por extensión: $H = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}$;

por comprensión: $H = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x$ es divisor de 24 $\vee$ x es divisor de 18$\}$

Utilizamos el símbolo $\vee$ para indicar que debe cumplirse una condición o la otra.

Tomo nota

- Un conjunto se puede definir:
  - por extensión, cuando los elementos del conjunto se escriben explícitamente; por ejemplo, el conjunto de todos los números naturales de dos cifras que comienzan con 3 es: $C = \{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39\}$;
  - por comprensión, cuando se describe una o más características comunes de todos los elementos que forman el conjunto; por ejemplo, el conjunto de todos los números naturales que son divisores de 24 y que son pares, se puede describir por comprensión como: $P = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x$ es divisor de 24 $\wedge$ x es par$\}$.

En cursos anteriores conociste algunas operaciones que se pueden realizar entre los conjuntos, como la unión o la intersección de ellos; por ejemplo, dados los conjuntos $P = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ y $Q = \{1, 2, 3, 5, 8, 13\}$, la unión de P y Q es el conjunto con todos los elementos que pertenecen a P, o bien a Q, es decir:

$$P \cup Q = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 11, 13\}$$

Por otra parte, la intersección de P y Q es el conjunto de todos aquellos elementos que pertenecen tanto a P como a Q, es decir:

$$P \cap Q = \{2, 3, 5\}$$

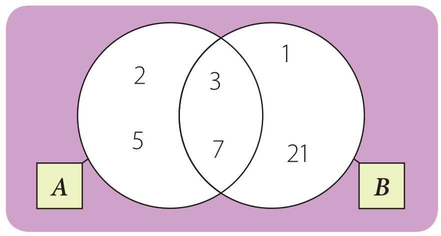
Para realizar operaciones con conjuntos definidos por comprensión, una estrategia consiste en escribirlos definidos por extensión y luego realizar la operación pedida. Por ejemplo, dados los conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x$ es un número primo de una cifra$\}$

$B = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x$ es un divisor de 21$\}$

Si queremos determinar los conjuntos $A \cup B$ y $A \cap B$, a simple vista no resultará muy sencillo pues no conocemos los elementos de A ni de B, de modo que podemos escribir ambos conjuntos por extensión y luego representarlos en un diagrama de Venn. Observa.

$A = \{2, 3, 5, 7\}$
$B = \{1, 3, 7, 21\}$



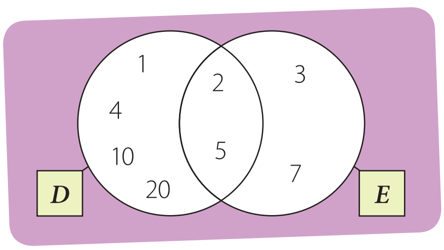
Luego, se tiene que $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 21\}$ y $A \cap B = \{3, 7\}$.

¿Cómo hacerlo?

Sean D y E dos conjuntos. Si $D = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x$ es divisor de 20$\}$, $D \cap E = \{2, 5\}$ y $D \cup E = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 20\}$, define el conjunto E por extensión y por comprensión.

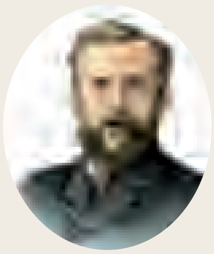
Primero, necesitamos reconocer el conjunto D por extensión. Luego, nos queda: $D = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

Luego, podemos representar la situación anterior usando un diagrama de Venn, como el de la izquierda.



Por lo tanto, $E = \{2, 3, 5, 7\}$. Para definir el conjunto E por comprensión, considera que todos los elementos de E son números primos de una cifra. Luego, podemos escribir: $E = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x$ es primo $\wedge\ x$ tiene una cifra$\}$.

Invitado especial



John Venn (1834-1923)

Fue un matemático y lógico británico que desarrolló los diagramas que llevan su nombre, para representar las operaciones entre conjuntos.

Tomo nota

- Para realizar operaciones con conjuntos que están definidos por comprensión, en muchos casos es conveniente escribir estos conjuntos definidos por extensión y luego realizar la operación pedida. También es conveniente representar, en ocasiones, los conjuntos mediante diagramas de Venn.

Actividades

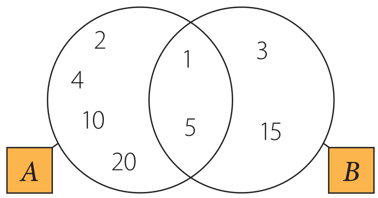
1. **Escribe por extensión los siguientes conjuntos.**
   a. $S = \{x \in \mathbb{N} \ / \ x \text{ es divisor de } 32\}$
   b. $T = \{x \in \mathbb{N} \ / \ x \text{ es múltiplo de } 5\}$
   c. $U = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x \text{ tiene 2 cifras} \wedge x \text{ termina en } 4\}$
   d. $V = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x \text{ es divisor de } 8 \vee x \text{ es divisor de } 12\}$
   e. $W = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x \text{ es primo} \wedge x \text{ es par}\}$

Desafío

Define por comprensión el conjunto:
$D = \{2, 10, 12, 16, 17, 18, 19\}$.

2. **Escribe por comprensión los siguientes conjuntos.**
   a. $O = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
   b. $P = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
   c. $Q = \{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$
   d. $R = \{1, 10, 100, 1\,000, 10\,000, 100\,000, ...\}$
   e. $S = \{1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91\}$
   f. $T = \{4, 6, 8, 9\}$

3. **Observa el diagrama de Venn y define, por extensión y por comprensión:**
   a. el conjunto A.
   b. el conjunto B.
   c. el conjunto $A \cup B$.
   d. el conjunto $A \cap B$.



4. **A partir de los conjuntos dados, realiza las siguientes operaciones.**

$A = \{x \in \mathbb{N} \ / \ x \text{ es divisor de } 20\}$
$B = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x \text{ es impar} \wedge x \text{ tiene una cifra}\}$
$C = \{-6, -3, -1, 1, 3, 6, 9\}$

   a. $A \cup B$
   b. $B \cap C$
   c. $C \cup A$
   d. $(A \cap B) \cup C$
   e. $(C \cup B) \cup A$
   f. $(B \cap A) \cup (C \cup B)$

5. **Dado el conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} \ / \ x \text{ es divisor de } 48\}$, determina, en cada caso, un conjunto B tal que se cumplan las condiciones indicadas.**
   a. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 48\}$
   b. $A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$
   c. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 16, 24, 40, 48\}$
   d. $A \cap B = \varnothing$

Antes de continuar

1. ¿Cuándo un conjunto está definido por extensión?, ¿cuándo lo está por comprensión? Da un ejemplo para cada caso.
2. ¿Cómo escribirías por extensión el conjunto de todos los números enteros de una cifra?, ¿cómo lo escribirías por comprensión?

Desigualdades

Aprenderé a: expresar información por medio de desigualdades.

Repaso

1. ¿Qué significa el signo $<$? Da un ejemplo.
2. Escribe 3 números enteros que superen a -4.

En la siguiente imagen se muestra la temperatura mínima y la máxima registrada en un día en Concepción.

- Utiliza alguno de los signos $<$, $>$, $\leqslant$ o $\geqslant$ para representar la relación de orden que hay entre los números correspondientes a las temperaturas mínima y máxima.
- Si ese día, a las 10 de la mañana la temperatura registrada era t, utiliza algunos de los signos $<$, $>$, $\leqslant$ o $\geqslant$ para representar la relación de orden que hay entre t y las temperaturas mínima y máxima.

En la vida diaria hay situaciones en las que se comparan cantidades que no necesariamente son iguales; por ejemplo, en el problema anterior, las temperaturas mínima y máxima no son iguales, o la temperatura registrada a las 10 de la mañana no es igual a la mínima ni tampoco a la máxima, sino que se encuentra entre ellas.

Las expresiones matemáticas que escribiste en el problema anterior se llaman **desigualdades** y las puedes utilizar para indicar que cierta cantidad es mayor, menor, mayor o igual, o menor o igual que otra. Para escribir una desigualdad puedes utilizar alguno de los signos $>$, $<$, $\geqslant$ o $\leqslant$, respectivamente.

Atención

Dados dos números reales a y b, se cumple una y solo una de las siguientes relaciones:

$a < b \qquad a = b \qquad a > b$

A esta propiedad se le llama propiedad de **tricotomía**.

¿Cómo hacerlo?

Representa las siguientes situaciones utilizando una desigualdad.

- El precio de la entrada supera los \$ 3 500.

Si llamamos p al precio de la entrada, tenemos que p debe ser mayor que \$ 3 500, por lo tanto $p > 3\,500$.

- La ganancia de Pedro por su trabajo no fue menor que \$ 12 000.

Si la ganancia de Pedro no fue menor que \$ 12 000, significa que fue igual o mayor que ese valor. Luego, llamando g a la ganancia, nos queda $g \geqslant 12\,000$.

¿Cómo hacerlo?

¿Es correcta la desigualdad $(3 - 1)^2 < 3^2 - 1^2$?

La desigualdad anterior se puede verificar calculando el valor en cada lado, es decir:

$(3 - 1)^2 < 3^2 - 1^2$ Realizamos las operaciones a ambos lados de la desigualdad.

$2^2 < 9 - 1$

$4 < 8$

Por lo tanto, la desigualdad es verdadera.

Tomo nota

- Se denomina **desigualdad** a toda relación de orden que se establece entre números reales u otras expresiones matemáticas, mediante la comparación “menor que” (<), “menor o igual que” (⩽), “mayor que” (>) o “mayor o igual que” (⩾).
- Una desigualdad es verdadera si la relación establecida se cumple. Para verificarla, se puede calcular el valor de las expresiones a ambos lados de la desigualdad, si fuera necesario.

Actividades

1. Expresa la información de las siguientes situaciones utilizando desigualdades.

a. Para un índice de radiación ultravioleta igual a 10, las personas de piel más sensible (aquellas que se queman con facilidad) no deben exponerse al sol sin protección más de 18 minutos.

b. Una recomendación general es utilizar un protector solar con factor de protección 15 o mayor.

c. CONEXIÓN CON EL MEDIOAMBIENTE ▶ Se considera que la calidad del aire es "regular" si el índice de calidad del aire por material particulado (ICAP) es superior a 100 y menor o igual a 200.

d. CONEXIÓN CON LA BIOLOGÍA ▶ En un examen que mide la cantidad de glucosa en la sangre de una persona adulta, se consideran normales los valores que van de 64 a 110 mg/dL (miligramos por decilitro).

e. La nota n de Pedro no alcanzó el 6,0.

f. CONEXIÓN CON LA FÍSICA ▶ La longitud de onda de la luz visible es superior a 380 nm y menor o igual a 780 nm.

2. Inventa una frase que se pueda modelar con cada una de las siguientes desigualdades.

a. $r < 6$

b. $230 \geqslant s$

c. $p \leqslant 5{,}5$

d. $3l > 2\,500$

e. $a + b < 132$

f. $m < n - 15$

3. Determina si las siguientes desigualdades son verdaderas o falsas.

a. $108 \cdot 544 < 32 \cdot 51 \cdot 36$

b. $(100 + 23) \cdot (100 - 23) \leqslant 2 \cdot 100^2 + 4\,600$

c. $t^6 + 12 \geqslant 0$, con $t = -1$.

d. $\dfrac{(7+2)^2}{2^2} \geqslant 7$

e. $\dfrac{2 \cdot 3 \cdot 5}{3 + 5} < \sqrt{3 \cdot 5}$

f. $\dfrac{1{,}08 + 0{,}03}{0{,}001} < 1$

g. $(-193)^2 \geqslant 193^2$

4. Estima el valor de las raíces y determina cuáles de las siguientes desigualdades son verdaderas y cuáles son falsas. Justifica las falsas.

a. $2^3\sqrt{30} > 4\sqrt{2}$

b. $\sqrt{144} < 5^3\sqrt{10}$

c. $\dfrac{\sqrt[3]{125}}{8} < 1$

d. $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} > \dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$

5. En un triángulo, la medida de uno de sus lados es siempre menor que la suma de las medidas de los otros dos, y mayor que su diferencia. Expresa con una desigualdad el rango de valores posibles para la medida del tercer lado, si los otros dos miden 6 cm y 19 cm, respectivamente.

No existe una única manera para definir un conjunto. Fíjate que el conjunto A también se puede definir como: $A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \leqslant 999\}$.

Como las desigualdades expresan relaciones entre los números, al definir conjuntos por comprensión resulta útil usar las desigualdades; por ejemplo, si queremos definir el conjunto de todos los números naturales menores que 1 000, resultará largo escribir dicho conjunto por extensión, de modo que lo podemos escribir por comprensión de la siguiente manera:

$$A = \{x \in \mathbb{N} / x < 1\,000\}$$

En algunos casos, al definir un conjunto por comprensión podemos usar más de una desigualdad; por ejemplo, para expresar por comprensión el conjunto de todos los números enteros que se encuentran entre –4 y 7, ambos incluidos, podemos escribir:

$$B = \{x \in \mathbb{Z} / -4 \leqslant x \leqslant 7\}$$

En el caso anterior, la expresión $-4 \leqslant x \leqslant 7$ es equivalente a escribir las desigualdades $-4 \leqslant x$ y $x \leqslant 7$.

¿Cómo hacerlo?

Representa por comprensión el conjunto $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$.

Si te fijas, los elementos del conjunto son números primos menores o iguales que 29. Luego, lo podemos definir por comprensión de la siguiente manera:

$B = \{x \,/\, x \text{ es primo} \wedge x \leqslant 29\}$

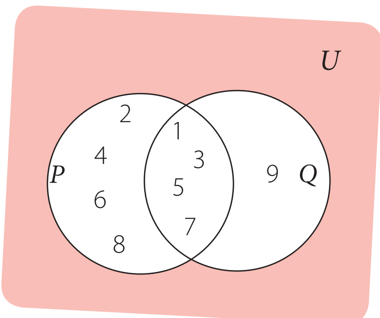
¿Cómo hacerlo?

Representa por extensión el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, -5 < x \leqslant 4\}$.

Los elementos del conjunto A son todos aquellos números enteros mayores que –5 y menores o iguales que 4. Luego, al definirlo por extensión nos queda:

$B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

¿Cómo hacerlo?



Dados los conjuntos $P = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \leqslant 8\}$ y $Q = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, determina $P \cup Q$ y $P \cap Q$.

Podemos definir el conjunto P por extensión, ya que sus elementos son los números naturales menores o iguales que 8, es decir: $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Luego, $P \cup Q$ contiene a todos los elementos que están en P o en Q, es decir: $P \cup Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Por otra parte, $P \cap Q$ contiene a todos los elementos que están en P y Q simultáneamente, es decir: $P \cap Q = \{1, 3, 5, 7\}$

Tomo nota

- También se pueden usar desigualdades para representar conjuntos por comprensión; por ejemplo:

tal que

$$P = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 2 < x \leqslant 8\}$$

x pertenece al conjunto de los números naturales.

x es mayor que 2 y menor o igual que 8.

Actividades

1. **Escribe por extensión los siguientes conjuntos.**
   a. $C = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x < 12\}$
   b. $D = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \geqslant 6\}$
   c. $E = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, -2 < x < 9\}$
   d. $F = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x \text{ es primo} \wedge x < 20\}$
   e. $G = \{x \in \mathbb{N} \,/\, -7{,}5 < x < 6\}$

2. **Escribe por comprensión los siguientes conjuntos.**
   a. $R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
   b. $S = \{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$
   c. $T = \{-5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9\}$
   d. $U = \{18, 24, 30, 36, 42, 48, ...\}$
   e. $V = \{6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
   f. $W = \{13, 17, 19, 23, 29, 31, 37\}$

3. **Observa los siguientes conjuntos.**
   $\boldsymbol{P = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, -5 \leqslant x < 8\}}$
   $\boldsymbol{Q = \{-4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}}$
   $\boldsymbol{R = \{x \in \mathbb{N} \,/\, -8 < x \leqslant 4\}}$

   Usando los conjuntos anteriores, realiza las operaciones dadas, en cada caso.
   a. $P \cap Q$
   b. $R \cup P$
   c. $(P \cap R) \cup Q$
   d. $(Q \cup R) \cup P$
   e. $(P \cap Q) \cap R$
   f. $(P \cap R) \cup (Q \cup R)$

4. **Usando desigualdades, representa por comprensión los siguientes conjuntos.**
   a. Números enteros mayores que –81 y menores o iguales que 19.
   b. Números pares que se encuentran entre –50 y 160, ambos incluidos.
   c. Números impares que se encuentran entre 20 y su opuesto, sin incluirlos.
   d. Números positivos compuestos no superiores que 88.

Desafío

Sea el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x \text{ tiene una cifra}\}$. Redefine el conjunto A por comprensión, usando desigualdades, de dos maneras diferentes.

Antes de continuar

1. ¿Cuándo una desigualdad es verdadera?
2. ¿Cómo representarías con desigualdades la situación: "el valor de la bebida no es inferior a \$650"? Explica tu respuesta.
3. ¿Cómo representarías por comprensión el conjunto $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$? Explica.

Intervalos de números reales

Aprenderé a: representar conjuntos de números reales utilizando intervalos y realizar operaciones con intervalos.

Repaso

1. Menciona 10 números reales que se encuentren entre 1,2 y 1,4.
2. ¿Cuántos números reales hay entre dos números reales dados?

Si queremos determinar todos los números enteros que cumplen la condición $-3 \leqslant n < 5$, podemos escribir el conjunto correspondiente, esto es:

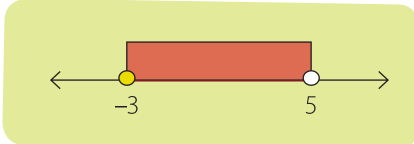
$$\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

- Ahora, ¿cómo podrías representar por extensión todos los números reales que cumplen la condición $-3 \leqslant x < 5$? Argumenta tu respuesta.

Seguramente te diste cuenta de que escribir por extensión todos los números reales tales que cumplan $-3 \leqslant x < 5$ sería imposible, porque hay infinitos números. Pero existe otra manera de representar este tipo de conjuntos: usando **intervalos de números reales**.

En este caso, el conjunto se representa $[-3, 5[$. Se dice que es **cerrado** en el -3, porque el conjunto incluye ese número, y **abierto** en el 5, porque no lo incluye.

Otra forma de representar este intervalo es gráficamente en la recta real, tal como se muestra en la figura de la derecha. Observa que en el valor -3 hay un círculo pintado; esto es porque el intervalo incluye este valor. En el caso de que no lo incluya, como en el 5, se dibuja un círculo blanco.



Atención

La orientación de los corchetes nos indica si los extremos del intervalo forman parte del conjunto o no; por ejemplo:

]–1, 10[representa a todos los números n que cumplen:

$$-1 < n < 10$$

[–1, 10] representa a todos los números n que cumplen:

$$-1 \leqslant n \leqslant 10$$

$[5, +\infty[$ representa a todos los números n que cumplen $5 \leqslant n$.

¿Cómo hacerlo?

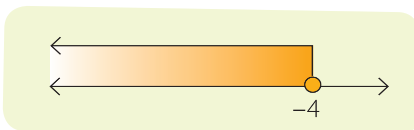
Representa como un intervalo el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \,/\, 1{,}25 < x \leqslant 4{,}8\}$.

Para expresar el conjunto anterior como intervalo escribimos los números correspondientes a los extremos del intervalo, separados por una coma (o punto y coma) y un espacio, y decidimos la orientación de los corchetes, según si el intervalo es abierto o cerrado, en cada caso.

Luego, el intervalo es $]1{,}25; 4{,}8]$, y su representación gráfica es la que se muestra en la imagen de la izquierda.

¿Cómo hacerlo?

Respecto de la siguiente figura, ¿qué elementos están representados? Exprésalos como un conjunto, por comprensión, y utilizando notación de intervalos.



Para expresar la representación gráfica como conjunto, identificamos los números que están identificados en la recta numérica. En este caso, corresponde a todos los números menores que -4. Luego, como conjunto se escribe $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leqslant -4\}$ y como intervalo, $]-\infty, -4]$,porque incluye al -4.

Tomo nota

- El conjunto de números reales que se encuentran entre otros dos números dados se puede representar mediante intervalos, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$.

Tipo de intervalo	Notación	Conjunto	Representación gráfica
Cerrado	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$	
Abierto	$]a, b[$	$\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$	
Semiabierto	$[a, b[$	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$	
	$]a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$	
No acotados o infinitos	$[a, +\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$	
	$]a, +\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} / x > a\}$	
	$]-\infty, b]$	$\{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$	
	$]-\infty, b[$	$\{x \in \mathbb{R} / x < b\}$	

Actividades

1. Encuentra tres números que pertenezcan a cada uno de los intervalos dados.

a. $]0, 1[$
b. $]\pi, 4]$
c. $]1{,}41, \sqrt{2}[$
d. $]0, 0{,}1[$
e. $]\sqrt{2}, \sqrt{3}[$
f. $]-0{,}001, 0[$

2. Expresa como intervalo y representa gráficamente los siguientes conjuntos.

a. $\{x \in \mathbb{R} / -\sqrt{3} < x\}$
b. $\{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{5} < x \leqslant 1{,}33\}$
c. $\{x \in \mathbb{R} / 0 < x \leqslant 0{,}5\}$
d. $\{x \in \mathbb{R} / x \leqslant -3\}$
e. $\{x \in \mathbb{R} / -12 \leqslant x \leqslant 5{,}8\}$
f. $\left\{x \in \mathbb{R} / x > \frac{4}{5}\right\}$

3. Considera los siguientes números: 0, π, $\sqrt{2}$ y $\frac{3}{4}$.

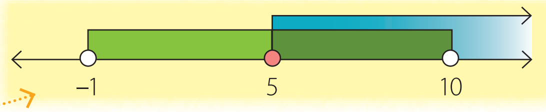
a. Encuentra un intervalo que contenga todos estos números.
b. Encuentra un intervalo que no contenga ninguno de ellos.
c. Para cada número, encuentra un intervalo cerrado que lo contenga y cuyos extremos sean números enteros consecutivos.

De la misma manera que pueden realizarse operaciones entre conjuntos, tales como su unión y su intersección, estas operaciones pueden extenderse a los intervalos, ya que, por definición, los intervalos son conjuntos de números reales.

En particular, nos concentraremos en la unión y la intersección de intervalos de números reales; por ejemplo, si tenemos los intervalos $A =]-1, 10[$ y $B = [5, +\infty[$ podemos determinar la unión $A \cup B$, considerando tanto los números que están entre –1 y 10, ambos no incluidos, como los que son mayores o iguales que 5.

En muchos casos, una buena alternativa para resolver un problema es representar la situación con un dibujo.

Observa la representación gráfica de ambos conjuntos:



En la figura anterior, representamos con color verde el conjunto A, y con azul el conjunto B. Entonces, para determinar $A \cup B$ debemos incluir todos los valores de la recta que quedaron pintados, ya sea con verde por pertenecer a A, o con azul por pertenecer a B. Finalmente podemos concluir que $A \cup B =]-1, +\infty[$.

Por otra parte, podemos determinar la intersección $A \cap B$, que corresponde a los números que pertenecen a A y B simultáneamente. En la figura anterior, $A \cap B$ son los valores de la recta que quedaron coloreados con verde y azul, es decir, $A \cap B = [5, 10[$.

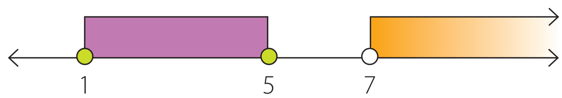
¿Lo entiendes?

En el ejemplo, el número 5, ¿forma parte de $A \cap B$?, ¿y el 10?, ¿por qué?

¿Cómo hacerlo?

Considera los intervalos $C = [1, 5]$ y $D =]7, +\infty[$. Determina $C \cap D$ y $C \cup D$.

Observa la representación gráfica de los intervalos C y D:



Atención

Si al intersecar dos intervalos no existen elementos comunes a ambos, entonces el resultado es un conjunto sin elementos, llamado **conjunto vacío**, y se representa por el símbolo $\varnothing$.

Para determinar el conjunto intersección $C \cap D$, debemos observar cuáles son los elementos en común en ambos intervalos. Pero, en este caso, los conjuntos no tienen elementos en común. Esta situación la podemos verificar al observar que el mayor valor que pertenece al intervalo C es menor que el menor valor perteneciente al intervalo D; luego, no hay intersección, y decimos que $C \cap D = \varnothing$.

Por otra parte, para determinar el conjunto unión, observamos que no es posible expresar la unión de ellos como un único intervalo, porque no tienen elementos en común.

Cuando esto sucede, solo lo representamos como $C \cup D = [1, 5] \cup]7, +\infty[$.

Tomo nota

- Si se tienen dos intervalos A y B de números reales:
  - la unión entre A y B ($A \cup B$) es otro intervalo que contiene todos los elementos de A y todos los elementos de B;
  - la intersección entre A y B ($A \cap B$) es otro intervalo que contiene los elementos que están en A y que también están en B. Si A y B no tienen elementos en común, la intersección entre A y B es el conjunto vacío, $\varnothing$.

Actividades

1. Determina las siguientes uniones e intersecciones de intervalos. Expresa tu resultado como intervalo y represéntalo gráficamente en la recta real.

a. $[2, 5[\cup]3, 18[$

b. $]-5, 1] \cap]1, 7[$

c. $\left[-\frac{7}{4}, \frac{5}{3}\right] \cup \left]0, +\infty\right[$

d. $\left[-\frac{7}{4}, \frac{5}{3}\right] \cap \left]0, +\infty\right[$

e. $[0, 1[\cap (]-3, 1[\cap [0, 5])$

f. $(]-\infty, 2[\cap [12, +\infty[) \cup [0, 20]$

Desafío

a. Escribe dos intervalos cuya intersección sea igual a un conjunto que tenga un elemento.

b. Escribe dos intervalos cuya unión sea igual al conjunto de los números reales.

2. Escribe una unión o intersección de intervalos cuyo conjunto solución esté representado en las siguientes figuras.

a.


b.


c.


d.


3. Dados los intervalos $A =]-\infty, 1[$, $B =]-3, 7]$, $C =]-4, 9[$ y $D = [7, +\infty[$, determina:

a. $A \cup B$

b. $A \cup D$

c. $B \cap C$

d. $(B \cap D) \cup C$

e. $(A \cap B) \cup (C \cap D)$

f. $(A \cup C) \cap (B \cup D)$

4. Responde las siguientes preguntas.

a. ¿Con qué intervalo representarías el conjunto de los números reales positivos?, ¿y el de los números reales negativos?

b. ¿Puedes representar el conjunto de los números naturales por medio de un intervalo? Justifica tu respuesta.

Antes de continuar

1. ¿Para qué sirven los intervalos de números reales?
2. ¿En qué se diferencian los intervalos $[3, 9]$ y $]3, 9[$?

Propiedades de las desigualdades

Aprenderé a: conocer y utilizar las propiedades de las desigualdades.

Tres amigos, Bruno, Gustavo y Tomás, tienen música en sus celulares. Gustavo tiene menos canciones que Bruno y Tomás tiene más canciones que Bruno.

- ¿Quién tiene más canciones en su celular: Tomás o Gustavo?, ¿cómo lo supiste?

Repaso

Observa la siguiente balanza.

1. Si a ambos lados se agregan 5 kg, ¿cambia la inclinación de la balanza?, Comenta con un compañero.

Casos como el del problema anterior también los podemos resolver utilizando algunas propiedades que tienen las desigualdades. Observa.

Si representamos como g, b y t la cantidad de canciones que tienen Gustavo, Bruno y Tomás, respectivamente, podemos modelar la situación usando desigualdades, al escribir: $g < b$ y $b < t$, Luego, se cumple que: $g < b < t$.

Finalmente, podemos concluir que $g < t$, es decir, Gustavo tiene menos canciones que Tomás, o bien, Tomás tiene más canciones que Gustavo.

La propiedad anterior se denomina **transitividad**.

Ahora, si Tomás agrega 5 canciones más a su colección y Gustavo también agrega 5 canciones a su colección, ¿seguirá Tomás teniendo más canciones que Gustavo?

La respuesta es correcta, ya que ambos agregaron la misma cantidad de canciones, por lo tanto, Tomás seguirá teniendo más. Lo mismo ocurriría si ambos jóvenes eliminaran la misma cantidad de canciones.

Por lo tanto, si a ambos lados de una desigualdad se suma o resta un mismo número, la desigualdad se mantiene. Esta propiedad la podemos verificar con algunos ejemplos. Observa.

$3 < 7$ ········ Sumamos 5 a cada lado de la desigualdad.
$3 + 5 \ ? \ 7 + 5$ ········ Calculamos las sumas y verificamos el signo de la desigualdad.
$8 < 12$

Si te fijas, pese a sumar 5 a ambos lados de la desigualdad, el sentido de ésta no cambió. En el caso de la sustracción ocurre algo similar:

$3 < 7$ ········ Restamos 6 a cada lado de la desigualdad.
$3 - 6 \ ? \ 7 - 6$ ········ Calculamos las restas y verificamos el signo de la desigualdad.
$-3 < 1$

Tomo nota

- Propiedad de transitividad:
  Si a, b y c son números reales y se cumple que $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.
- El sentido de una desigualdad no cambia si se suma o resta un mismo número real a ambos lados de la desigualdad. Es decir:
  - si $a < b$, y $c \in \mathbb{R}$, entonces, $a + c < b + c$;
  - si $a < b$, y $c \in \mathbb{R}$, entonces $a - c < b - c$.

Ya vimos lo que ocurre si sumamos o restamos un número real a ambos lados de la desigualdad. Pero, ¿qué crees que sucede si multiplicamos o dividimos una desigualdad por un número real?

Para responder la pregunta anterior debemos considerar si multiplicamos la desigualdad por un número real positivo o negativo; por ejemplo, observa lo que sucede si multiplicamos por un número real positivo:

$4 < 6$ Multiplicamos por 5.

$4 \cdot 5 \, ? \, 6 \cdot 5$ Calculamos los productos y verificamos el signo de la desigualdad.

$20 < 30$

Si te fijas, el sentido de la desigualdad no cambia si multiplicamos ambos lados por un número real positivo. En el caso de la división sucede lo mismo; por ejemplo:

$36 > 24$ Dividimos por 12.

$\frac{36}{12} \, ? \, \frac{24}{12}$ Calculamos los cocientes y verificamos el signo de la desigualdad.

$3 > 2$

Ahora veamos qué ocurre si multiplicamos o dividimos ambos lados de una desigualdad por un número real negativo. Observa.

$2 < 4$ Multiplicamos por –3.

$2 \cdot (-3) \, ? \, 4 \cdot (-3)$ Calculamos los productos y verificamos el signo de la desigualdad.

$-6 > -12$

En el caso anterior, ocurrió que al multiplicar ambos lados de la desigualdad por un número negativo el sentido de la desigualdad cambió. En la división sucede algo similar, es decir, si ambos lados de una desigualdad se divide por un número negativo, el sentido de la desigualdad cambia; por ejemplo:

$-20 < 28$ Dividimos por –4.

$\frac{-20}{-4} \, ? \, \frac{28}{-4}$ Calculamos los cocientes y verificamos el signo de la desigualdad.

$5 > -7$

En general, si multiplicamos o dividimos ambos lados de una desigualdad por un mismo número real negativo, el sentido de esta se invierte.

Tomo nota

- El sentido de una desigualdad **no cambia** si se multiplica o divide un mismo **número real positivo** a ambos lados de la desigualdad. Es decir:
  - si $a < b$, y $c \in \mathbb{R}^+$, entonces $ac < bc$;
  - si $a < b$, y $c \in \mathbb{R}^+$, entonces $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
- El sentido de una desigualdad **cambia** si se multiplica o divide un mismo **número real negativo** a ambos lados de la desigualdad. Es decir:
  - si $a < b$, y $c \in \mathbb{R}^-$, entonces $ac > bc$;
  - si $a < b$, y $c \in \mathbb{R}^-$, entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Podemos aplicar las propiedades anteriores en diversas situaciones en las que intervienen desigualdades, por ejemplo, si queremos viajar a algún lugar muy lejano es importante saber la temperatura que hay en ese lugar, para saber si es necesario llevar ropa abrigada o no. El problema es que dependiendo del lugar, la temperatura se mide con diferentes escalas; por ejemplo, en Chile la temperatura se mide en grados Celsius (ºC), mientras que en otros países, como Estados Unidos se mide en grados Fahrenheit (ºF). La relación entre estas dos escalas está dada por la expresión $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, donde C es la temperatura expresada en grados Celsius y F, en grados Fahrenheit.

Pronóstico del tiempo en la ciudad del partido

Mín: 30 ºF

Máx: 41 ºF

Considera la siguiente situación: los integrantes de la selección chilena de fútbol viajarán a Estados Unidos a jugar un partido con la selección de ese país. El pronóstico del tiempo para el día del viaje es el indicado en la tabla de la izquierda. ¿Crees que deban llevar ropa abrigada?, ¿por qué?

Dado que en Chile estamos acostumbrados a medir las temperaturas usando grados Celsius, a primera vista nos será difícil decidir si ese día en Estados Unidos será caluroso o no, ya que las temperaturas están expresadas en grados Fahrenheit. Sin embargo, podemos usar las propiedades de las desigualdades para transformar las temperaturas descritas en ºF a ºC. Observa.

Podemos representar la variación de la temperatura en el día, entre 30 ºF y 41 ºF, como $30 \leqslant F \leqslant 41$.

Para representar esta variación de temperatura en grados Celsius, podemos basarnos en la expresión $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, que muestra la relación entre ºC y ºF. Observa.

$30 \leqslant F \leqslant 41$ ········ Restamos 32.

$-2 \leqslant F - 32 \leqslant 9$ ········ Multiplicamos por $\frac{5}{9}$.

$-1{,}1 \leqslant \frac{5}{9}(F - 32) \leqslant 5$ ········ Remplazamos según la expresión $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

$-1{,}1 \leqslant C \leqslant 5$

Lo anterior indica que la temperatura pronosticada para ese día en el lugar del partido será entre –1,1 ºC y 5 ºC.

Por lo tanto, los jugadores deben llevar ropa muy abrigada.

¿Cómo hacerlo?

Sea a un número positivo comprendido entre 0 y 1, es decir, $0 < a < 1$. ¿Entre qué valores se encuentra la expresión $1 - a$?

Partimos por la condición inicial:

$0 < a < 1$ ········ Multiplicamos por –1, por lo que las desigualdades se invierten.

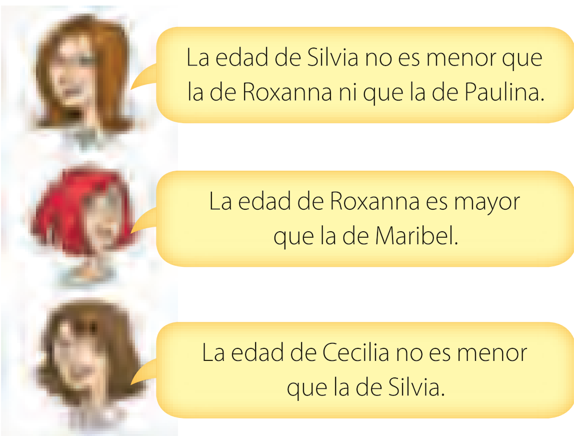
$0 > -a > -1$ ········ Sumamos 1.

$1 > 1 - a > 0$

Si reescribimos la desigualdad en el otro orden, tenemos $0 < 1 - a < 1$. Luego, si a es un número positivo menor que 1, entonces la expresión $1 - a$ se encuentra entre 0 y 1.

Actividades

1. **Si un número varía entre –6 y 8, ¿entre qué valores varía su opuesto, disminuido en 9?**
2. **Si un número se encuentra entre 10 y 20, ¿entre qué valores se hallará el cuádruple de tal número, disminuido en 6?**
3. **Sea x un número positivo tal que $0 < x < 3$. ¿Entre qué valores se encuentra la expresión $1 - \frac{3x}{2}$?**
4. **Si el lado de un cuadrado varía entre 4 cm y 8 cm, ¿entre qué valores varía su perímetro?, ¿y su área aumentada en 2?**
5. **Considera la expresión $H = 2t^2 - 15t + 28$. Usando las propiedades de las desigualdades, demuestra que si $5 \leqslant t \leqslant 9$, entonces $3 \leqslant H \leqslant 55$.**
6. CONEXIÓN CON LA CIENCIA ▶ **Una escala de temperatura muy utilizada por los científicos es la escala Kelvin (K). La relación entre la temperatura en grados Fahrenheit y Kelvin se puede representar por medio de la expresión $F = 1{,}8K - 459{,}67$, donde F es la temperatura medida en grados Fahrenheit y K, en Kelvin.**
   a. Si el agua permanece en estado líquido entre los 273,15 K y los 373,15 K, ¿cuál es esta variación si se mide en grados Fahrenheit?
   b. ¿Entre qué temperaturas el agua permanece líquida si se mide en grados Celsius? Utiliza la expresión que relaciona las temperaturas en grados Celsius y Fahrenheit de la página anterior.
   c. Un día, la temperatura mínima en Miami fue de 62 ºF, mientras que la máxima llegó a 75 ºF. ¿Cuál es esta variación de temperatura si se mide en Kelvin?
7. **Se sabe que $u + 1 < v < 0$. Ordena los números $\frac{u+2}{v-1}$ y $\frac{v+1}{u}$ de menor a mayor.**
8. **Lee las siguientes afirmaciones y, luego, responde.**



Determina si las afirmaciones son verdaderas o falsas.

a. La edad de Cecilia es menor que la de Maribel.
b. La edad de Cecilia no es mayor que la de Roxanna.
c. La edad de Maribel no es mayor que la de Silvia.

Desafío

EN PAREJAS ▶ A partir de la situación de la actividad 8, discute con un compañero.

a. ¿Podría Silvia tener la misma edad que Paulina?, ¿por qué?
b. ¿Podría Maribel tener la misma edad de Silvia?, ¿por qué?

EN GRUPO ▶ Reúnete con 2 compañeros y discutan las siguientes preguntas.

a. Si Cecilia y Paulina tienen la misma edad, ¿podría Cecilia tener la misma edad que Silvia?, ¿por qué?
b. Si Cecilia y Paulina tienen la misma edad, ¿es verdad que Maribel es la menor?, ¿por qué?

Las propiedades de las desigualdades también se pueden utilizar para realizar demostraciones matemáticas. Observa.

b	$\frac{1}{b}$	$b+\frac{1}{b}$
5	0,2	5,2
2,5	0,4	2,9
2	0,5	2,5
1,5	$0,\overline{6}$	$2,1\overline{6}$
1	1	2
0,8	1,25	2,05
0,5	2	2,5

En la tabla de la izquierda asignamos distintos valores positivos a b y registramos la suma de este número con su recíproco. Si te fijas, al parecer el resultado de $b+\frac{1}{b}$ es mayor o igual que 2 para cualquier valor positivo que asignemos a b. Por lo tanto, podemos suponer que si $b > 0$, se cumple la siguiente desigualdad:

$$b+\frac{1}{b} \geqslant 2$$

En este caso propusimos una conjetura, la cual es una afirmación que suponemos cierta. Sin embargo, es imposible verificar que esta desigualdad se cumple para todos los posibles valores de b. De modo que debemos demostrarla de manera general, utilizando las propiedades de las desigualdades que aprendiste en las páginas anteriores.

Para hacer tal demostración, partiremos de nuestra conjetura y usaremos las propiedades de las desigualdades hasta llegar a otra desigualdad que sea cierta:

$$b+\frac{1}{b} \geqslant 2$$

Multiplicamos por el número positivo b.

$$b^2+1 \geqslant 2b$$

Restamos $2b$.

$$b^2-2b+1 \geqslant 0$$

Factorizamos.

$$(b-1)^2 \geqslant 0$$

Desarrollamos el cuadrado de binomio.

Sumamos $2b$.

Dividimos por el número positivo b.

Sabemos que la última desigualdad es cierta pues el cuadrado de un número siempre es mayor o igual que 0. Luego, si partimos por la última desigualdad y realizamos el proceso inverso, es decir, efectuando las operaciones indicadas en el lado izquierdo, llegaremos a nuestra conjetura. Luego, hemos demostrado que $b+\frac{1}{b} \geqslant 2$ para todo b positivo.

¿Cómo hacerlo?

Demuestra que $\frac{1}{2}(a^2+b^2) \geqslant ab$ para todos los valores reales de a y b.

Partimos por una expresión que sabemos cierta:

$(a-b)^2 \geqslant 0$ .... Desarrollamos el cuadrado de binomio.

$a^2-2ab+b^2 \geqslant 0$ .... Sumamos $2ab$.

$a^2+b^2 \geqslant 2ab$ .... Dividimos por 2.

$\frac{1}{2}(a^2+b^2) \geqslant ab$

Por lo tanto, la conjetura es válida para todos los valores reales de a y b.

Esta desigualdad siempre se cumple, pues el cuadrado de todo número real siempre es positivo o cero.

Tomo nota

- Una **conjetura** es una afirmación que se supone cierta pero que aún no ha sido demostrada.
- Para demostrar una conjetura en la que hay una desigualdad es necesario partir con una afirmación verdadera y luego utilizar las propiedades de las desigualdades para transformar la afirmación inicial en otras expresiones, hasta llegar a la conjetura que queremos demostrar.

Actividades

1. **Lee con atención la demostración de la propiedad $b + \frac{1}{b} \geqslant 2$ para todo b positivo, de la página anterior. ¿En qué parte del razonamiento fue importante el hecho de que b fuese un número positivo?**
2. **Demuestra que $\frac{a}{5b} + \frac{5b}{4a} \geqslant 1$ si $a < 0$ y $b < 0$.**
   a. ¿En qué casos se verifica la igualdad?
   b. ¿Qué sucede con la desigualdad para $a > 0$ y $b > 0$?
3. **Para todos los valores de x en la siguiente tabla, tenemos que $0 < x < 1$.**

x	0,95	0,80	0,65	0,20	0,10	0,01
x^2						

   a. Completa la tabla en tu cuaderno.
   b. Compara los valores de x y x^2. ¿Qué relación de orden se da entre ellos?, ¿ocurre lo mismo si $x \leqslant -1$ o $x \geqslant 1$?
   c. A partir de lo anterior, completa la siguiente conjetura: si $0 < x < 1$, entonces: ____________
   d. Demuestra la conjetura que propusiste.
4. **Si $a > 0$ y $b > 0$, demuestra que $a + b > \frac{a^2 + b^2}{a + b}$.**

Desafío

Demuestra que el cuadrado de la suma de las medidas de los catetos de un triángulo rectángulo nunca excede el doble del cuadrado de la medida de la hipotenusa.

Antes de continuar

1. ¿Qué ocurre con el sentido de una desigualdad si se le resta a ambos lados un número real?
2. ¿Qué operación u operaciones hay que realizar a ambos lados de una desigualdad para que cambie el sentido de esta?
3. ¿Cómo se puede demostrar una conjetura?

Practico

Resuelve las siguientes actividades para consolidar los conceptos y los procedimientos que has aprendido.

1. **Determina si las siguientes desigualdades son verdaderas o falsas. Justifica las falsas.**
   a. $2 \cdot 7 > (2 + 1) \cdot (7 - 1)$
   b. $3^2 > 2^3$
   c. $4^2 > 4 \cdot 3$
   d. $(10 + 4)(10 - 4) \leqslant 10^2 - 4^2$
   e. $(5 + 6)^2 > 5^2 + 6^2$
   f. $\sqrt[3]{18} < \sqrt{10}$

2. **Determina si las expresiones siguientes son verdaderas o falsas. Justifica las falsas.**
   a. El sentido de una desigualdad se invierte si se suma o resta un mismo número real negativo en ambos lados de la desigualdad.
   b. El sentido de una desigualdad se invierte si se multiplica o divide por un mismo número real negativo a ambos miembros de la desigualdad.

3. **Define los siguientes conjuntos por comprensión, a partir de la característica en común que tengan sus elementos.**
   a. I = {lápiz, goma, sacapuntas, regla}
   b. M = {visión, audición, tacto, gusto, olfato}
   c. N = {automóvil, camión, bus, avión}
   d. O = {metro, litro, gramo, segundo}

4. **Determina si los siguientes conjuntos están definidos por extensión o por comprensión. Explica el por qué.**
   a. $A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x$ es múltiplo de $3\}$
   b. $T = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, ...\}$
   c. $P = \{y \in \mathbb{N} \,/\, y$ es divisor de $27\}$
   d. $O = \{3, 9, 15, 21, 27...\}$
   e. $Q = \{q \in \mathbb{Z} \,/\, q$ es impar $\wedge$ q es divisor de $24\}$
   f. $B = \{d \in \mathbb{N} \,/\, d$ es compuesto $\wedge$ d es par$\}$

5. **Dados los siguientes conjuntos, escríbelos por extensión o por comprensión, según corresponda.**
   a. $C = \{m$ es positivo $\wedge$ m divisor de $4\}$
   b. $D = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, ...\}$
   c. $E = \{g \in \mathbb{Z} \,/\, g$ es par $\wedge$ $g < 13\}$
   d. $F = \{1, 4, 16, 64, 256, 1\,024, ...\}$
   e. $G = \{..., -11, -9, -7, -5, -3, -1\}$
   f. $I = \{d \in \mathbb{N} \,/\, d$ tiene 2 cifras $\wedge$ d es divisor de $120\}$

6. **A partir de los siguientes conjuntos, realiza las operaciones dadas.**

   $F = \{f \in \mathbb{N} \,/\, f$ es múltiplo de $6\}$
   $G = \{g \in \mathbb{N} \,/\, g$ es divisor de $54\}$
   $H = \{h \in \mathbb{N} \,/\, h$ es par $\wedge$ $h < 27\}$

   a. $F \cap G$
   b. $G \cap H$
   c. $F \cap H$
   d. $F \cap G \cap H$
   e. $(F \cup H) \cap G$
   f. $(G \cup H) \cap F$

7. **Expresa la información de las siguientes situaciones utilizando desigualdades.**
   a. Solo podrán asistir las personas cuya edad no sea inferior a 21 años.
   b. Si el nivel de intensidad sonora (NIS) de un sonido es superior a 50 dB, puede provocar daños en el oído.
   c. Las frecuencias audibles por el ser humano son aquellas que fluctúan entre 20 Hz y 20 000 Hz.
   d. El precio del dólar se mantiene bajo los \$ 500, pero nunca es inferior a \$ 450.

8. **Expresa por extensión y comprensión el conjunto de todos los números enteros que se encuentren entre:**
   a. –8 y 8, ambos incluidos.
   b. –3 y 5, sin incluirlos.
   c. 2 y 15, ambos incluidos.

9. Inventa una situación que se pueda representar utilizando cada desigualdad.

a. $t < 200$

b. $0 < m < 12$

c. $a > 6$

d. $-4 \leqslant r \leqslant 4$

10. Encuentra tres números reales que pertenezcan a cada uno de los intervalos dados.

a. $[-2, 5[$

b. $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

c. $]-\infty, -4]$

d. $[\sqrt{5}, 3]$

e. $[0; 0{,}1[$

f. $]\sqrt{2}, \sqrt{3}[$

11. Determina el resultado de las uniones e intersecciones de intervalos. Luego, expresa el resultado como intervalo y gráficamente.

a. $[1, 5] \cap]2, 7[$

b. $[-2, 4[\cup [0, 5]$

c. $]2, \infty[\cap]-4, 6]$

d. $\left]\frac{2}{5}, 8\right[\cap ([1, 4] \cap]-\infty, 3[)$

e. $[1, 8] \cup (]2, 4[\cap [3, 10[)$

f. $\left(\left]\frac{2}{3}, 4\right[\cup \left]-4, \frac{8}{11}\right[\right) \cup ([0, 4] \cap]-\infty, -2[)$

12. Expresa como intervalo y representa gráficamente los siguientes conjuntos.

a. $\{x \in \mathbb{R} / 2 < x\}$

b. $\left\{x \in \mathbb{R} / -\frac{2}{3} > x\right\}$

c. $\left\{x \in \mathbb{R} / 0 > x > -\frac{4}{5}\right\}$

d. $\{x \in \mathbb{R}^- / x \geqslant -4\}$

e. $\{x \in \mathbb{R}^+ / x \leqslant \sqrt{2}\}$

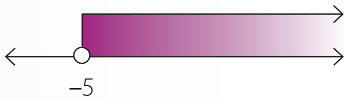
f. $\{x \in \mathbb{R} / 7{,}2 < x \leqslant 12\}$

13. Determina el intervalo representado en cada una de las siguientes representaciones gráficas.

a.

b.

c.



14. Si un número varía entre –2 y 7, ¿entre qué valores se encuentra su opuesto aumentado en 9?

15. La base de un triángulo mide el triple que su altura. Si la medida de la altura puede variar entre 2 cm y 7 cm, ¿entre qué valores oscila el área de dicho triángulo?

16. Si la arista de un cubo varía entre 2 cm y 5 cm, ¿entre qué valores se encuentra su volumen?, ¿y el área de una de sus caras?, ¿y su área total?

17. Si la diagonal de un cuadrado varía entre $4\sqrt{2}$ cm y $5\sqrt{2}$ cm, ¿entre qué valores se encuentran sus lados?

18. Si un número varía entre $\sqrt{5}$ y $\sqrt{10}$, ¿entre qué valores se encuentra su cuadrado disminuido en 5?

19. CONEXIÓN CON LA ECONOMÍA ▶ El precio de un cuaderno fluctúa entre \$ 460 y \$ 980, y el de un lápiz, entre \$ 80 y \$ 220. Si Enrique tiene que comprar 12 cuadernos y 8 lápices, ¿cuánto dinero necesita como mínimo?, ¿y como máximo?

20. CONEXIÓN CON LA NATURALEZA ▶ El cóndor adulto es el animal volador más grande del mundo, puede llegar a medir entre 1,1 y 1,3 m. Si una pulgada es igual a 2,54 cm, determina el rango de valores que puede adoptar el tamaño de un cóndor adulto, en pulgadas.

21. CONEXIÓN CON LA LITERATURA ▶ En el mundo mágico de Harry Potter, el sistema de monedas es diferente al que usamos habitualmente. Allí existen galeones de oro, *sickles* de plata y *knuts* de bronce. Se sabe que un galeón de oro equivale a 17 *sickles* de plata y que 1 *sickle* de plata equivale a 29 *knuts* de bronce.

a. Si el precio de una escoba voladora oscila entre 10 y 29 galeones de oro, ¿entre qué valores varía el precio de la escoba, en *sickles* de plata?, ¿y en *knuts* de bronce?

b. Un mago tiene dinero ahorrado, no sabe exactamente cuánto tiene, pero sabe que es un valor mayor que 884 *sickles* de plata y no superior a 1 632 *sickles* de plata. ¿Entre cuántos galeones de oro se encuentra la cantidad de dinero que el mago ha ahorrado?, ¿y entre cuántos *knuts* de bronce?

Marca la opción correcta en los ítems 22 al 40.

22. ¿A qué conjunto representa el intervalo $]-\infty, -2[$?

A. $\{x \in \mathbb{R} / -2 \leqslant x\}$
B. $\{x \in \mathbb{R} / -2 \geqslant x\}$
C. $\{x \in \mathbb{N} / -2 > x\}$
D. $\{x \in \mathbb{R} / -2 > x\}$
E. $\{x \in \mathbb{R}^- / 2 < x\}$

23. Dado un número m cualquiera, que cumple la condición $-1 \leqslant m < 10$, ¿cuál de las siguientes desigualdades es siempre verdadera?

A. $1 \geqslant m > -10$
B. $m < 10$
C. $m > -1$
D. $-1 \leqslant m \leqslant 10$
E. $1 \geqslant -m > 10$

24. Se sabe que a es un número real, tal que $-20 < a \leqslant -11$. ¿Cuál de los siguientes valores no corresponde a un valor posible de a?

A. –20
B. –17
C. –15
D. –14
E. –12

25. Para el conjunto de números reales $A = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{\pi}{2} \leqslant x < 3\sqrt{2}\right\}$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

I. $4 \in A$ II. $1{,}5 \in A$ III. $\sqrt{18} \in A$

A. Solo I
B. Solo II
C. I y II
D. I y III
E. I, II y III

26. $]-4, a] \cap [b, 2]$ es vacío si:

A. $a + b < 0$
B. $a - b < 0$
C. $a < 0$ y $b < 0$
D. $a \leqslant 0$ y $b \geqslant 0$
E. $a \geqslant 0$ y $b \leqslant 0$

27. Si a, b, c y d son números enteros negativos, ¿cuál o cuáles de las siguientes desigualdades siempre se cumple?

I. $a + b < 0$
II. $a + b + c > 0$
III. $a + b < c + d$

A. Solo I
B. Solo II
C. Solo III
D. II y III
E. I, II, III

28. Si $a > b$ y $b < 0$, ¿cuál de las siguientes expresiones es siempre positiva?

A. ab
B. a^2b
C. ab^2
D. $a^2 + b^2$
E. $a^2 - b^2$

29. De los siguientes números, ¿cuál se encuentra en el intervalo $]-5, -3] \cup]2, 4[$?

A. –5
B. –3
C. 0
D. 2
E. 4

30. Si $u + 1 < v < 0$, la expresión $\frac{u}{v-1}$ es:

A. menor que –1.
B. mayor que –1 y menor que 0.
C. mayor que 0 y menor que 1.
D. mayor que 1.
E. No se puede determinar.

31. Sean a y b dos números reales tales que $a + b < b$ y además $ab < 0$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

A. $b - a < 0$
B. $a - b > 0$
C. $a < 0$ y $b < 0$
D. $a > 0$ y $b < 0$
E. $a < 0$ y $b > 0$

32. **¿Qué conjunto es equivalente a (]–2, 6[∪]4, 9]) ∪]1, 7[?**

A.]–2, 9]
B.]–2, 4[∪]6, 9]
C.]–2, 1[∪]4, 6[
D.]–2, 6[∪]7, 9]
E.]–2, 1[∪]4, 9]

33. **Si $ab > bc$, con $b < -4$, ¿cuál de las siguientes desigualdades se cumple?**

A. $a > c$
B. $a < c$
C. $a \leqslant c$
D. $a \geqslant c$
E. $a = c$

34. **Se debe construir un cubo cuya arista a puede medir desde 4 cm hasta 6 cm. El máximo volumen V que puede tener el cubo es 125 cm³. ¿Cuál de las siguientes alternativas expresa correctamente la situación descrita?**

A. $4 \leqslant a \leqslant 6$ y $V < 125$
B. $4 \leqslant a \leqslant 6$ y $V \leqslant 125$
C. $4 \leqslant a \leqslant 6$ y $V = 125$
D. $a \leqslant 5 \leqslant 6$ y $V = 125$
E. $a < 6$ y $V \leqslant 125$

35. **Si $0 < a < 1$, ¿cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones es falsa?**

I. $a^2 > 1$ II. $a^2 - 1 < 1$ III. $a^2 < a$

A. Solo I
B. Solo II
C. I y II
D. II y III
E. I y III

36. **¿En cuál de las siguientes alternativas está definido por comprensión el conjunto A?**

$$A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

A. $\{x \in \mathbb{N} / -5 \leqslant x \leqslant 2\}$
B. $\{x \in \mathbb{N} / -5 < x < 2\}$
C. $\{x \in \mathbb{Z} / -5 \leqslant x < 3\}$
D. $\{x \in \mathbb{Z} / -5 < x < 2\}$
E. $\{x \in \mathbb{R} / -6 < x \leqslant 3\}$

37. **Sean a y b números reales tales que:**

$$-6 \leqslant a < 12 \text{ y } -3 < b < 7$$

¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son siempre verdaderas?

I. $-9 < a + b < 19$
II. $-12 \leqslant 2a < 24$
III. $6 < -2b < -14$

A. Solo I
B. Solo II
C. I y II
D. II y III
E. I, II y III

38. **¿En cuál de las siguientes alternativas está definido por extensión el conjunto B?**

$$B = \{x \in \mathbb{N} / -6 \leqslant x < 6\}$$

A. {–6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}
B. {–6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5}
C. {–5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5}
D. {1, 2, 3, 4, 5, 6}
E. {1, 2, 3, 4, 5}

39. **Sean a, b y c números reales distintos de 0; se puede determinar el signo de la expresión $\frac{a^2b}{c^2}$ si:**

(1) $a < 0$ (2) $\frac{b}{c^2} < 0$

A. (1) por sí sola.
B. (2) por sí sola.
C. Ambas juntas, (1) y (2).
D. Cada una por sí sola, (1) o (2).
E. Se requiere información adicional.

40. **La expresión $\frac{a+b}{a-b}$, con a y b números reales y $a \neq b$, es positiva si:**

(1) $a > b$ (2) $b > 0$

A. (1) por sí sola.
B. (2) por sí sola.
C. Ambas juntas, (1) y (2).
D. Cada una por sí sola, (1) o (2).
E. Se requiere información adicional.

Evaluación de proceso

Aplica lo aprendido hasta este momento en la unidad y desarrolla las siguientes actividades.

1. Dados los conjuntos A, B y C, realiza las siguientes operaciones.

$A = \{-4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}$

$B = \{x \in \mathbb{N} \ / \ x \text{ es divisor de } 12\}$

$C = \{x \in \mathbb{N} \ / \ x \text{ es de una cifra} \wedge x \text{ es par}\}$

a. $A \cup B$

b. $A \cap C$

c. $(C \cup B) \cup A$

d. $(B \cap C) \cap A$

2. Sea $A = \{x \in \mathbb{N} \ / \ x$ es compuesto de una cifra$\}$. Marca con una X todos los números que pertenecen al conjunto A.

3 1 9 2 −8 15 5 11 −5 17

3. Escribe la información de las siguientes situaciones utilizando desigualdades.

a. p está entre −2 y 6, ambos números inclusive.

b. k es un número positivo inferior a 10.

c. b no excede a 5.

d. q es un número negativo que excede o es igual a −12.

4. Determina si las siguientes desigualdades son verdaderas o falsas. Justifica las falsas.

a. $(-4)^2 \leqslant (-4)^3$

b. $\dfrac{3+11}{11} \leqslant \dfrac{1+22}{11}$

c. $3 - \dfrac{2}{5} \geqslant 3 - \dfrac{5}{2}$

d. $\dfrac{1+4}{7} \leqslant 1 + \dfrac{4}{7}$

5. Determina la unión o intersección de los siguientes intervalos.

a. $[1, 3[\cup]2, 7[$

b. $[1, +\infty[\cap]-\infty, 40[$

c. $]2, 8] \cap [-3, 2]$

d. $]-1, +\infty[\cup]-\infty, 1[$

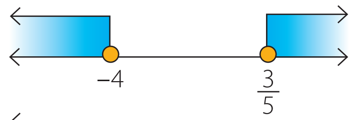
e. $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{7}{2}\right] \cup [2, 5[$

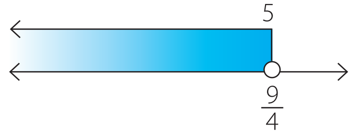
f. $\left[\dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{4}\right[\cap \left[\dfrac{7}{8}, \dfrac{8}{7}\right[$

6. Expresa como intervalo las siguientes representaciones gráficas.

a.


b.


c.


d.


e.


7. Si $-4 \leqslant p < 5$, determina entre qué números varía cada una de las siguientes expresiones.

a. $2p$

b. $-p$

c. $\dfrac{p}{3} - \dfrac{1}{5}$

d. $4p - 5$

e. $6 - 7p$

f. $\dfrac{3}{4} - \dfrac{2p}{3}$

8. Considera la siguiente afirmación: "El sucesor del cuadrado de un número natural siempre es igual o mayor que el doble de dicho número".

a. ¿Cómo representarías la afirmación anterior utilizando una desigualdad?

b. Verifica la validez de la afirmación probando con algunos valores. ¿Se cumple en todos los casos?

c. Demuestra la afirmación anterior.

9. El lado de un cuadrado varía entre 8 m y 12 m.

a. ¿En cuánto varía su área, disminuida en 4 m^2?

b. ¿En cuánto varía su perímetro, aumentado en 3 m?

c. ¿En cuánto varía la medida de su diagonal? Redondea a la décima.

Marca la opción correcta en los ítems 10 a 19.

10. ¿Con cuál intervalo se puede representar el conjunto de los números reales negativos?

A.]–∞, 0]
B.]–∞, 0[
C.]0, +∞[
D. [0, +∞[
E.]–∞, +∞[

11. Si el lado de un triángulo equilátero varía entre 5 cm y 14 cm, ¿entre qué valores varía su perímetro, disminuido en 5 cm?

A. Entre 15 cm y 42 cm.
B. Entre 20 cm y 47 cm.
C. Entre 20 cm y 56 cm.
D. Entre 10 cm y 37 cm.
E. Entre 15 cm y 51 cm.

12. Si $a \geqslant b + c$, ¿cuál de las siguientes desigualdades es correcta?

A. $a - c \geqslant b$
B. $a - b \leqslant c$
C. $a + c \leqslant b$
D. $b - a \geqslant -c$
E. $a + b < c$

13. ¿Con cuál intervalo se puede representar el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leqslant x < 6\}$?

A.]–2, 5]
B. [–2, 5]
C. [–2, 6]
D.]–2, 6[
E. [–2, 6[

14. ¿Cómo se representa por comprensión el conjunto de todos los números naturales tales que no son inferiores que 9 y no exceden 21?

A. $\{x \in \mathbb{N} / 9 < x < 21\}$
B. $\{x \in \mathbb{N} / 9 < x \leqslant 21\}$
C. $\{x \in \mathbb{N} / 9 \leqslant x \leqslant 21\}$
D. $\{x \in \mathbb{N} / 8 \leqslant x < 22\}$
E. $\{x \in \mathbb{N} / 8 < x \leqslant 22\}$

15. ¿Cuál de los siguientes números no pertenece al conjunto $A = \{x \in \mathbb{Z} / x$ es impar$\}$?

A. 321
B. –357
C. –129
D. 603
E. 358

16. ¿Cuál de las siguientes situaciones se puede representar con la desigualdad $p \leqslant 9\,000$?

A. El valor de la cuota mensual excede los $ 9 000.
B. Al concierto asistieron 9 000 personas.
C. Al menos 9 000 beneficiados tuvo la nueva ley.
D. Por menos de $ 9 000, puedes llevarlo.
E. A lo más 9 000 personas llegaron al partido.

17. ¿A qué intervalo pertenece el número –4,01?

A.]–∞, –4]
B.]–∞, –5]
C. [–4, +∞[
D.]–4, +∞[
E. [–3, +∞[

18. ¿En cuál de las alternativas el siguiente conjunto está definido por extensión?

$R = \{x \in \mathbb{N} / x$ es de dos cifras $\wedge$ x termina en 1$\}$

A. {1, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19}
B. {1, 10, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91}
C. {1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91}
D. {11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91}
E. {11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19}

19. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

A. Si $a > b$ y $b < c$, entonces $a > c$.
B. Si $a > b$ y $b > c$, entonces $c < a$.
C. Si $a > b$, entonces $a - 3 < b - 3$.
D. Si $a \geqslant b$ y $b \geqslant c$, entonces $a = c$.
E. Si $a > b$, entonces $-a > -b$.

Mi progreso

Verifica en el solucionario del Texto si tus respuestas son correctas. Si tienes respuestas incorrectas, marca en la tabla el criterio correspondiente y realiza las actividades de refuerzo indicadas.

Criterio	Ítems	¿Qué debo hacer?
Representar conjuntos numéricos usando lenguaje matemático.	1, 2, 15 y 18	Si tuviste menos de 3 ítems correctos, realiza las actividades 1 y 2.
Expresar información por medio de desigualdades.	3, 4, 14 y 16	Si tuviste menos de 3 ítems correctos, realiza las actividades 3, 4, 5 y 6.
Representar conjuntos de números reales usando intervalos.	5, 6, 10, 13 y 17	Si tuviste menos de 3 ítems correctos, realiza las actividades 7, 8, 9, 10 y 12.
Conocer y utilizar las propiedades de las desigualdades.	7, 8, 9, 11, 12 y 19	Si tuviste menos de 4 ítems correctos, realiza las actividades 11, 13, 14, 15 y 16.

Para reforzar

Según los resultados obtenidos en la evaluación de proceso, resuelve las actividades correspondientes para reforzar los contenidos en los que tuviste dificultades.

1. **Escribe los siguientes conjuntos definidos por comprensión.**
   a. $D = \{$queso, yogur, mantequilla$\}$
   b. $Z = \{A, E, I, O, U\}$
   c. $C = \{1, 2, 4, 8, 16\}$
   d. $B = \{1, 4, 9, 16, 25, ...\}$
   e. $A = \{17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87, 97\}$
   f. $E = \{4, 24, 44, 64, 84\}$
   g. $P = \{1\}$

2. **Escribe por extensión los siguientes conjuntos.**
   a. $J = \{j \in \mathbb{N} \,/\, j$ es divisor de $32\}$
   b. $K = \{k \in \mathbb{N} \,/\, k$ es múltiplo de $11\}$
   c. $L = \{l \in \mathbb{N} \,/\, l$ es múltiplo de $3 \wedge l$ es par$\}$
   d. $M = \{m \in \mathbb{N} \,/\, m$ es primo $\wedge\ m$ termina en $2\}$
   e. $N = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n$ tiene 1 cifra $\wedge\ n$ es impar$\}$
   f. $I = \{i \in \mathbb{Z} \,/\, i$ es impar $\wedge\ i$ tiene una cifra$\}$
   g. $R = \{r \in \mathbb{Z} \,/\, r$ tiene 2 cifras $\wedge\ r$ termina en $9\}$

3. **Representa las siguientes situaciones usando desigualdades.**
   a. Pablo es más alto que Angélica.
   b. El ascensor tiene una capacidad máxima de 800 kg.
   c. La velocidad del automóvil no es mayor que 45 km/h.
   d. La temperatura de ayer varió entre 8 y 22 ºC.
   e. En seis años más la edad de Martín será menor que 17 años.

4. **Determina si las siguientes desigualdades son verdaderas o falsas.**
   a. $(3 + 1)(3 - 1) > (3 + 1)^2$
   b. $\sqrt{5} < e^2$
   c. $\sqrt{3} > \sqrt{2}$
   d. $(-2 - 5)^2 > (2 + 5)^2$
   e. $2 \cdot 5 \cdot (-6) < (-2) \cdot (-5) \cdot 6$
   f. $(7 - 3)^2 > 7^2 + 3^2$

5. **Inventa una situación de la vida real que se pueda modelar con cada una de las siguientes desigualdades.**

a. $p > 600$

b. $900 > a \geqslant 1\,200$

6. **Representa por extensión o por comprensión los siguientes conjuntos, según corresponda.**

a. $R = \{x \in \mathbb{Z}^- / x > -7\}$

b. $Q = \{x \in \mathbb{N} / x < 7\}$

c. $S = \{x \in \mathbb{Z} / -1 < x \leqslant 3\}$

d. $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

e. $Y = \{-4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, ...\}$

7. **Determina si los siguientes números pertenecen o no al intervalo $\left]-\frac{3}{2}, 10\right]$.**

a. $-\frac{3}{2}$

b. 10

c. $-\frac{3}{8}$

d. $10{,}05$

e. $\frac{21}{2}$

f. $1{,}05$

8. **Representa como un intervalo los siguientes conjuntos de números reales.**

a. $R = \{x \in \mathbb{R} / x < 8\}$

b. $S = \{x \in \mathbb{R} / 0{,}5 < x \leqslant 6{,}5\}$

c. $T = \left\{y \in \mathbb{R} / \frac{1}{4} \leqslant y \leqslant \frac{3}{2}\right\}$

d. $R = \{x \in \mathbb{R} / x > \sqrt{47}\}$

e. $S = \{x \in \mathbb{R} / x \geqslant \pi\}$

f. $T = \{y \in \mathbb{R} / p < y < q\}$

9. **Dados los intervalos $E =]5, +\infty]$, $F = [-1, 15]$ y $G =]-\infty, 1]$, determina:**

a. $G \cup E$

b. $E \cap F$

c. $(G \cap F) \cup E$

d. $(F \cup E) \cap G$

10. **Representa gráficamente en la recta real los siguientes intervalos.**

a. $]+\infty, 0]$

b. $[-0{,}08, 10[$

c. $\left[\frac{1}{5}, 5\right]$

d. $]+\infty, -3[$

e. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

f. $[\sqrt{16}, \sqrt{36}[$

11. **La medida del lado de un triángulo equilatero varía entre 3 cm y 4 cm. ¿En qué rango de valores se encuentra su perímetro?, ¿y la medida de su altura?, ¿y su área?**

12. **En cada caso, determina el intervalo que se encuentra representado en las figuras.**

a.

b.

c.

d.

13. **Lee los siguientes enunciados y completa con > o <, según corresponda.**

a. Si $b < a$ y $b > c$, entonces, a ______ c.

b. Si $a > b$ y $c < 0$, entonces, $\frac{a}{c}$ ______ $\frac{b}{c}$.

c. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces, $\frac{a}{c}$ ______ $\frac{b}{c}$.

14. **Ana dice: "Sabemos que $-5 < -4$. Si multiplicamos cada miembro de la desigualdad por k, obtenemos $-5k < -4k$. Por lo tanto, si remplazamos por $k = -3$ obtenemos $15 < 12$". Explica por qué el razonamiento de Ana es incorrecto.**

15. CONEXIÓN CON EL DEPORTE ▶ **El largo de una cancha de fútbol debe medir entre 90 m y 120 m, mientras que el ancho debe medir entre 45 m y 90 m.**

a. ¿Cuál es el menor perímetro que podría tener una cancha de fútbol?, ¿y la menor área?

b. ¿Cuál es la mayor área que podría tener una cancha de fúbol?, ¿y el mayor perímetro?

c. En un club desean construir una cancha que tenga 105 m de largo. ¿Entre qué valores debiera estar su ancho de modo que su perímetro sea, a lo más 320 m?

16. **Considera la expresión $P = 5k^2 - 2k - 3$. Usando propiedades de las desigualdades, demuestra que si $1 \leqslant k \leqslant 2$, entonces $0 \leqslant P \leqslant 13$.**

Proyecto de la unidad

El proyecto que aquí te presentamos lo tendrás que desarrollar por etapas mientras avances en la unidad. Su objetivo es aplicar las propiedades de las desigualdades y resolver problemas relacionados con inecuaciones y sistemas de inecuaciones lineales.

Con lo que has aprendido hasta aquí puedes avanzar en la etapa 1.

Etapa 1

1. **Supongamos que en cierta carretera, la rapidez máxima de circulación es de 100 km/h.**
   a. Determinen al menos 10 rapideces de circulación permitidas en esa autopista.
   b. Escriban, por comprensión, el conjunto de rapideces permitidas para circular en esa autopista.
   c. ¿Es posible escribir el conjunto anterior por extensión?, ¿por qué?
   d. En sus cuadernos, dibujen un intervalo de números reales que represente las rapideces permitidas en la autopista.
2. **Daniela tiene un auto con un marcador de velocidad digital pero este se encuentra descompuesto y marca solamente el dígito de las unidades.**
   a. Determinen todos los posibles valores que pueden aparecer en el marcador de velocidad del auto de Daniela si la rapidez máxima a la que llega este auto es 160 km/h.
   b. Si Daniela circulara por la carretera cuya velocidad máxima es 100 km/h, ¿qué valores podría indicar el marcador digital de velocidad? Representa el resultado como un conjunto definido por extensión y por comprensión.

Etapa 2

1. **Si un automóvil viaja a una rapidez v, en un tiempo t, entonces podemos calcular la distancia total que el automóvil ha recorrido por medio de la expresión $d = vt$, donde d se mide en metros, t en segundos y v en m/s.**
   a. Daniela viaja en su auto desde su trabajo hasta su casa. Si Daniela calcula que a una rapidez promedio de 50 km/h, se demora como mínimo 15 minutos en llegar a su casa, ¿a qué distancia se encuentra su casa de su trabajo?
   b. ¿Cuánto se demoraría si viajara a una rapidez promedio de 40 km/h, como mínimo? Representa la respuesta anterior como un intervalo de números reales.

Etapa 3

1. **En algunos países, las autopistas de alta velocidad imponen rapideces mínimas de circulación en algunas de sus pistas. Averigua en qué países existen este tipo de autopistas y cuál es la razón de imponer una velocidad mínima.**
2. **Responde las siguientes preguntas si ahora la rapidez máxima fuera de 100 km/h y la mínima fuera de 80 km/h en una pista rápida.**
   a. Escriban por comprensión el conjunto de rapideces permitidas en las pistas rápidas.
   b. Representen el conjunto anterior como un intervalo y también en la recta real.
   c. Inventen un sistema de inecuaciones lineales cuyo conjunto solución sea el intervalo que dibujaron en la pregunta anterior.
3. **El túnel de una determinada carretera tiene 2 000 m de extensión. Los vehículos que ingresan a este túnel deben circular a rapideces mayores que 36 km/h y menores que 90 km/h.**
   a. ¿Entre qué rapideces pueden circular los vehículos que ingresan al túnel, expresados en m/s? Calcúlenlo transformando las unidades de medida de km/h a m/s. ¿Cómo lo hicieron?
   b. Construyan un gráfico distancia versus tiempo para 2 vehículos que se mueven a las velocidades mínima y máxima, respectivamente. ¿Qué tipo de función es? Comenten.
   c. Evalúen la función para distintos valores de t. ¿Cuánto recorre cada auto en $t = 1$ s, y en $t = 5$ s?
   d. Para cada auto, determinen el valor de t tal que hayan recorrido 2 000 m.
   e. Si otro auto viaja en el túnel a una velocidad variable, pero siempre dentro del rango permitido, ¿cuánto tiempo se demorará en cruzarlo? Representen la respuesta anterior con un intervalo de números reales.
4. **Respondan la pregunta 3e, planteando un sistema de inecuaciones lineales. ¿Obtuvieron el mismo resultado?, ¿por qué creen que ocurre eso?**

Inecuaciones con una incógnita

Aprenderé a: resolver inecuaciones con una incógnita y resolver problemas con inecuaciones.

Repaso

1. **¿Qué es una ecuación?**
2. **Explica, paso a paso, cómo resolverías la ecuación $2x - 3 = 19$.**

Sofía viaja en su auto a 36 km/h en un camino cuyo límite máximo de velocidad es el indicado por el letrero de la derecha.

Si Sofía aumenta su rapidez en 12 km/h, ¿sobrepasará el límite permitido?, ¿y qué pasaría si la aumenta en 18 km/h?, ¿por qué?

Archivo editorial

Muchas situaciones de la vida cotidiana las podemos modelar usando desigualdades en las que hay términos desconocidos; por ejemplo, en el problema anterior podemos llamar x a la velocidad que Sofía puede aumentar sin sobrepasar el límite. Por lo tanto, se tendría que cumplir la desigualdad:

$$36 + x \leqslant 50$$

Seguramente habrás notado que si usamos diferentes valores de x y los remplazamos en la desigualdad anterior, obtenemos que para algunos valores de x, la desigualdad se cumple y para otros no se cumple; por ejemplo, si $x = 10$, la desigualdad nos queda:

$$36 + 10 \leqslant 50$$
$$46 \leqslant 50$$

Por lo tanto, la desigualdad se cumple. Sin embargo, si $x = 20$, tenemos:

$$36 + 20 \leqslant 50$$
$$56 \leqslant 50$$

En este caso, la desigualdad no se cumple, pues 56 es mayor que 50.

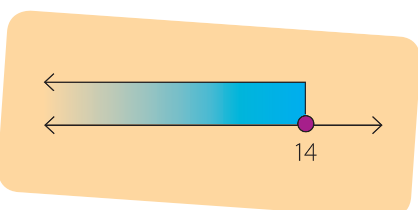
Ahora, nos interesa saber para cuáles valores de x la desigualdad siempre se cumple. Para esto podemos aplicar propiedades de las desigualdades. Observa.

$36 + x \leqslant 50$ ····· Restamos 36.

$x \leqslant 14$

Por lo tanto, para que la desigualdad sea cierta, x debe ser un número menor o igual a 14. Si escribimos lo anterior como un intervalo, diremos que $x \in\,]-\infty, 14]$.

Esto significa que Sofía puede aumentar su velocidad en a lo más 14 km/h para no sobrepasar el límite. Sin embargo, ¿todos los valores menores o iguales que 14 cumplen con ser solución del problema?



En este caso, no tiene sentido hablar de velocidades negativas, por lo que podemos decir, de acuerdo al contexto del problema, que el rango de velocidades que Sofía podría aumentar es de 0 a 14 km/h.

También podemos representar la solución de manera gráfica. En el ejemplo anterior, todos los valores posibles de x están representados en la figura de la izquierda:

Aplicando propiedades de las desigualdades, hemos logrado descubrir todos los posibles valores del término desconocido. A este tipo de desigualdades las llamaremos **inecuaciones**, las cuales son desigualdades con una o más incógnitas.

¿Cómo hacerlo?

Si un joven es 22 años menor que su padre y 48 años menor que su abuelo, ¿a partir de qué edad la suma de los años que tienen él y su padre será mayor que la edad de su abuelo?

Si definimos como x la edad del joven, entonces la edad de su padre y su abuelo serán $x + 22$ y $x + 48$, respectivamente. Luego, planteamos la inecuación:

$x + x + 22 > x + 48$ ········ Reducimos términos semejantes.

$2x + 22 > x + 48$ ········ Restamos x.

$x + 22 > 48$ ········ Restamos 22.

$x > 26$

En consecuencia, si el joven es mayor de 26 años, la suma de su edad con la de su padre superará la cantidad de años que tiene su abuelo.

Tomo nota

- Una **inecuación** es una desigualdad que tiene una o más incógnitas. Para resolverla, debemos encontrar todos los valores de las incógnitas que hacen verdadera la desigualdad.
- El conjunto solución de una inecuación con una incógnita se puede representar mediante un intervalo, o bien, gráficamente en la recta numérica.

Actividades

1. **Determina el conjunto solución de las siguientes inecuaciones y represéntalo gráficamente en la recta real.**

   a. $x - 2(x - 3) > 0$

   b. $(x + 1)^2 - 5 \geqslant x(x - 2)$

   c. $\frac{2x}{5} - 3 > \frac{3x}{2} + 1$

   d. $2x + 3 \leqslant 4x - (x - 10)$

   e. $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} > \frac{3 - x}{6}$

   f. $(x + 3)(x - 3) + 2x - 6 \geqslant x^2$

2. **Resuelve los siguientes problemas.**

   a. Don José quiere cercar su terreno cuadrado con tres vueltas de alambre. Si en total dispone de 360 m de alambre, ¿qué área, como máximo, debería tener el terreno de modo que le alcance con el material que tiene?

   b. En cierta asignatura, Paola tiene las siguientes notas: 5,5; 6,5; 7,0 y 6,0. Si desea obtener un promedio final superior a 6,0 y únicamente le falta dar la prueba coeficiente dos, ¿qué nota debería obtener, como mínimo, para alcanzar el promedio deseado?

   c. Una camioneta transporta cajas con lechugas y papas. Las masas de cada caja son 12 kg y 25 kg, respectivamente. Si una verdulería solicitó el transporte de 4 cajas de papas y el resto en lechugas, ¿cuántas cajas de lechugas, como máximo, pudo haber recibido la verdulería, considerando que la carga total no debe exceder los 130 kg?

Desafío

a. ¿Para qué valor de a, el conjunto solución de la inecuación $ax + 3 > 4a - 6$ son todos los números reales negativos?

b. Sea $f(x) = \sqrt{2x - 8}$. ¿Cuál es el dominio de f?

En algunos casos, al resolver las inecuaciones es necesario considerar el conjunto al cual pertenece la incógnita, si es distinto de los números reales, y si la solución es pertinente al problema. En estos casos, podemos analizar las soluciones encontradas algebraicamente y descartar aquellas que no se ajusten al conjunto numérico correspondiente o no tengan sentido en el contexto del problema; por ejemplo, en la inecuación $x + 1 \leqslant 3$, si x es un número natural, entonces su solución sería el conjunto {1, 2}.

¿Cómo hacerlo?

La suma entre un número natural y su sucesor es inferior a 12. ¿Qué valores puede adoptar tal número?

Si escribimos la información como una inecuación, tenemos:

$x + (x + 1) < 12$ .... Reducimos los términos semejantes.

$2x + 1 < 12$ .... Restamos 1.

$2x < 11$ .... Dividimos por 2.

$x < 5{,}5$

Pero como x es un número natural, entonces solo puede adoptar valores enteros positivos menores que 5,5. Luego: $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

¿Cómo hacerlo?

Una fábrica paga a sus vendedores \$ 880 por artículo vendido, más una cantidad fija de \$ 286 100. Si un vendedor quiere que su sueldo sea superior a \$ 340 000, ¿cuántos artículos debe vender como mínimo?

Si llamamos c a la cantidad de artículos vendidos, podemos modelar el sueldo obtenido por el vendedor como $286\,100 + 880c$. Luego, como el sueldo debe ser superior a \$ 340 000, nos queda la inecuación:

$286\,100 + 880c > 340\,000$ .... Restamos 286 100.

$880c > 53\,900$ .... Dividimos por 880.

$c > 61{,}25$

Por lo tanto, para que su sueldo sea mayor que \$ 340 000, el vendedor debe vender más de 61,25 artículos, pero como es imposible que pueda vender una cantidad decimal de artículos, la respuesta correcta sería que el vendedor debe vender, al menos, 62 artículos.

Si te fijas, la solución corresponde al número natural más cercano que cumple la condición de ser mayor que 61,25, y no a una aproximación del número decimal, como podría pensarse erróneamente.

Tomo nota

- Al resolver un problema que involucra una inecuación hay que considerar que la solución debe ser pertinente al contexto; por ejemplo, la medida de un objeto siempre es positiva, o la cantidad de personas siempre es un número natural, entre otras.

Actividades

1. Resuelve las siguientes inecuaciones, considerando la condición dada para x.

a. $3x - 2(4x - 7) \geqslant 9, x \in \mathbb{N}$

b. $2x + 3 > x - 1, x \in \mathbb{Z}^-$

c. $\frac{5 + 3x}{23} < 1, x \in \mathbb{N}$

d. $-\frac{9x}{2} - 1 < 2 - 5x, x \in \mathbb{R}^-$

e. $x(x + 6) + (3 - x)x \leqslant 13 - x, x \in \mathbb{Z}^+$

f. $\frac{4x}{3} + 2 < \frac{10}{3}, x \in \mathbb{N}$

2. Inventa una situación que se pueda modelar con la inecuación $300x + 5\,000 < 12\,000$, donde x es un número natural. Luego, pídele a un compañero que resuelva la inecuación y que responda en función del contexto.

3. Resuelve los siguientes problemas.

a. ¿Cuáles son los números naturales impares tales que su triple disminuido en 5 es menor que 46?

b. ¿Cuántos números de dos cifras hay tales que al multiplicarlos por 7 dan como resultado un número mayor o igual que 658?

c. La suma de tres números consecutivos es mayor que 60. ¿Cuál es el menor valor que podría adoptar el número mayor?

d. Marcela, Francisco y Gustavo son hermanos. Marcela tiene 15 años y Francisco tiene 3 años más que Gustavo. La suma de los años de Francisco y Gustavo no alcanza a igualar la edad de Marcela. ¿Cuántos años tiene Gustavo si su edad es un número impar?

e. ¿Cuánto debe medir el largo de un terreno rectangular si su ancho mide 5 m y su perímetro no debe exceder los 26 m? Representa tu respuesta con un intervalo de números reales.

f. Una compañía celular tiene un plan en el que hay que pagar un cargo fijo mensual de \$ 7 500 más \$ 120 por minuto hablado. Si Ana quiere que su cuenta no exceda los \$ 14 000, ¿cuántos minutos tendría que hablar, como máximo?

4. Responde la siguientes preguntas.

a. ¿Todas las inecuaciones lineales con una incógnita tienen solución? Justifica.

b. ¿En qué situaciones una inecuación lineal con una incógnita podría no tener solución?

Desafío

a. Inventa una inecuación lineal cuyo conjunto solución tenga un solo elemento.

b. ¿Para qué valor de m, las inecuaciones $2x + 1 \leqslant 4$ y $-3 + x \leqslant 5x + m$ tienen el mismo conjunto solución?

Proyecto

EN PAREJAS **Realicen la etapa 2 del proyecto de la unidad de las páginas 110 y 111.**

Antes de continuar

1. ¿Qué es una inecuación?
2. Explica, paso a paso, cómo resolverías la inecuación $24 - 5x < 56$.
3. ¿Qué significa que la solución de un problema sea pertinente al contexto? Da un ejemplo.

Sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita

Aprenderé a: resolver sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita.

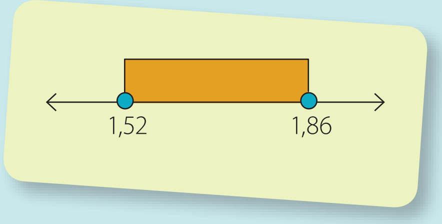
Repaso

1. ¿Qué es un sistema de ecuaciones lineales?
2. Observa el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y=8 \\ 5x-4y=-3 \end{array}\right|$$

¿Es $\{x = 2, y = 1\}$ la solución del sistema anterior, ¿por qué?

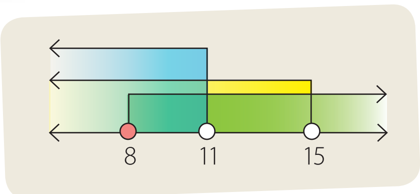
El siguiente diagrama representa el rango de estatura, en metros, de los estudiantes de un curso.



- Inventa una inecuación cuyo conjunto solución esté representado con el diagrama anterior. ¿Qué ocurre?, ¿por qué crees que sucede eso?

En casos como el del problema anterior una sola inecuación resulta insuficiente para modelar una situación, sino que se necesitan varias inecuaciones que deben cumplirse a la vez.

El conjunto de dos o más inecuaciones con una incógnita se llama **sistema de inecuaciones con una incógnita**. En un sistema, todas las inecuaciones deben cumplirse simultáneamente, de modo que su conjunto solución corresponde a la intersección de las soluciones de todas las inecuaciones que conforman el sistema; por ejemplo, en la figura de la izquierda están representados los conjuntos solución de las inecuaciones $x < 15$ (con color amarillo), $11 > x$ (con color celeste) y $x \geqslant 8$ (con color verde). Como en el intervalo [8, 11[están presentes los tres colores, podemos afirmar que dicho intervalo es la solución del sistema:



$$\left.\begin{array}{l} x < 15 \\ 11 > x \\ x \geqslant 8 \end{array}\right|$$

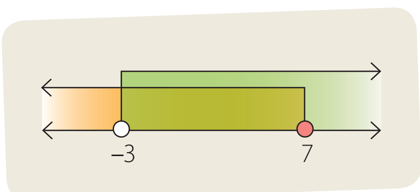
En el caso anterior, dibujar la solución del sistema fue fácil porque la incógnita estaba despejada en todas las inecuaciones. Sin embargo, en otros casos será necesario resolver cada inecuación por separado, usando las propiedades de las desigualdades; por ejemplo, para resolver el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2 \geqslant x-4 \\ 5-x \geqslant -2 \end{array}\right|$$

resolvemos cada inecuación por separado. Observa.

$3x + 2 > x - 4$ .... Restamos x.
$2x + 2 > -4$ .... Restamos 2.
$2x > -6$ .... Dividimos por 2.
$x > -3$
Por lo tanto $S_1 =]-3, +\infty[$

$5 - x \geqslant -2$ .... Restamos 5.
$-x \geqslant -7$ .... Dividimos por –1.
$x \leqslant 7$
Por lo tanto $S_2 = [-\infty, 7]$



Luego, la solución del sistema corresponde a $S = S_1 \cap S_2$. Si te fijas en la figura de la izquierda, la intersección entre S_1 y S_2 es el intervalo]–3, 7].

En consecuencia, la solución del sistema $\left.\begin{array}{l} 3x+2 \geqslant x-4 \\ 5-x \geqslant -2 \end{array}\right|$ es $S =]-3, 7]$.

¿Cómo hacerlo?

La acidez del agua en una piscina es considerada normal si el promedio de tres mediciones de pH está entre 7,2 y 7,8, ambos valores incluidos. Si las primeras dos lecturas fueron 7,4 y 7,9, ¿qué valores posibles de la tercera medición indicarían que el agua tiene acidez normal?

Llamemos x al valor de la tercera lectura. El promedio de las tres lecturas de pH es: $\frac{7{,}4 + 7{,}9 + x}{3} = \frac{15{,}3 + x}{3}$. Luego, para que el agua tenga acidez normal, debe cumplirse que: $7{,}2 \leqslant \frac{15{,}3 + x}{3} \leqslant 7{,}8$, lo que equivale al sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{15{,}3 + x}{3} \geqslant 7{,}2 \\ \frac{15{,}3 + x}{3} \leqslant 7{,}8 \end{array}\right|$$

Luego, resolvemos cada inecuación por separado:

$\frac{15{,}3 + x}{3} \geqslant 7{,}2$ ········• Mutiplicamos por 3.

$15{,}3 + x \geqslant 21{,}6$ ········• Restamos 15,3.

$x \geqslant 6{,}3$

Por lo tanto, $S_1 = [6{,}3, +\infty[$

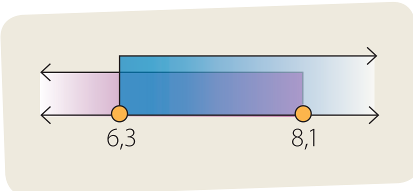
$\frac{15{,}3 + x}{3} \leqslant 7{,}8$ ········• Mutiplicamos por 3.

$15{,}3 + x \leqslant 23{,}4$ ········• Restamos 15,3.

$x \leqslant 8{,}1$

Por lo tanto, $S_2 =]-\infty, 8{,}1]$

Finalmente, la solución del sistema corresponde a $S_1 \cap S_2$, que es igual al intervalo [6,3; 8,1], tal como se representa en el diagrama de la derecha. Luego, el valor de la tercera lectura debe estar entre 6,3 y 8,1, ambos valores incluidos.



¿Cómo hacerlo?

Resuelve el sistema: $\left.\begin{array}{l} \mathbf{2x - 12 > 0} \\ \mathbf{1 - x \geqslant 4} \end{array}\right|$

Resolviendo ambas inecuaciones por separado, tenemos:

$2x - 12 > 0$ ········• Sumamos 12.

$2x > 12$ ········• Dividimos por 2.

$x > 6$

Por lo tanto, $S_1 =]6, +\infty[$.

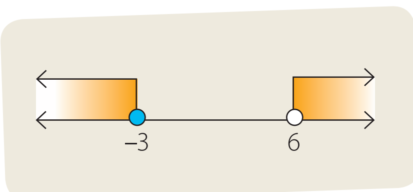
$1 - x \geqslant 4$ ········• Restamos 1.

$-x \geqslant 3$ ········• Mutiplicamos por –1.

$x \leqslant -3$

Por lo tanto, $S_2 =]-\infty, -3]$.

Luego, la solución del sistema corresponde a la intersección de los conjuntos solución de cada inecuación, o bien, $S = S_1 \cap S_2$. En la figura de la derecha están representadas gráficamente las soluciones de cada inecuación.



Si te fijas, $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, es decir, no existe ningún valor de x que satisfaga ambas inecuaciones a la vez. Por lo tanto, el conjunto solución del sistema de inecuaciones anterior es el conjunto vacío. En este caso se dice que el sistema no tiene solución.

En general la solución de un sistema de inecuaciones puede ser un intervalo de números reales, un conjunto con una cantidad finita de elementos, o bien el conjunto vacío.

Tomo nota

- Un **sistema de inecuaciones con una incógnita** es un conjunto de dos o más inecuaciones con una incógnita donde el conjunto solución debe verificarse simultáneamnte para cada una de ellas.
  La solución del sistema está dada por la intersección del conjunto solución de cada inecuación.

Actividades

1. **Escribe un sistema de inecuaciones lineales cuyo conjunto solución esté representado por el intervalo del contexto inicial de la lección.**
2. **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones lineales y representa gráficamente su solución.**
   a. $\begin{array}{r} 3x + 2 \geqslant x - 4 \\ 5 - x \leqslant -2 \end{array}$
   b. $\begin{array}{r} 5 + 3x < x + 17 \\ x + 18 \geqslant -8x \end{array}$
   c. $\begin{array}{r} x + 0{,}5 \leqslant 1{,}2x - 0{,}2 \\ -x + 4{,}5 > 0{,}3 \end{array}$
   d. $\begin{array}{r} x + 3 \geqslant 11 - x \\ 4x \leqslant 45 - x \\ x - 18 > -2x \end{array}$
   e. $\begin{array}{r} 3x + 2 < x - 4 \\ 7x - 3 > 35 + 5x \\ 1 - 2x > 25 + x \end{array}$
   f. $\begin{array}{r} 21 - 6x \geqslant 2x - 19 \\ 3 + 8x < 6x + 7 \\ 1 + x \leqslant 0 \\ 5x - 9 > 2x - 3 \end{array}$
3. **Si x es un número natural, determina todos sus posibles valores si se cumple que:**
   $3x - 1 \leqslant 7 + x \leqslant 2x + 9$
4. **Determina el o los valores de a de modo que el sistema** $\begin{array}{r} 3x + 2 \geqslant x - 4 \\ a - 3x < 38 \end{array}$ **:**
   a. tenga como solución el intervalo]–4, 15[;
   b. no tenga solución.
5. **Resuelve los siguientes problemas.**
   a. La suma de cuatro números consecutivos excede a 42 y no supera 50. Determina el número mayor.
   b. En un triángulo, las medidas de dos de sus lados son 3 cm y 7 cm. Si la medida del tercer lado debe ser inferior a la suma de las medidas de los otros dos lados, y superior a su diferencia, ¿cuáles son las posibles medidas que puede tener el tercer lado, sabiendo que el valor de este es un número entero?
   c. Un músico puede gastar entre $ 190 000 y $ 210 000 en un equipo de música y algunos CD. Si el equipo cuesta $ 170 000 y los CD $ 8 000 cada uno, encuentra la cantidad mínima y máxima de CD que puede comprar.

Desafío

a. Inventa un sistema de inecuaciones con 3 incógnitas de modo que la solución del sistema sea un conjunto con un elemento.

b. Inventa un sistema de inecuaciones con 4 incógnitas de modo que la solución del sistema sean todos los números reales negativos.

Proyecto

EN GRUPO **Realicen la etapa 3 del proyecto de la unidad de las páginas 110 y 111.**

Podemos utilizar sistemas de inecuaciones lineales para resolver inecuaciones que no son lineales; por ejemplo, observa la siguiente inecuación que involucra una fracción:

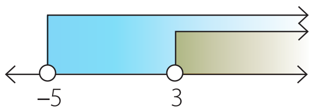
$$\frac{x-3}{5+x} > 0$$

Para que una fracción sea mayor que 0, debe cumplirse que tanto el numerador como el denominador sean positivos o negativos. Luego, tenemos los siguientes dos casos:

Caso 1: el numerador y el denominador son positivos, es decir:

$x - 3 > 0$ y $5 + x > 0$

$x > 3$ y $x > -5$



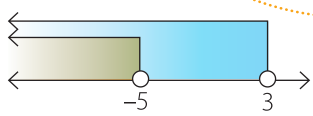
Luego, $S_1 =]3, +\infty[$.

Caso 2: el numerador y el denominador son negativos, es decir:

$x - 3 < 0$ y $5 + x < 0$

$x < 3$ y $x < -5$

Como deben cumplirse ambas inecuaciones a la vez, la solución corresponde a la intersección de las soluciones de cada inecuación.



Luego, $S_2 =]-\infty, -5[$.

Finalmente, como pueden darse cualquiera de los dos casos, la solución final de la inecuación corresponde a la unión entre S_1 y S_2, es decir:

$S = S_1 \cup S_2 =]-\infty, -5[\cup]3, +\infty[$

Tomo nota

- Puedes utilizar sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita para resolver inecuaciones que no son lineales.

Actividades

1. Resuelve las siguientes inecuaciones no lineales.

a. $\frac{x+2}{x} > 0$

b. $\frac{x+3}{x-5} > 0$

c. $\frac{x}{x-6} > 1$

d. $\frac{3x}{2-x} > 2$

2. Explica cómo resolverías la inecuación $(x - 1)(x - 2) > 0$?, ¿qué resultado obtuviste? (Ayuda: recuerda la regla de los signos al multiplicar números enteros).

Desafío

El cociente de un número aumentado en 4 y el mismo número disminuido en 9 es menor que 4. ¿Cuál o cuáles pueden ser los valores posibles de dicho número si se sabe que es un entero?

Antes de continuar

1. ¿Como se resuelve un sistema de inecuaciones lineales? Explica.
2. La solución de un sistema de inecuaciones lineales, ¿puede ser el conjunto vacío? Justifica.

Problemas con inecuaciones y sistemas de inecuaciones lineales

Aprenderé a: resolver problemas con inecuaciones lineales y sistemas de inecuaciones lineales.

Repaso

Representa con una desigualdad las siguientes situaciones.

1. **En cuatro años más su edad será el doble de la que tiene ahora.**
2. **El promedio de Camila es mayor que 5,8 y menor que 6,5.**

El ascensor de un edificio soporta una masa máxima de 500 kg. Si en promedio una persona adulta tiene una masa de 75 kg:

- ¿Qué cantidad de personas se debe indicar como la capacidad máxima del ascensor?

Archivo editorial

Como viste en las lecciones anteriores, las inecuaciones lineales y los sistemas de inecuaciones se pueden aplicar en innumerables situaciones de la vida diaria; por ejemplo, en el problema inicial podemos utilizar una inecuación para calcular la cantidad máxima de personas que pueden entrar en el ascensor sin sobrepasar su capacidad máxima.

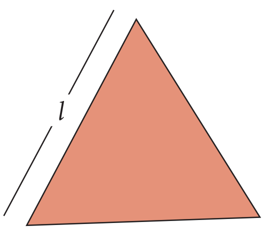
En general, para resolver un problema podemos usar varias estrategias, pero debemos ser conscientes de que, dependiendo del problema, una estrategia puede ser más o menos útil que otra.

Una estrategia que podemos usar para resolver un problema es por ensayo y error, que consiste en ir probando distintos valores hasta que la condición dada en el problema ya no se cumpla; por ejemplo, resolvamos el problema del recuadro.

Si resolvemos el problema del recuadro de la derecha por tanteo, podemos construir una tabla con distintos valores para el lado de un triángulo y el perímetro, en cada caso.

¿Lo entiendes?

¿Cuánto debe medir el lado de un triángulo equilátero de modo que su perímetro sea, a lo más, 12 cm?



$P = 3l$

l (cm)	P (cm)
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15

Si te fijas en la tabla, cuando el lado del triángulo mide 4 cm, su perímetro es 12 cm, es decir, el máximo permitido. Para cualquier valor superior a 4, la condición ya no se cumple. Por lo tanto, la respuesta del problema sería: el lado del triángulo debe medir como máximo 4 cm para que su perímetro sea, a lo más, 12 cm.

Sin embargo, la solución anterior incluye también los números negativos, y como no existen las longitudes negativas o nulas, debemos descartar todas las soluciones que sean menores o iguales que 0. Por lo tanto, la solución pertinente al contexto del problema es: el lado del triángulo debe ser un número positivo menor que 4 cm.

Si te fijas, la dificultad de resolver problemas por medio del tanteo es que este se vuelve ineficaz cuando hay que probar muchos valores, o si la solución no está en el contexto de los números enteros.

Otra estrategia que nos permite resolver el problema consiste en modelar la situación mediante una inecuación o un sistema de inecuaciones y luego, resolverla; por ejemplo, si llamamos l al lado del triángulo, su perímetro lo podemos escribir como $3l$. Luego, se debe cumplir que:

$$3l \leqslant 12$$

Dividiendo ambos lados de la desigualdad por 3, nos queda:

$$l \leqslant 4$$

Luego, la longitud del lado del triángulo, sin sobrepasar el perímetro dado, debe ser igual o menor que 4 cm. Sin embargo, en el contexto de este problema la solución anterior estaría incorrecta, ya que no existen las longitudes negativas. Por lo tanto, la solución correcta es que la longitud del lado del triángulo debe ser mayor que 0 y menor o igual que 4, es decir: $0 < l \leqslant 4$.

Para resolver un problema:

1º Lee el problema e identifica los datos conocidos y desconocidos.

2º Modela la situación con una inecuación.

3º Resuelve la inecuación.

4º Responde en función del contexto del problema, analizando la pertinencia de las soluciones.

¿Cómo hacerlo?

Paula quiere contratar un plan para su teléfono celular. Para esto, observó los planes ofrecidos por dos compañías. En la compañía "Háblalo" ofrecen un plan en el cual se paga un cargo fijo mensual de \$ 8 800, más \$ 120 por minuto hablado. Por otra parte, en la compañía "Conectados", la tarifa mensual tiene un valor fijo de \$ 17 820. ¿Cuántos minutos, como máximo, tendría que hablar Paula para que el plan ofrecido por la compañía "Háblalo" sea más conveniente que el ofrecido por la compañía "Conectados"?

Si llamamos x a la cantidad de minutos que habla Paula en el mes, tenemos que la cantidad de dinero que tendría pagar si escoge el plan de la compañía "Háblalo" es $8\,000 + 120x$. Luego, para que este plan sea más conveniente que el plan ofrecido por "Conectados" debe cumplirse que el total a pagar sea menor o igual a \$ 17 820. Luego, si modelamos la situación anterior con una inecuación, tenemos:

$8\,000 + 120x < 17\,820$

Usando las propiedades de las desigualdades podemos despejar el valor de x:

$8\,000 + 120x < 17\,820$ Restamos 8 000.

$120x < 9\,820$ Dividimos por 120.

$x < 81{,}833...$

Por lo tanto, para que el plan ofrecido por "Háblalo" sea más conveniente que el ofrecido por "Conectados", Paula debe hablar, a lo más, 81,833... minutos.

A partir del contexto del problema, si consideramos que la cantidad de minutos hablados debe ser un número natural, entonces en este caso la respuesta es el mayor número natural que cumple la condición $x < 81{,}833...$; es decir, 81.

Finalmente, podemos concluir que la cantidad máxima de minutos que Paula puede hablar es 81 minutos. Es decir, a partir del mínuto 82, sería más conveniente contratar el plan ofrecido por la compañía "Conectados".

¿Cómo hacerlo?

El índice de masa corporal (IMC) es un indicador que asocia la masa y la estatura de una persona y se utiliza frecuentemente para identificar el sobrepeso y la obesidad en los adultos. Para calcular el IMC de una persona basta con dividir su masa en kilogramos, por el cuadrado de su estatura, en metros. O sea:

$$\text{IMC} = \frac{\text{masa (kg)}}{\text{altura} \cdot \text{altura (m}^2\text{)}}$$

Diversos estudios realizados han concluido que el grupo de mejor salud corresponde a un IMC comprendido entre 20 y 25 kg/m².

Si Sebastián mide 1,6 m, ¿cuál debería ser su masa para que su IMC se encuentre en el rango más saludable?

Para que el IMC de Sebastián se encuentre en el rango más saludable, su IMC sea como mínimo 20 y como máximo, 25.

Podemos modelar lo anterior por medio del sistema: $\left.\begin{array}{l}\text{IMC} \geqslant 20\\ \text{IMC} \leqslant 25\end{array}\right|$

Como conocemos la estatura de Sebastián, y tomando en cuenta la fórmula para calcular el IMC, podemos reescribir el sistema anterior de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{m}{1{,}6^2} \geqslant 20\\[2ex] \dfrac{m}{1{,}6^2} \leqslant 25\end{array}\right|$$

Donde m corresponde a la masa de Sebastián. Luego, resolvemos cada una de las inecuaciones del sistema:

$\dfrac{m}{1{,}6^2} \geqslant 20$ .... Multiplicamos por $1{,}6^2$.

$m \geqslant 20 \cdot 1{,}6^2$ .... Calculamos el producto.

$m \geqslant 51{,}2$

Por lo tanto, $S_1 = [51{,}2, +\infty[$.

$\dfrac{m}{1{,}6^2} \leqslant 25$ .... Multiplicamos por $1{,}6^2$.

$m \leqslant 25 \cdot 1{,}6^2$ .... Calculamos el producto.

$m \leqslant 64$

Por lo tanto, $S_2 =]-\infty, 64]$.

Luego, el conjunto solución del sistema corresponde a $S = S_1 \cap S_2$, es decir:

$S = [51{,}2, +\infty[\cap]-\infty, 64] = [51{,}2, 64]$

La figura de la izquierda muestra las soluciones S_1 y S_2, así como su intersección.

Por lo tanto, para que Sebastián se encuentre en el grupo de mejor salud, su masa debe estar entre 51,2 y 64 kg, incluidos ambos valores.

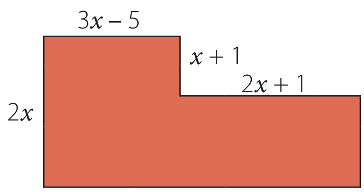
Tomo nota

- Un problema puede resolverse utilizando diversas estrategias, como por ejemplo, por ensayo y error o modelando la situación mediante una inecuación o sistema de inecuaciones.
- Al resolver un problema debes verificar que la solución obtenida sea pertinente al contexto del problema; por ejemplo, considerar que las distancias sean cantidades positivas, o que la cantidad de personas sea un número natural.

Actividades

1. **Rodrigo tiene 62 cm de alambre y quiere construir un cuadrado.**
   a. Si construye un cuadrado de lado igual a 18 cm, ¿le alcanzará con el alambre que tiene?, ¿por qué?, ¿y si hace un cuadrado de 10 cm de lado? Justifica.
   b. ¿Cuál debe ser la medida del lado del cuadrado más grande que Rodrigo podría construir con la cantidad de alambre que tiene?

2. **Resuelve los siguientes problemas.**
   a. La zona infantil de un parque tiene forma rectangular y su largo mide 8 m más que el triple del ancho. Si el perímetro de la zona infantil es de un máximo de 320 m, ¿qué medida puede tener el ancho?
   b. Si la suma de las edades de tres hermanos que nacieron en años consecutivos es mayor que la suma entre la edad del menor y 31, ¿cuáles son las mínimas edades posibles que pueden tener?
   c. CONEXIÓN CON EL COMERCIO ▶ En un almacén se vendieron más de $ 70 000 entre jugos y bebidas. Si en jugos se vendieron más de $ 18 000 más dos terceras partes de lo que se vendió en bebidas, por lo menos, ¿cuánto pudo venderse en bebidas?, ¿cuánto en jugos?
   d. ¿Cuál es el menor número entero que, disminuido en 8, es menor que su triple?
   e. El piso de un piscina rectangular tiene un área menor que 72 m^2. Si el ancho mide 8 m, ¿cuál es el mayor valor entero que puede medir el largo?
   f. Observa la siguiente figura y sus medidas en metros. Considera que todos los ángulos que se forman son rectos.



   ¿Cuánto debe medir cada lado de la figura para que su perímetro sea como máximo 314 m?

   g. CONEXIÓN CON LA FÍSICA ▶ En un puente de 1,6 km de largo, los vehículos tienen que circular a rapideces mayores que 48 km/h y menores que 80 km/h, ¿cuánto tiempo tardaría un vehículo en cruzar el puente?
   h. CONEXIÓN CON LA QUÍMICA ▶ La dureza (D) del agua depende de su concentración expresada en mg/L de calcio (Ca) y magnesio (Mg), y está dada por la expresión:

$$D = 100 \cdot \left(\frac{Ca}{40{,}1} + \frac{Mg}{24{,}3}\right)$$

   ¿Cuál es la mayor concentración de calcio que debe tener el agua para que su dureza sea menor que 60 y mayor o igual que 17 si tiene una concentración de magnesio de 2 mg/L?

3. EN PAREJAS ▶ **Cada uno invente un problema que involucre inecuaciones o sistemas de ecuaciones lineales. Luego, intercámbienlos y que el otro integrante lo resuelva.**

Antes de continuar

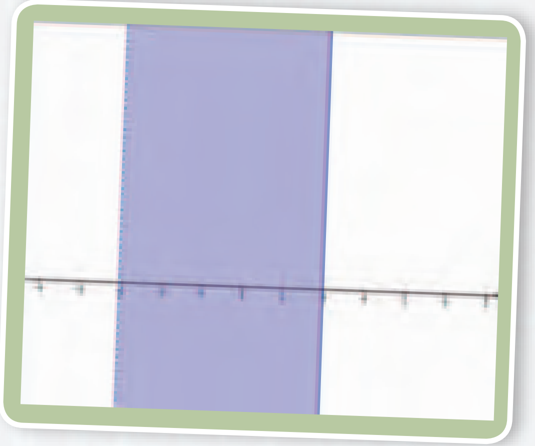
1. ¿Cómo puedes resolver un problema que involucra una inecuación o un sistema de inecuaciones?

Uso GeoGebra

EN PAREJAS

En la siguiente actividad usarás GeoGebra para representar intervalos de números reales y, luego, para resolver inecuaciones y sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita. Reúnete con un compañero y realicen las siguientes actividades.

1. **Inicien el programa GeoGebra y seleccionen la vista "Álgebra y gráficos". Luego, realicen los siguientes pasos.**
   a. Hagan clic con el botón secundario y presionen **Vista Gráfica**, Luego, elijan la pestaña **EjeY** y deshabiliten la opción **Muestra EjeY**. De esta manera en la vista gráfica no se verá el eje Y, pues no lo utilizaremos.
   b. Para representar el intervalo]–2,3], escriban, en la barra de entrada, la expresión **–2<x⩽3** y luego presionen **Enter**. Los símbolos ⩽ y ⩾ los obtienen apretando el botón α. Obtendrán una representación como la que se muestra en la figura.



2. **A partir del intervalo que obtuvieron, respondan.**
   a. ¿Qué significa que un extremo del intervalo tenga línea punteada y el otro no?, ¿por qué?
   b. El número –2, ¿pertenece al intervalo representado?, ¿y el número 3? Comenten su respuesta.
   c. Determinen tres números que pertenezcan al intervalo representado y tres que no pertenezcan a él.
3. **Oculten el intervalo anterior haciendo clic con el botón derecho sobre él y deshabilitando la opción "Muestra objeto". Luego, grafiquen el intervalo]–∞ , –1], escribiendo en la barra de entrada $x \leq -1$. Luego, presionen Enter.**
   a. ¿Cuáles son los límites del intervalo?
   b. El número –2 014, ¿pertenece al intervalo?, ¿y el –1?
   c. Determinen tres números que pertenezcan al intervalo representado y tres que no pertenezcan a él.
4. **Ahora, muestren ambos intervalos simultáneamente.**
   a. A partir de la representación de los intervalos, ¿cómo determinarían la unión de ellos?, ¿y su intersección?
   b. Determinen la unión y la intersección de los intervalos, usando lenguaje conjuntista.
5. **Usando GeoGebra, representen los siguientes intervalos. Luego, realicen las actividades indicadas.**

   $A = [1, 9]$ $\quad$ $B =]4, 15[$ $\quad$ $C = [7, \infty[$

   a. Determinen tres números que pertenezcan a cada uno de los intervalos anteriores y tres que no pertenezcan a ellos.
   b. Determinen las siguientes uniones e intersecciones de intervalos.

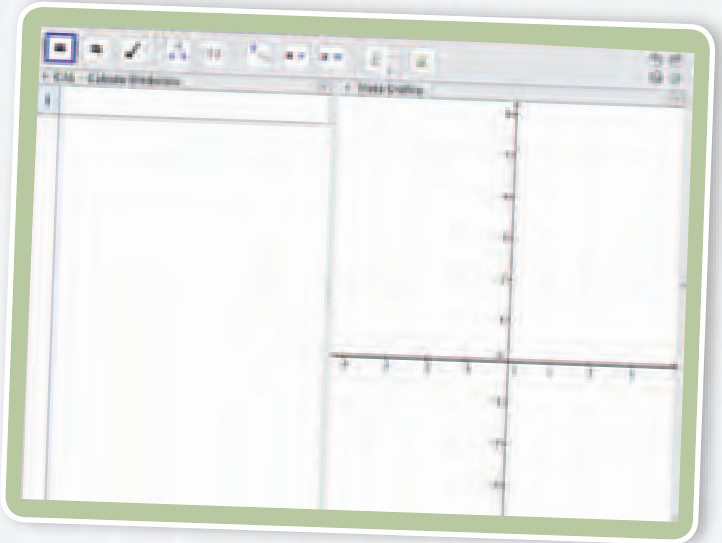
   $A \cap B$ $\qquad$ $A \cup C$

   $A \cap B \cap C$ $\qquad$ $A \cup B \cup C$

   c. Inventen dos intervalos cuya intersección sea el conjunto]–4, 9[. Verifiquen su respuesta representando los intervalos con GeoGebra.

6. En esta actividad aprenderás resolver inecuaciones y sistemas de inecuaciones lineales en GeoGebra.

a. Abran el ***software*** GeoGebra y elijan la opción **"CAS y gráficos"**. Aparecerá una ventana como la que se muestra a continuación.



b. En el casillero 1 del lado izquierdo escriban la siguiente inecuación, $\mathbf{2x + x - 2 \leq 10}$. Luego, hagan clic en la opción Resuelve. Aparecerá el resultado de la inecuación que escribieron. ¿Qué resultado obtuvieron?

c. Visualicen la representación gráfica del conjunto solución de la inecuación haciendo clic en el círculo blanco ubicado a la izquierda de la soluión entregada por el programa.

d. En el casillero 2 escriban la siguiente inecuación $\mathbf{3*(x + 2) > x - 2}$, ¿Cuál es la solución? Realicen los cálculos por medio del programa y verifiquen la respuesta resolviendo la inecuación con lápiz y papel. ¿Las soluciones obtenidas son iguales?

e. Representen gráficamente las soluciones de las dos inecuaciones anteriores. ¿Cuál es su intersección?, ¿qué representa este intervalo? Expliquen.

f. ¿Cuál es el conjunto solución del sistema de inecuaciones $\left.\begin{array}{l} 2x + x - 2 \leqslant 10 \\ 3 \cdot (x + 2) > x - 2 \end{array}\right|$?, ¿por qué?

g. Usando Geogebra resuelvan las siguientes inecuaciones lineales.

$6x + 2 > 10x$

$3x + x \leqslant 2x - 8$

$7x + 9x - 6 \leqslant 8 - 5x$

$(2x + 5)^2 > 4x^2$

h. Usando Geogebra resuelvan los siguientes sistemas de inecuaciones lineales.

$\left.\begin{array}{l} 4x + 2 \leqslant x \\ 6x - 5 < x + 1 \end{array}\right|$

$\left.\begin{array}{l} 3x + 8 < 6 \\ 4x > 6 - 2x \end{array}\right|$

$\left.\begin{array}{l} 5x + 9 \leqslant 10 \\ 3 \cdot (x + 2) > x - 2 \end{array}\right|$

$\left.\begin{array}{l} x + 8x + 7 \leqslant 10x \\ (x + 2)^2 > x^2 + 3 \end{array}\right|$

Practico

Resuelve las siguientes actividades, para consolidar los conceptos y los procedimientos que has aprendido.

1. Responde las siguientes preguntas.

a. ¿Toda inecuación lineal con una incógnita tiene por solución un intervalo de números reales? Justifica tu respuesta.

b. ¿Puede existir un sistema de inecuaciones lineales con una incógnita que tenga una única solución? Justifica.

2. Resuelve las siguientes inecuaciones lineales con una incógnita.

a. $3 + 4x < 51$

b. $-3x > 18$

c. $4x + 5 \leqslant 21, x \in \mathbb{N}$

d. $-2x + 6 < 9, x \in \mathbb{R}^-$

e. $(x + 2)(x + 1) \geqslant (x + 3)^2$

f. $5x^2 - 3 > -4 - 5(x - x^2)$

3. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita.

a. $\left.\begin{array}{l} x + 2 > 1 \\ 3x - 2 \leqslant 1 \end{array}\right|$

b. $\left.\begin{array}{l} 4x + \frac{21}{2} < \frac{21}{2}x \\ \frac{3}{5}x + 4 \geqslant -\frac{1}{6}x \end{array}\right|$

c. $\left.\begin{array}{l} 2x + 1{,}3 < 15 - x \\ 5{,}3 - x \geqslant 4 \end{array}\right|$

d. $\left.\begin{array}{l} 7x + 8 > 2 - x \\ 3x + x^2 \leqslant x^2 - 2x \\ 3x - 3 \geqslant 6x + 13 \end{array}\right|$

4. Plantea los siguientes ejercicios como un sistema de inecuaciones lineales y determina su conjunto solución.

a. $x(x - 1) < 0$

b. $\dfrac{2x + 1}{3 - x} \geqslant 0$

c. $3 - \dfrac{1}{x} < \dfrac{4}{x}$

d. $(x + 2)(x - 3) > 6$

5. Representa gráficamente en la recta real el conjunto solución de las siguientes inecuaciones lineales con una incógnita.

a. $3x + 2 < 14$

b. $x + 3(x - 5) < 6 - 4(2 - 3x)$

c. $3 \leq \dfrac{5x - 1}{4}$

d. $\dfrac{x}{4} + \dfrac{x}{2} > \dfrac{x}{3} + 4$

e. $3x + 5(x - 2) \geqslant 2(x - 10)$

6. Determina una inecuación o sistema de inecuaciones con una incógnita, cuyo conjunto solución está representado en cada diagrama.

a.


b.


c.


d.


7. CONEXIÓN CON EL COMERCIO ▶ **Una compañía de telefonía celular ofrece los planes que se muestran en la siguiente tabla.**

Plan	Cargo fijo (en pesos)	Valor por segundo hablado (en pesos)
A	1 200	3,5
B	1 500	2

a. ¿A partir de cuántos segundos hablados es conveniente contratar el plan B? Representa con un intervalo y gráficamente el rango de segundos hablados en el cual el plan B es el más conveniente.

b. Representa con un intervalo los segundos hablados en los cuales es preferible el plan A.

8. CONEXIÓN CON LA FÍSICA ▶ **La fuerza de estiramiento (F) de un nuevo tipo de plástico varía con la temperatura T, de acuerdo con la expresión $F = 5\,500 - 600T$. ¿Para qué temperaturas se logra que la fuerza de estiramiento de este tipo de plástico sea mayor que 5 300?**

9. El lado desigual de un triángulo isósceles mide 14 cm. ¿Qué longitudes pueden tener los otros dos lados si el perímetro del triángulo debe ser inferior a 50 cm y superior a 26 cm?

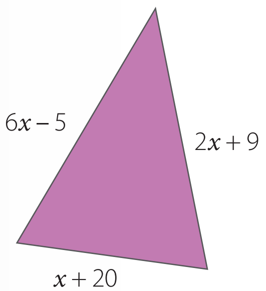
10. Mariana tiene la mayor edad posible que resulta de resolver las inecuaciones:

$$x < 50 - 3x \text{ y } 10x + 24 < 16x + 2$$

¿cuál es la edad de Mariana?

11. Cristina gana, por hora, el doble de lo que gana Daniela. Si Cristina trabaja 8 horas y Daniela, 5 horas, juntas ganan menos de $ 126 000. ¿Cuánto podrá ganar Daniela por hora, como máximo?

12. Determina las medidas máximas de los lados del triángulo de la figura, si su perímetro debe ser menor que 60 cm.



13. CONEXIÓN CON LA FÍSICA ▶ A las cuatro de la tarde parte un tren que debe recorrer una distancia total de 90 km. Si la rapidez media de dicho tren no excede los 90 km/h y no es inferior a 60 km/h, ¿entre qué horas el tren llegará a su destino?

14. El triple de un número natural disminuido en 15 es menor que 57. ¿Cuál es el número?

15. La tercera parte de un número natural aumentada en 20 es mayor que 2. ¿Cuál es el número?

16. Cinco veces un número natural más 11 es menor o igual que el doble del número. ¿Cuál es el cuadrado del número?

17. La suma de tres números consecutivos debe ser menor que 981. ¿Cuáles son los números más grandes que cumplen esta condición?

18. Si el largo de un rectángulo es 5 veces la medida del ancho y el perímetro es a lo más 30 m, ¿cuáles pueden ser las medidas del ancho?

19. Si el área de un triángulo rectángulo es menor que 80 cm^2 y la base es 10 cm, ¿qué valores puede tomar la altura?

20. ¿Cuánto debe medir el radio de una circunferencia de modo que su perímetro sea como mínimo 50,24 cm? Considera $\pi = 3{,}14$.

21. ¿Cuánto debe medir el diámetro de una circunferencia de modo que su área sea, a lo más, 200,96 cm^2? Considera $\pi = 3{,}14$ cm.

22. Fabián quiere repartir $ 114 000 entre sus dos hijos. Si al mayor le corresponde el doble que al menor, ¿cuáles son las máximas cantidades que puede recibir cada uno?

23. Si una persona bebe m gramos de alcohol entonces su sangre contendrá $\frac{m}{0{,}7} \cdot p$ gramos de alcohol, donde p es la masa de la persona, medida en kilogramos. ¿Cuál es la cantidad máxima de alcohol que puede tener un conductor de 60 kg de masa si a partir de 0,5 g/L comete una infracción?

24. Determina si las siguientes aseveraciones son verdaderas o falsas. Justifica las falsas.
   a. Una inecuación es una igualdad que tiene una o más incógnitas.
   b. Un sistema de inecuaciones con una incógnita es un conjunto de dos o más inecuaciones de una incógnita que debe verificarse a la vez.
   c. La solución de un sistema de inecuaciones está dada por la unión del conjunto solución de cada inecuación.
   d. El conjunto solución de un sistema de inecuaciones siempre es un intervalo de números reales.

25. ¿Qué diferencias y similitudes podrías mencionar entre una ecuación y una inecuación?, ¿ y entre un sistema de ecuaciones y un sistema de inecuaciones lineales?

26. ¿Para qué valores de a y b el conjunto solución de la inecuación $ax + b > 5$ son todos los números reales positivos?

Marca la opción correcta en los ítems 27 al 44.

27. **¿Cuál es el conjunto solución de la inecuación $3x - 27 \leqslant 18$?**

A. $\{x \in \mathbb{R} / x \leqslant 45\}$
B. $\{x \in \mathbb{R} / x \leqslant 36\}$
C. $\{x \in \mathbb{R} / x \leqslant 15\}$
D. $\{x \in \mathbb{R} / x \leqslant 9\}$
E. $\{x \in \mathbb{R} / x \leqslant 3\}$

28. **¿Cuántos números naturales de dos cifras tienen la propiedad de que su triple, disminuido en 4, es menor que el doble de su sucesor, aumentado en 7?**

A. 3
B. 4
C. 9
D. 12
E. 13

29. **El gráfico representa las soluciones del sistema:**

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 1 \leqslant 5 \\ 5 \geqslant a - x \end{array}\right|$$

¿Cuál es el valor de a?

A. –6
B. –5
C. –1
D. 4
E. 6

30. **¿Cuál es el dominio de la función $f(x) = \sqrt{1 - x}$?**

A.]–∞, –1[
B.]–∞, 1[
C. [1, +∞[
D.]–∞, 1]
E. {–1, 1}

31. **¿Cuál de las siguientes inecuaciones NO tiene solución en los números naturales?**

A. $2x \leqslant 3$
B. $3x + 6 > -9$
C. $1 - x < 1$
D. $5x + 1 < 6$
E. $4x - 7 < 1$

32. **¿Cuál es la solución de la inecuación: $(p^2 - 2)^2 + 3 \leqslant p^4 - 4p^2 + p$?**

A.]7, +∞[
B. [7, +∞[
C.]–∞, 7[
D.]–∞, 7]
E.]–∞, –7[

33. **La suma de tres números consecutivos es mayor que 96. ¿Cuál es el menor valor posible para el número mayor?**

A. 31
B. 32
C. 33
D. 34
E. 35

34. **Si hace 5 años la edad de Martina no superaba los 17 años y en 5 años más su edad será mayor a 25 años, ¿cuál o cuáles de los siguientes valores podría corresponder a la edad actual de Martina?**

I. 20 años.
II. 21 años.
III. 22 años.

A. Solo I
B. Solo II
C. Solo III
D. II y III
E. I, II y III

35. **Respecto del conjunto representado en la figura de abajo, se puede afirmar que:**

I. se representa con el intervalo]–1, 1[;
II. es solución de la inecuación $5 - x \geqslant 3 + x$;
III. es solución del sistema: $\left.\begin{array}{r} 3x - 2 \leqslant 1 \\ 3 + 5x \geqslant -2 \end{array}\right|$.

A. Solo II
B. Solo III
C. I y II
D. II y III
E. I, II y III

36. **Si el lado de un cuadrado mide $x - 2$, ¿qué valor debe tener x para que su perímetro sea mayor que 28?**

A. $x > 7$
B. $x < 7$
C. $x > 9$
D. $x < 9$
E. $x > 30$

37. **¿En qué intervalo se encuentran todos los valores x tales que la expresión $\sqrt{-x}$ es un número real?**

A. $]-\infty, +\infty[$
B. $]-\infty, 0[$
C. $]-\infty, 0]$
D. $]0, +\infty[$
E. $[0, +\infty[$

38. **Sea p un número natural tal que el triple de su sucesor más el doble de su antecesor es menor que 21. ¿Cuáles son los valores posibles de p?**

A. $]-\infty, 4[$
B. $]0, 4[$
C. $\{1, 2, 3, 4\}$
D. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$
E. $\{1, 2, 3\}$

39. **¿Cuál es la solución de $(x + 1)^2 - 6x > x^2 - 19$?**

A. $]-\infty, 5[$
B. $]-\infty, -5[$
C. $]-5, +\infty[$
D. $]5, +\infty[$
E. $]-5, 5[$

40. **Observa el sistema de inecuaciones:**

$$\left.\begin{array}{l} 8x - 9 > 15 \\ x - 2 < 4 \end{array}\right|$$

¿Cuál de las alternativas muestra una de las soluciones del sistema anterior?

A. 1
B. 3
C. 4
D. 6
E. 7

41. **La suma de tres números impares consecutivos es inferior a 69 y superior a 57. ¿Cuál es el número central?**

A. 19
B. 21
C. 23
D. 25
E. 27

42. **"El doble de la suma entre un número y su sucesor es inferior a 30". ¿Cuál es el mayor número entero que cumple esta condición?**

A. 4
B. 6
C. 7
D. 8
E. 14

43. **Se puede determinar la edad de Bernardita sabiendo que:**

(1) si tuviese 4 años más de los que tiene, no alcanzaría a cumplir 21 años;
(2) si tuviese 2 años menos de los que tiene, tendría más de 12 años.

A. (1) por sí sola.
B. (2) por sí sola.
C. Ambas juntas, (1) y (2).
D. Cada una por sí sola, (1) o (2).
E. Se requiere información adicional.

44. **Se pide encontrar la medida de uno de los lados de un triángulo escaleno, sabiendo que es un número entero.**

(1) La medida de los otros dos lados son 6 cm y 4 cm.
(2) La longitud desconocida es la del lado menor.

A. (1) por sí sola.
B. (2) por sí sola.
C. Ambas juntas, (1) y (2).
D. Cada una por sí sola, (1) o (2).
E. Se requiere información adicional.

Evaluación de proceso

Aplica lo aprendido hasta este momento en la unidad para desarrollar las siguientes actividades.

1. En cada caso, determina si el valor de x dado es una solución de la inecuación respectiva.

a. $1 - 2x > -5$ $\qquad x = 4$

b. $5x + 3 < x - 5$ $\qquad x = -3$

c. $3 - 2x \leqslant 8x + 13$ $\qquad x = -1$

d. $\dfrac{7x - 5}{3} \geqslant 8 - 3x$ $\qquad x = 12$

2. Resuelve las siguientes inecuaciones lineales.

a. $3x > 2$

b. $1 - 7x < 3$

c. $5x + 2 \leqslant 10 + 8x$

d. $3 - 2x \geqslant 21, x \in \mathbb{N}$

e. $2x + 10 > 3x + 2, x \in \mathbb{N}$

3. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones lineales.

a. $\left.\begin{array}{l} x + 1 < 2 \\ x - 2 < 4 \end{array}\right|$

b. $\left.\begin{array}{l} x + 3 > 2 \\ x + 7 \geqslant -1 \end{array}\right|$

c. $\left.\begin{array}{l} 2x + 3 < 1 \\ 3 - x < 4 \end{array}\right|$

d. $\left.\begin{array}{l} x + 1 \leqslant 2 \\ x + 2 < 0 \\ x + 3 \geqslant 0 \end{array}\right|$

4. Determina el o los valores de b de modo que el sistema $\left.\begin{array}{l} 3 - 4x > x + 28 \\ b - 3x < 38 \end{array}\right|$:

a. tenga como solución el intervalo]–5, 6[.

b. tenga como solución el conjunto de los números reales positivos.

c. no tenga solución.

5. Inventa un sistema de inecuaciones lineales que cumpla con las condiciones dadas, en cada caso.

a. Que tenga 2 inecuaciones lineales y su conjunto solución sea el intervalo [0, 2].

b. Que tenga 3 inecuaciones lineales y su conjunto solución sea el conjunto vacío.

c. Que tenga 3 inecuaciones lineales y su conjunto solución sea el intervalo]5, +∞[.

6. Plantea los siguientes ejercicios como un sistema de inecuaciones lineales y determina su conjunto solución.

a. $x(x - 6) < 0$

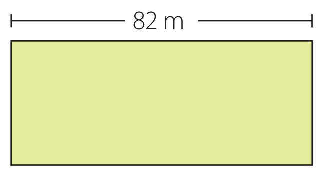
b. $\dfrac{x}{x + 3} \leqslant 0$

c. $\dfrac{2x + 5}{3x - 7} > 0$

d. $(2x + 3)(5 - x) > 0$

7. ¿Cuáles números naturales de dos cifras cumplen la condición de que su triple disminuido en 6, sea menor que su doble aumentado en 8?

8. ¿Cuál es el ancho que debe tener el rectángulo de la figura para que su perímetro no sea superior a 120 m?



9. Una antigua leyenda india dice que la edad óptima para el matrimonio es cuando la edad de la novia no ha superado la mitad, más 7 años, de la edad del novio. Un joven tiene 8 años más que su prometida. ¿Cuál es la edad máxima a la que esta pareja debe casarse para que su matrimonio cumpla con esta condición?

10. La distancia que recorre un automóvil que se mueve con velocidad constante, en línea recta, se puede calcular con la expresión $d = vt$, donde d es la distancia recorrida en metros, v la rapidez en m/s y t el tiempo transcurrido en segundos.

a. ¿Entre qué rapideces debe ir el automóvil si quiere recorrer un trayecto de 2 500 m en un rango de tiempo de entre 2 y 3 minutos?

b. Si en un puente de 4 km de largo un vehículo puede viajar en un rango de rapidez de 10 a 30 m/s, ¿cuánto tiempo tardaría en cruzar dicho puente?

Marca la opción correcta en los ítems 11 a 18.

11. **¿Cuál de los siguientes números es solución de la inecuación $5x - 15 > 20$?**

A. 1
B. 2
C. 5
D. 7
E. 9

12. **Si n es un número natural, ¿cuántos elementos tiene el conjunto solución de la inecuación $4n - 8 \leqslant 6$?**

A. Ninguno.
B. Uno.
C. Dos.
D. Tres.
E. Infinitos.

13. **¿Cuántos números naturales de dos cifras multiplicados por 8 dan como resultado un número superior a 768 e inferior a 790?**

A. 2
B. 3
C. 4
D. 96
E. 98

14. **¿Cuál es la solución de $3 - 4x \geqslant 2x - 15$?**

A. $]-\infty, 3]$
B. $]-\infty, 9]$
C. $]-\infty, 9[$
D. $[3, +\infty[$
E. $[9, +\infty[$

15. **La diferencia, en años, de dos hermanos es 6. Si la suma de sus edades no sobrepasa los 12 años, ¿cuántos años, como máximo, tiene el hermano menor?**

A. 1
B. 2
C. 3
D. 4
E. 9

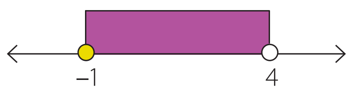
16. **¿Cuál de las siguientes inecuaciones lineales tiene como conjunto solución al intervalo cuya representación gráfica corresponde a la figura?**

A. $1 - x \leqslant -13$
B. $4x - 5 < 37 + x$
C. $34 > 6 + 2x$
D. $2x - 3 \leqslant 53 - 2x$
E. $8x - 35 \geqslant 3x + 35$

17. **¿Cuál debe la relación entre a y b de modo que el intervalo $]-7, 7[$ sea el conjunto solución del sistema $\left.\begin{array}{r} 5x - 3 < 39 - x \\ ax + b > 0 \end{array}\right|$?**

A. $a = 7b$
B. $b = 7a$
C. $ab = 7$
D. $a = -7b$
E. $b = -7a$

18. **¿Cuál de las siguientes figuras representa la solución del sistema $\left.\begin{array}{r} 2x + 1 \geqslant -1 \\ 3 - x > 5x - 21 \end{array}\right|$?**

A. 

B. 

C. 

D. 

E. 

Mi progreso

Verifica en el solucionario del Texto si tus respuestas son correctas. Si tienes respuestas incorrectas, marca en la tabla el criterio correspondiente y realiza las actividades de refuerzo indicadas.

Criterio	Ítems	¿Qué debo hacer?
Resolver inecuaciones lineales con una incógnita y resolver problemas con inecuaciones.	1, 2, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16	Si tuviste menos de 6 ítems correctos, realiza las actividades 1, 2, 3, 4 y 5.
Resolver sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita y resolver problemas con sistemas de inecuaciones.	3, 4, 5, 6, 10, 13, 17, 18	Si tuviste menos de 5 ítems correctos, realiza las actividades 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12.

Para reforzar

Según los resultados obtenidos en la evaluación de proceso, resuelve las actividades correspondientes para reforzar los contenidos en los que tuviste dificultades.

1. Resuelve las siguientes inecuaciones lineales con una incógnita.

a. $2x \leqslant 64$

b. $-6x > 90 - x$

c. $3x - 5 < 16, x \in \mathbb{N}$

d. $5 - 7x < 5, x \in \mathbb{R}^-$

e. $(x - 3)(x + 3) > (x + 3)^2$

f. $4(x^4 - 1) < -12 - 2(x - 2x^4), x \in \mathbb{N}$

2. Representa gráficamente el conjunto solución de las siguientes inecuaciones.

a. $3x < 4 - x$

b. $3(2x + 4) > 6(2 - x)$

c. $\frac{1}{4} - \frac{1}{3}x \leqslant 5x - 1$

d. $\frac{b}{2} - \frac{2}{3} < \frac{3}{2} - b$

e. $6\left(\frac{x}{3} - 2\right) + 12 \geqslant 3\left(x - \frac{1}{3}\right) - 15$

f. $(a + 3)^2 - a^2 > 63$

g. $100(0{,}1x + 1) \leqslant 2x - 10$

3. Resuelve los siguientes problemas.

a. La mitad de un número disminuido en 3 es mayor que 24. ¿Cuál es el menor número natural que cumple la condición anterior?

b. La masa de Bruno es un valor entre 70 y 74 kg, la masa de Diego es 2 kg más que Bruno y la de Catalina es 11 kg menos que Diego. Determina entre qué valores se encuentra la masa de Catalina.

c. Tres veces un número disminuido en 3 es menor o igual que el mismo número disminuido en 1. ¿Cuál es el cubo del número?

d. Si el ancho de un marco rectangular es la cuarta parte de la medida del largo y el perímetro es, como máximo, 50 m, ¿cuáles pueden ser las medidas posibles del largo del marco, sabiendo que tanto el largo como el ancho son números naturales?

e. Si el radio de una circunferencia mide entre 2 y 4 cm, determina entre qué valores mide su perímetro. Considera $\pi = 3{,}14$.

4. **¿Para qué valor de b, el conjunto solución de la inecuación $-2x + b < 5$ es el intervalo de la figura?**

5. **¿Para qué valor de m, el conjunto solución de la inecuación $-mx + 7 < 9$ es $\mathbb{R}^+$?**

6. **Escribe cada situación como un sistema de inecuaciones lineales.**

a. La cuarta parte de un número es mayor o igual que 2 y su quinta parte es menor que 2.

b. La masa de un oso puede llegar a ser hasta de 700 kg y en su período de hibernación baja considerablemente su masa, hasta en un 50 %.

c. La suma entre dos números pares consecutivos es mayor que 62 y menor o igual a 48.

7. **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita.**

a. $\left.\begin{array}{r} 2x + 1 > x \\ 3(5x + 7) \geqslant 25 \end{array}\right|$

c. $\left.\begin{array}{r} (x + 1)^2 < (5 - x)^2 \\ -x \geq 4 + 6x \end{array}\right|$

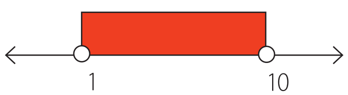
b. $\left.\begin{array}{r} 10 + \frac{1}{2}x < \frac{3}{4}x \\ \frac{2}{5}x - 4 \geqslant \frac{3}{5} \end{array}\right|$

d. $\left.\begin{array}{r} 7x > 1 + 3x \\ 1 + x^2 \leqslant x^2 - 2x \\ 7x - 5 \geqslant -6x \end{array}\right|$

8. **Representa gráficamente el conjunto solución de los sistemas de inecuaciones lineales de la pregunta anterior.**

9. **Escribe un sistema con tres inecuaciones lineales cuyo conjunto solución sea el intervalo representado en los siguientes diagramas.**

a.



b.

c.

d.

10. **Para qué valor de b, el intervalo $]-6, -3[$ es el conjunto solución del sistema:** $\left.\begin{array}{r} 2x + 3 < x \\ 3(5x + b) > 25 \end{array}\right|$

11. **Usando sistemas de inecuaciones lineales, resuelve las siguientes inecuaciones que no son lineales.**

a. $\dfrac{x + 3}{1 - 4x} \geqslant 0$

c. $\dfrac{2x - 1}{x + 4} \geqslant 8$

b. $x(x - 1) < 0$

d. $x^2 + 5x + 6 > 0$

12. **Resuelve los siguientes problemas.**

a. CONEXIÓN CON LA ZOOLOGÍA ▶ Un caracol se desplaza a una rapidez comprendida entre 3 m/h y 5 m/h. Determina entre qué valores se encuentra la distancia recorrida por el caracol, al cabo de 5 horas.

b. El cateto menor de un triángulo rectángulo mide 30 cm y el cateto mayor está comprendido entre 40 cm y 60 cm. ¿Cuál es menor valor que puede adoptar su hipotenusa?, ¿y el mayor valor?

c. Respecto del triángulo del problema anterior, ¿cuál es el máximo valor que podría tener su perímetro?, ¿y su área?

d. Calcula el volumen de un cubo, si la medida de sus aristas varían entre 3 cm y 5 cm.

e. ¿Cuántos números naturales hay tales que la suma de dicho número con su mitad sea mayor que su doble disminuido en 1 y que el doble de dicho número sea mayor que 9?

f. Si las longitudes de dos lados de un triángulo son 15 cm y 19 cm, ¿cuáles son las posibles longitudes para el tercer lado, sabiendo que este es un número natural?, ¿cuáles son los posibles valores que tendría su perímetro?

g. CONEXIÓN CON LA NUTRICIÓN ▶ El IMC de una persona se calcula dividiendo su masa, en kilogramos, por el cuadrado de su estatura, medida en metros. Si Alejandra mide 1,58 m, ¿cuál debería ser su masa, de manera que su IMC esté comprendido entre 20 y 25 kg/m^2?

h. Un túnel mide 720 metros y en su interior, la velocidad permitida varía entre los 45 km/h y 100 km/h (ambos extremos incluidos). Expresa, por medio de un intervalo, el tiempo que podría demorar un automóvil en cruzar el túnel.

Síntesis

Representar conjuntos numéricos, usando lenguaje matemático.

1. **Escribe por extensión el conjunto:**

$$A = \{x \in \mathbb{N} \ / \ x \text{ es divisor de } 72\}$$

2. **Escribe por comprensión el conjunto:**

$$C = \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54\}$$

- ¿Cómo escribes por extensión un conjunto definido por comprensión?
- ¿Cómo escribes por comprensión un conjunto definido por extensión?

Expresar información por medio de desigualdades.

3. **Modela con una desigualdad la situación: "La cantidad de gente que fue al concierto no fue inferior que 5 000 personas".**
4. **¿Es cierta la desigualdad $(-7)^3 + 1 > (-7 + 1)^3$?**

- ¿Cómo verificaste si la desigualdad es cierta?

Representar conjuntos de números reales, usando intervalos.

5. **Representa con un intervalo el conjunto de todos aquellos números reales que son mayores o iguales a –8 y menores que 17.**
6. **Nombra 5 números que pertenezcan al intervalo]–1, 0].**

- ¿Para qué se usan los intervalos de números reales?
- ¿Estás de acuerdo con que los intervalos]3, 10[y [4, 9] representan el mismo conjunto de números reales?, ¿por qué?

Conocer y utilizar las propiedades de las desigualdades.

7. **Si el radio de una circunferencia varía entre 2 y 8 cm, ¿en cuánto varía su perímetro?**
8. **Un número es mayor que –4 y menor que 8. ¿Entre qué valores se encuentra su opuesto, aumentado en 8?**

- Explica con tus palabras el procedimiento que utilizaste para realizar la actividad 7.
- ¿Qué propiedades de las desigualdades utilizaste para resolver la actividad 8?

Representar conjuntos de números reales, usando intervalos.

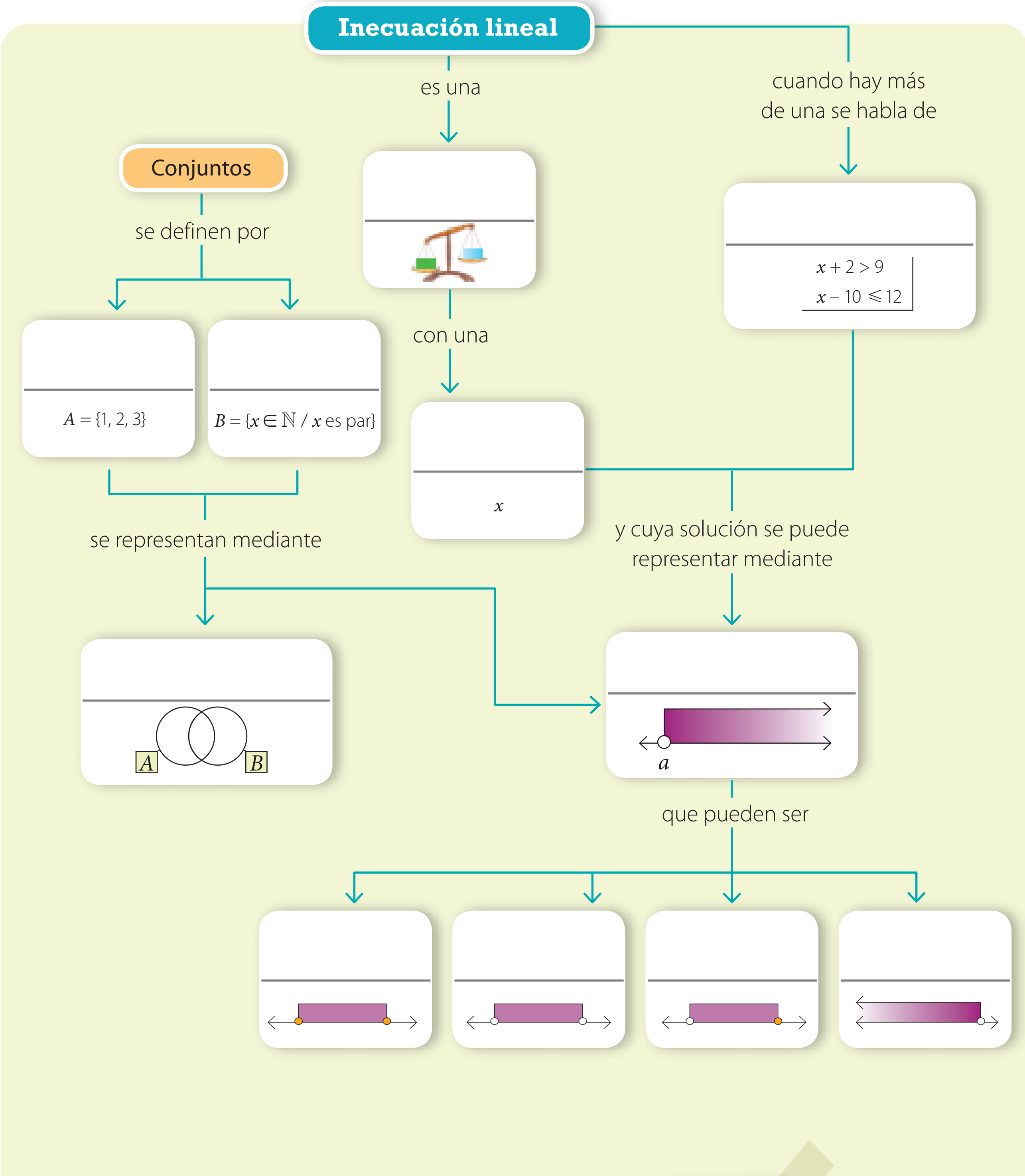
9. **Si x es un número real, ¿cuál es el conjunto solución de la inecuación $3x + 6 < 2 - 7x$?**
10. **Resuelve el sistema de inecuaciones:**

$$\begin{array}{r|} 8x - 9 > 15 \\ x - 2 \leqslant 4 \\ \hline \end{array}$$

11. **¿Entre qué valores debe medir la arista de una caja, con forma cúbica, para que su volumen sea, a lo más 3,375 m³?**

- Explica los pasos que seguiste para resolver el problema planteado en la actividad 11.

12. **Completa el mapa conceptual con los conceptos fundamentales trabajados en la unidad.**



- Compara tu resultado con el de tus compañeros. ¿Hubo diferencias?, ¿cuáles?
- Revisa en el solucionario del Texto los conceptos correctos. ¿Qué otros conceptos agregarías?, ¿en qué lugar del mapa los pondrías?, ¿por qué?

Evaluación final

Aplica lo aprendido en la unidad para desarrollar las siguientes actividades.

1. A partir de los siguientes conjuntos, realiza las operaciones dadas.

$A = \{x \in \mathbb{N} \ / \ x$ es divisor de 16$\}$

$B = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x$ es par $\wedge$ x tiene una cifra$\}$

$C = \{-8, -6, -4, 3, 6, 9\}$

a. $B \cup C$

b. $B \cap A$

c. $(C \cup B) \cup A$

d. $B \cap A \cap C$

2. Expresa la información de las siguientes situaciones utilizando desigualdades.

a. Sólo pueden ingresar niños mayores de 10 años y cuya estatura no sea inferior a 1,20 m.

b. Una persona tiene sobrepeso si su IMC es mayor que 25 y menor o igual que 30.

c. El porcentaje de tornillos defectuosos no debe superar el 10 % del total de la producción.

3. Usando desigualdades, representa por comprensión los siguientes conjuntos.

a. Números naturales mayores que –7 e inferiores que 13.

b. Números primos menores que 45.

c. Números de dos cifras.

4. Representa por extensión los conjuntos del ítem anterior.

5. Expresa los siguientes conjuntos como intervalos o como unión o intersección de estos.

a. Los números reales mayores que 3 y menores que 12.

b. Los números reales menores que 31.

c. Los números reales no menores que 8.

d. Los números reales no mayores que 4 pero menores que 7.

e. Los números reales que están entre 1 y 8, y entre 7 y 9.

6. Resuelve las siguientes inecuaciones.

a. $5x > 3$

b. $1 + 10x \leqslant 1$

c. $(x - 1)(x - 2) > 2 + x^2$

d. $4x + 10 \geqslant x + 7$

7. Representa gráficamente los siguientes intervalos, en la recta real.

a. $[2, 8[$

b. $\left[-\frac{7}{4}, \frac{5}{3}\right]$

c. $]-5, 1]$

d. $]0, +\infty[$

8. Si $-3 \leqslant r < 8$, determina entre qué números varía cada una de las siguientes expresiones.

a. $5r$

b. $\frac{r}{4} - 6$

c. $5r + 9$

d. $\frac{2}{8} - \frac{5r}{9}$

9. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita.

a. $\left.\begin{array}{l} x + 3 > 13 \\ 5x + 6 < 8 \end{array}\right|$

b. $\left.\begin{array}{l} 2x + 2 > x \\ 3x + 9 \leqslant 8 \end{array}\right|$

c. $\left.\begin{array}{l} 1{,}5x + 0{,}3 < x \\ 0{,}4 - x \geqslant 7{,}3 \end{array}\right|$

d. $\left.\begin{array}{l} 8x + 1{,}1 < 17 - x \\ 2{,}9 + x \geqslant 8 \end{array}\right|$

10. Para acceder a un subsidio, el postulante debe tener un sueldo inferior a \$ 300 000 mensuales y además, el 15 % de su salario debe ser mayor que \$ 12 000. Determina entre qué valores tiene que ganar mensualmente una persona para poder acceder al beneficio.

11. El precio de una entrada para un concierto fluctúa entre \$ 2 460 y \$ 10 980. Si Camila quiere comprar 3 entradas y además, quedar con \$ 2 500 para comprar bebidas, ¿cuánto dinero necesita como mínimo?, ¿y como máximo?

12. La suma de tres números pares consecutivos es mayor que 72 y menor o igual que 84. ¿Cuáles son todos los posibles valores para el número central?

13. ¿Para qué valores de x se cumple que: $5x - 6 < 3x + 6 \leqslant 8 - 9x$?

Marca la opción correcta en los ítems 14 al 20.

14. **¿Qué condición deben cumplir los números a y b para que $]-\infty, a] \cap [b, +\infty[= \varnothing$?**

A. $a = b$
B. $a < b$
C. $a > b$
D. $a + b < 0$
E. $a + b > 0$

15. **¿Cuál de las siguientes inecuaciones tiene el mismo conjunto solución que la inecuación $\frac{2x+6}{5} < 0$?**

A. $x + 3 \geqslant 0$
B. $x + 3 > 0$
C. $\frac{2}{x+3} \geqslant 0$
D. $x + 3 < 0$
E. $x + 3 \leqslant 0$

16. **Si p es un número real tal que $4 < p < 9$, ¿entre cuáles valores varía el opuesto de p disminuido en 4?**

A. 0 y 5.
B. –5 y 0.
C. –13 y –8.
D. –8 y –5.
E. 8 y 13.

17. **¿Cuál de las siguientes desigualdades describe la situación: "El perímetro del círculo de radio r no es inferior que 35"?**

A. $\pi r^2 \geqslant 35$
B. $2\pi r \geqslant 35$
C. $r \geqslant 35$
D. $2\pi r > 35$
E. $\pi r^2 > 35$

18. **¿Con cuál intervalo se puede representar el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -8 < x \leqslant 3\}$?**

A. $[-8, 3]$
B. $]-8, 3[$
C. $[-8, 3[$
D. $]-8, 3]$
E. $[8, -3]$

19. **¿Qué intervalo es equivalente a $(]-7, 5[\cup]9, 12]) \cap]-10, -4[$?**

A. $]-10, 12]$
B. $]-10, -4[$
C. $[-7, -4[$
D. $[-10, -7]$
E. $[-4, 5[$

20. **¿Cuál es la solución del sistema $\left.\begin{array}{r} 4x + 10 \geqslant -6 \\ 7 - x > 3x - 21 \end{array}\right|$?**

A. $[-4, -7]$
B. $[-4, 7[$
C. $]-4, 7]$
D. $]-2, 1]$
E. $[-2, 1[$

Mis logros

Verifica en el solucionario del Texto si tus respuestas son correctas. Si tuviste respuestas incorrectas, marca en la tabla el objetivo de aprendizaje correspondiente y revisa las páginas indicadas.

Criterio	Ítems	¿Que debo hacer si tengo dudas?
Representar conjuntos numéricos, usando lenguaje matemático.	1 y 4	Revisa las páginas 84 a 87.
Expresar información por medio de desigualdades.	2, 3 y 17	Revisa las páginas 88 a 91.
Representar conjuntos de números reales, usando intervalos	5, 7, 14, 18 y 19	Revisa las páginas 92 a 95.
Conocer y utilizar las propiedades de las desigualdades.	8, 11 y 16	Revisa las páginas 96 a 101.
Resolver inecuaciones lineales y sistemas de inecuaciones.	6, 9, 10, 12, 13, 15 y 20	Revisa las páginas 112 a 124.

Vuelve a la página 79 y lee lo que se esperaba que aprendieras en esta unidad. ¿Crees que lo aprendiste?, ¿por qué? Si aún tienes dudas, acláralas con tu profesor antes de continuar

Actividades complementarias

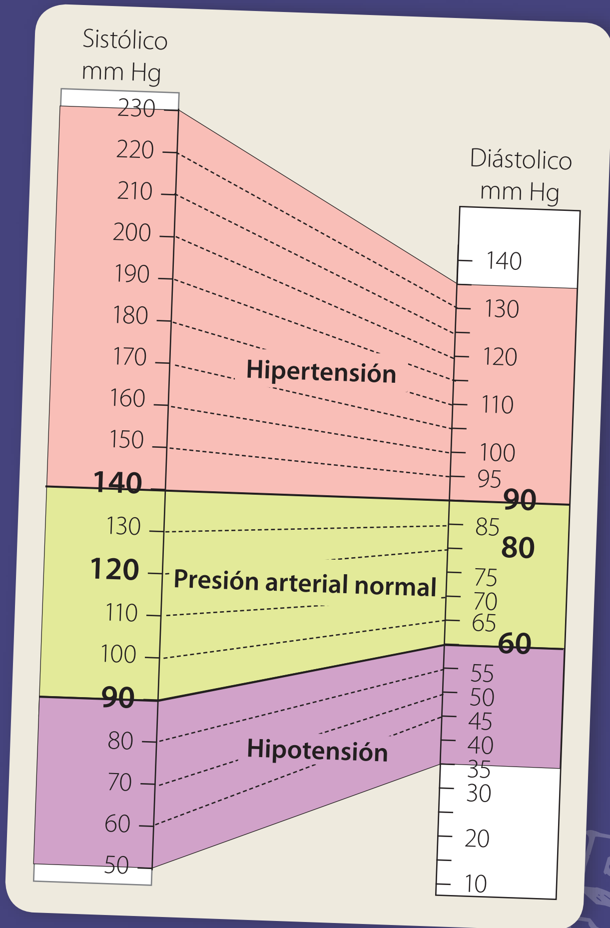
Presión arterial

Cuando hablamos de hipertensión, generalmente lo asociamos a un problema que afecta solo a las personas mayores de edad. Sin embargo, los jóvenes también pueden sufrir problemas asociados a la presión arterial debido a distintos factores, algunos de ellos como el consumo de bebidas alcohólicas, el sedentarismo y la obesidad.

En lenguaje técnico, la presión o tensión arterial se refiere a aquella medida de fuerza que ejerce la sangre contra las paredes de los vasos sanguíneos. En ese momento, cuando el corazón late y los ventrículos alcanzan su contracción máxima, la presión sanguínea se llama presión sistólica. En cambio, cuando el corazón está en reposo y los ventrículos se relajan, la presión sanguínea disminuye y se le conoce como presión diastólica.

De acuerdo con los valores de la presión sistólica y de la diastólica, generalmente medidos en milímetros de mercurio (mmHg), se puede establecer una relación para indicar si una persona tiene presión arterial baja (hipotensión), normal (normotensión) y alta (hipertensión).

Como observas en el gráfico, una persona con presión arterial normal óptima es considerada de esta forma: 120/80 mmHg, donde 120 mmHg corresponde a la presión sistólica y 80 mmHg a la presión diastólica.



1. **Según los datos del gráfico anterior, responde.**
   a. ¿Entre qué intervalos se puede considerar una persona con presión arterial baja?
   b. Interpreta en intervalos , la presión arterial baja, normal y alta en cuanto a las presiones sistólica y diastólica y grafícalos.
   c. Si una persona tiene una presión sistólica de 142 mmHg y una presión diastólica de 91 mmHg, ¿Es considerada normotensa?, ¿por qué? Y si una persona tiene una presión de 88/59, ¿es considerada normotensa? Fundamenta.
   d. ¿Por qué es necesario chequearse la presión arterial?, ¿qué harías para tener una presión arterial normal?
   e. ¿Qué ocurriría si una persona tiene una presión de 155/40 mmHg? Averigua y coméntalo con tus compañeros.

Peligro en el aire

El aire que respiramos diariamente contiene sustancias como monóxido de carbono, ozono, material particulado respirable (PM10, medido en microgramos por metro cúbico normalizado [$\mu g/m^3N$]), y otras partículas en suspensión, que al sobrepasar las normas de concentración permitidas representan un alto riesgo para nuestra salud.

Archivo editorial

La situación anterior ha motivado a las autoridades a establecer criterios y legislaciones para el cuidado del aire, es así como se crea el ICAP (Índice de calidad del aire por material particulado), que servirá para determinar estados de alerta, preemergencia y emergencia ambiental, y así establecer las medidas necesarias, según los valores dados en la siguiente tabla.

Nivel	ICAP	PM10 ($\mu g/m^3N$)	Categoría	Episodio
0	0 - 100	0 - 150	bueno	
0	101 - 200	151 - 195	regular	
1	201 - 300	196 - 240	malo	alerta
2	301 - 400	241 - 285	crítico	preemergencia
2	401 - 500	286 - 330	peligroso	preemergencia
3	> 500	> 330	excede	emergencia

1. **Según los datos de la tabla anterior, responde.**
   a. ¿En qué intervalos de medición de PM10 hay un episodio de preemergencia? Exprésalo como unión de intervalos y grafícalo.
   b. ¿Qué podemos afirmar respecto a la calidad del aire si el PM10 se encuentra cercano a 289 $\mu g/m^3N$?
   c. ¿Es correcto afirmar que cuando el índice de ICAP está en el intervalo]300, 400], la calidad del aire se considera crítica? Justifica.
   d. Discute con tus compañeros: ¿qué medidas implementarían para mejorar la calidad del aire?

Demostraciones erróneas

A continuación se muestran las demostraciones de algunas desigualdades que obviamente no se cumplen. Eso quiere decir que hubo un error en la demostración. ¿Cuál es el error en cada caso? Identifícalo.

Demostración de que 0 > 2

Elegimos un número mayor que 2	$x > 2$
Multiplicamos por 2	$2x > 4$
Restamos x^2	$2x - x^2 > 4 - x^2$
Factorizamos	$x(2 - x) > (2 + x)(2 - x)$
Dividimos por $(2 - x)$	$x > 2 + x$
Restamos x	$0 > 2$

Demostración de que 1 < 0

Tomamos un número x tal que sea menor que 1	$x < 1$
Aplicamos logaritmo a ambos lados de la desigualdad	$log(x) < log(1)$
Como $log(1) = 0$, remplazamos	$log(x) < 0$
Dividimos por $log(x)$	$\frac{log(x)}{log(x)} < \frac{0}{log(x)}$
Reducimos	$1 < 0$

Demostración de que 1 < 0

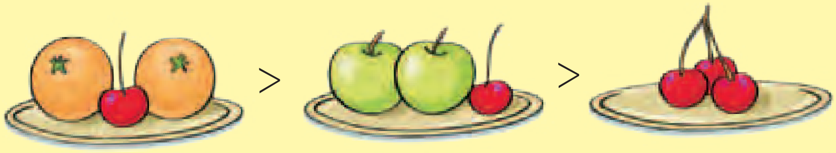
Tomamos un número x tal que sea negativo	$x < 0$
Dividimos por x	$\frac{x}{x} < \frac{0}{x}$
Reducimos ambos lados de la desigualdad	$1 < 0$

Demostración de que 1 < 0

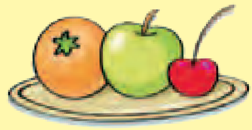
Partimos con una desigualdad obvia	$\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$
Reescribimos el primer término	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}$
Aplicamos logaritmo a ambos lados de la desigualdad	$log\left(\frac{1}{2}\right)^2 < log\left(\frac{1}{2}\right)$
Usamos la propiedad del logaritmo de una potencia	$2\ log\left(\frac{1}{2}\right) < log\left(\frac{1}{2}\right)$
Dividimos por $log\left(\frac{1}{2}\right)$	$2 < 1$

Ejercicios de profundización

1. **Los siguientes platillos están ordenados en forma decreciente según su masa. Observa:**



¿Dónde ubicarías el platillo de la derecha? Justifica tu respuesta.



2. **Resuelve los siguientes problemas.**
   a. En un concurso participaron 7 amigas y los resultados fueron los siguientes:
      - Rita obtuvo menos puntos que María.
      - Luisa obtuvo menos puntos que Cecilia.
      - Nora obtuvo igual puntaje que Sandra.
      - Rita obtuvo más puntos que Zoila.
      - Luisa obtuvo el mismo puntaje que María.
      - Nora obtuvo más puntos que Luisa.

      Entre Nora y María, ¿quién obtuvo más puntos?

   b. Álex, Bernabé, Cristián, David y Emerson son amigos. Álex es más alto que Cristián, Bernabé es más bajo que David, y Cristián es más alto que Emerson y que David. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera? Marca la opción correcta.
      A. El más bajo es Bernabé.
      B. Cristián no es más alto que Bernabé.
      C. Emerson es más bajo que Álex.
      D. No es cierto que Álex sea el más alto.
      E. Emerson y David tienen la misma estatura.

3. **Determina el dominio de las siguientes funciones.**
   a. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ b. $f(x) = log(x^2 + 5x + 6)$ c. $f(x) = \sqrt{log(x)}$

4. **Si a y b son dos números reales, demuestra que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$.**

5. **Si $a > 1$ y $b > 1$, demuestra que $ab + 1 > a + b$.**

6. **Demuestra la desigualdad MA - MG: si a y b son dos números positivos, entonces: $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.**

7. **Demuestra la desigualdad MA - MH: si a y b son dos números positivos , entonces: $\frac{a+b}{2} \geqslant \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.**

8. **Usa la desigualdad MA - MG para demostrar que si x es un número real, entonces: $2x^3 \leqslant x^2 + x^4$.**

Unidad

3 Vectores

Latinstock

Antes aprendí a:

- Identificar el plano cartesiano y usarlo para representar puntos y figuras geométricas.
- Representar gráficamente vectores en el plano cartesiano y aplicar la suma de vectores para describir traslaciones de figuras geométricas.
- Determinar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.
- Deducir e interpretar la pendiente y el intercepto de una recta con el eje de las ordenadas y la relación de estos valores con las distintas formas de la ecuación de la recta.

El lanzamiento del martillo es una competición de atletismo donde se lanza una bola de metal unida a una empuñadura mediante un cable de acero, denominado martillo. Gana quien lo arroja a una mayor distancia. Esta prueba requiere tanto de fuerza como de destreza y velocidad, ya que el o la atleta debe balancear el martillo y, luego, girar con él para lanzarlo con la mayor velocidad posible. Se incorporó para hombres en el año 1900 en los Juegos Olímpicos de París y para mujeres en el año 2000, en Sidney.

1 **¿Qué fuerzas actúan sobre el martillo mientras el atleta gira con él antes del lanzamiento?, ¿cómo las representarías?**

2 **¿Qué fuerzas actúan sobre el martillo mientras está en el aire?, ¿podrías señalarlas en la imagen? ¿Cómo las representaste?, ¿por qué?**

En esta unidad podré:

- Comprender que puntos, rectas y planos pueden ser representados en el sistema coordenado tridimensional y determinar la representación cartesiana y vectorial de la recta en el espacio.
- Deducir la distancia entre dos puntos ubicados en un sistema de coordenadas en tres dimensiones y aplicarla al cálculo del módulo de un vector.
- Identificar y describir puntos, rectas y planos en el espacio; deducir la ecuación vectorial de la recta y su relación con la ecuación cartesiana.

Lo utilizaré para:

- Deducir la ecuación vectorial del plano y su relación con la ecuación cartesiana.

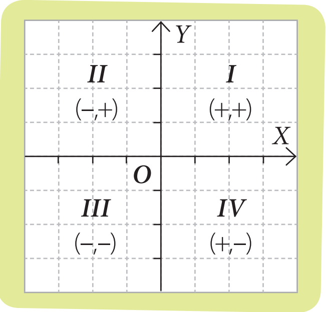
Para recordar

Observa los siguientes cuadros que te permitirán recordar los prerrequisitos para activar tus conocimientos previos y resolver los ejercicios que se proponen en las páginas 146 y 147.

Identificar el plano cartesiano y usarlo para representar puntos y figuras geométricas.

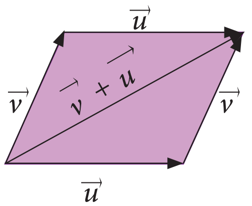
- El plano cartesiano está formado por dos rectas numéricas (ejes) perpendiculares entre sí.
- El eje horizontal se llama eje de abscisas o también eje X; el eje vertical se llama eje de ordenadas o eje Y, y el punto O, que es la intersección de los ejes coordenados, se llama origen de coordenadas.
- Cada punto del plano está asociado a dos coordenadas, la primera vinculada con el eje de abscisas o eje X, y la segunda vinculada con el eje de ordenadas o eje Y.
- Según los signos de las coordenadas de cada punto, en el plano se determinan cuatro cuadrantes:
  - Cuadrante I, con ambas coordenadas positivas; (x, y)
  - Cuadrante II, con abscisa negativa y ordenada positiva; $(-x, y)$
  - Cuadrante III, con ambas coordenadas negativas; $(-x, -y)$
  - Cuadrante IV, con abscisa positiva y ordenada negativa $(x, -y)$.

  (Considerando $x > 0$, $y > 0$).
- La distancia entre dos puntos P y Q, de coordenadas (a, b) y (c, d), es $d(P, Q) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$.



Representar gráficamente vectores en el plano cartesiano y aplicar la suma de vectores para describir traslaciones de figuras geométricas.

- Un vector es un segmento de recta dirigido caracterizable mediante una magnitud o módulo, una dirección y un sentido.
- Los vectores se representan por flechas cuya longitud es el módulo del vector, la recta que contiene al vector es su dirección, y el sentido del vector queda indicado por la punta de la flecha. Dos vectores que tengan iguales módulo, dirección y sentido se consideran iguales.
- El vector 0 corresponde a un vector, pero de magnitud 0, y sin dirección ni sentido.
- La adición de dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ se realiza geométricamente formando un paralelogramo como muestra la figura. El vector suma $\vec{v} + \vec{u}$ es la diagonal del paralelogramo que va desde el inicio de $\vec{v}$ y llega a la punta de flecha de $\vec{u}$.



Resolver problemas asociados a sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, representar en el plano cartesiano y discusión de la existencia y pertinencia de las soluciones.

- Todo sistema de dos ecuaciones lineales presenta tres posibilidades en cuanto a sus soluciones.
  - Si una de las ecuaciones de la recta es una amplificación de la otra, el sistema tiene infinitas soluciones, ya que las rectas son coincidentes.
  - Si ambas rectas tienen igual valor de la pendiente y no son coincidentes, el sistema no tiene solución, ya que sus rectas son paralelas.
  - Si las rectas no son coincidentes ni paralelas, el sistema tiene una única solución, ya que sus rectas son secantes.

Determinar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos. Deducir e interpretar la pendiente y el intercepto de una recta con el eje de las ordenadas y la relación de estos valores con las distintas formas de la ecuación de la recta.

- La **pendiente** de un segmento de extremos $P(a, b)$ y $Q(c, d)$ es $m(P, Q) = \frac{b-d}{a-c}$.
- Una **recta en el plano** es un conjunto infinito de puntos tales que tres puntos distintos P, Q y R de la recta, tienen igual pendiente, tomados de dos en dos. Es decir, $m(P, Q) = m(Q, R) = m(P, R)$.
- Dados $P(a, b)$ y $Q(c, d)$ dos puntos distintos, entonces podemos determinar la única recta que pasa por P y Q dando al punto de la recta $X(x, y)$ la siguiente condición: $m(X, Q) = m(P, Q)$.
  Esto es: $\frac{y-d}{x-c} = \frac{b-d}{a-c}$.
- Al simplificarla, podemos escribir la ecuación de la recta en su **forma principal**: $y = mx + n$, donde m corresponde a la pendiente de la recta y n se relaciona con el intercepto con el eje de ordenadas.
- Dada m la pendiente de la recta y $P(a, b)$ un punto de ella, la ecuación de la recta es: $\frac{y-b}{x-a} = m$.
  Esta ecuación se conoce como la ecuación **punto-pendiente**.

¿Cuánto sé?

Antes de comenzar, resuelve las siguientes actividades, que te permitirán recordar conceptos y procedimientos necesarios para abordar los contenidos de esta unidad.

1. **Responde las siguientes preguntas.**
   a. Si la abscisa y la ordenada tienen el mismo signo, ¿en qué cuadrante se encuentra el punto (x, y)?
   b. Si la ordenada es negativa y la abscisa es positiva, ¿en qué cuadrante se encuentra el punto (x, y)?

2. **Verifica que los puntos $A(-4, 2)$, $B(2, 10)$ $C(20, 14)$ y $D(14, 6)$ son vértices de un paralelogramo. Justifica.**

3. **Sitúa los siguientes puntos en el plano cartesiano: $A(1, 3)$, $B(-3, 2)$, $C(4, -3)$, $D(0, 4)$, $E(-4, 0)$, $F(-5, -2)$, $G(0, -1)$, $H(-8, 5)$.**

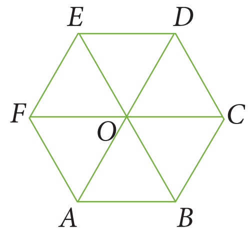
4. **Determina el signo de k, según lo indicado.**
   a. $(k, 1)$ está en el cuadrante II.
   b. $(k, 3k)$ está en el cuadrante III.
   c. $(k, 1 - k)$ está en el cuadrante II.
   d. $(1, 3 + k)$ está en el cuadrante I.

5. **Calcula la distancia entre los siguientes puntos:**
   a. (3, 5) y (4, 1).
   b. (–2, 3) y (3, 3).
   c. (–4, 6) y (4, –6).
   d. (5, –2) y (–5, –2).
   e. (4, 7) y (5, 1).
   f. (–3, 2) y (8, 5).
   g. (6, –4) y (1, 1).
   h. (–4, 9) y (12, –10).

6. **Calcula el perímetro de los triángulos ABC.**
   a. $A(0, 0)$, $B(3, 0)$ y $C(0, 4)$
   b. $A(3, -5)$, $B(1, 0)$ y $C(-2, 4)$
   c. $A(-2, 1)$, $B(-4, 5)$ y $C(0, 1)$
   d. $A(2, 5)$, $B(-1, -3)$ y $C(6, 1)$

7. **Aplicando el teorema de Pitágoras, prueba que los puntos $T(10, 5)$, $U(3, 2)$ y $V(6, -5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.**

8. **Utilizando los vectores que determinan los vértices y el centro del hexágono regular de la figura, halla los vectores solución de las siguientes operaciones:**
   a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OC}$
   b. $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{ED}$
   c. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AB}$
   d. $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OC}$



9. **Determina si los siguientes tríos de puntos son colineales o no. Justifica.**
   a. $A(1, 1)$, $B(2, -1)$ y $C(4, -8)$.
   b. $D(8, 1)$, $E(-2, 2)$ y $F(28, -1)$.
   c. $G(-5, 5)$, $H(-4, 4)$ e $I(3, -3)$.
   d. $J(6, 1)$, $K(5, 2)$ y $L(4, 3)$.
   e. $M(25, -1)$, $N(18, 1)$ y $O(33, -1)$.

10. **Determina, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados:**
    a. (5, 1) y (7, 2)
    b. (–1, 4) y (6, –2)
    c. (4, –2) y (13, 9)
    d. (23, 7) y (58, 7)

11. **Grafica las siguientes ecuaciones de la recta.**
    a. $y = \frac{1}{2}x + 7$
    b. $y = -3x + 3$
    c. $y = -\frac{1}{4}x + 2$

12. **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones y analiza sus soluciones.**
    a. $\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 14 \\ x - y &= 28 \end{aligned}\right|$
    b. $\left.\begin{aligned} x + y &= 42 \\ 2x + 2y &= 24 \end{aligned}\right|$
    c. $\left.\begin{aligned} 4x - 2y &= 24 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y &= 3 \end{aligned}\right|$

Marca la opción correcta en los ítems 13 a 18.

13. ¿Cuál es la distancia entre (2, 3) y (12, 31)?

A. $\sqrt{327}$
B. $\sqrt{221}$
C. $2\sqrt{221}$
D. 884
E. 26

14. ¿Cuál de los siguientes puntos está a 10 unidades de distancia respecto del origen del plano cartesiano?

A. $P(7, 3)$
B. $Q(1, -9)$
C. $R(-3, -2)$
D. $S(-6, 8)$
E. $T(10, 10)$

15. ¿Cuál es el punto de intersección entre las rectas $x + y = 3$ y $x - y = 0$?

A. $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$
B. $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$
C. (2, 1)
D. (1, 1)
E. No se intersecan.

16. Si $\begin{array}{l|} x + y = 12 \\ x - y = 4 \end{array}$, ¿cuánto es xy?

A. –32
B. 0
C. 32
D. 48
E. Ninguna de las anteriores.

17. ¿Cuál de las siguientes rectas contiene a $P(3, 7)$ y $Q(4, 15)$?

A. $3x + 7y - 19 = 0$
B. $8x - y - 17 = 0$
C. $8x - y = 0$
D. $3x - 7y = 0$
E. $4x - 15y + 10 = 0$

18. ¿Cuál de los siguientes puntos pertenece a la recta $5x - 3y + 1 = 0$?

A. (1, 2)
B. (3, 5)
C. (4, –7)
D. (–3, –5)
E. (–2, –3)

Revisa tus respuestas en el solucionario y marca las correctas.

Criterio	Ítems
Identificar el plano cartesiano y usarlo para representar puntos y figuras geométricas.	1, 2, 3, 4, 5, 6, y 7
Representar gráficamente vectores en el plano cartesiano y aplicar la suma de vectores para describir traslaciones de figuras geométricas.	8, 13 y 14
Determinar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.	9, 10, 11, 12 y 16
Deducir e interpretar la pendiente y el intercepto de una recta con el eje de las ordenadas y la relación de estos valores con las distintas formas de la ecuación de la recta.	15, 17 y 18

Si tuviste errores, revisa las páginas 144 y 145 del Texto, aclara tus dudas y corrígelos antes de continuar.

Vectores en el plano cartesiano

Aprenderé a: identificar y describir puntos en el plano cartesiano. Representar gráficamente vectores en el plano y deducir la distancia entre dos puntos en el plano y aplicarla al cálculo de módulo de un vector.

Repaso

1. Dibuja un plano cartesiano y ubica los siguientes puntos:
   a. $P(4, 5)$
   b. $Q(-2, 3)$
   c. $R(3, -2)$
   d. $S(0, 4)$

Observa el siguiente mapa y sigue las trayectorias que han hecho Vicente y Andrea, desde la Plaza de la Independencia:

Vicente caminó por Aníbal Pinto hasta Chacabuco, y dobló hacia su derecha hasta Colo-Colo. Andrea se fue por O'Higgins hasta llegar a Tucapel.

- ¿Quién recorrió más?, ¿por qué?
- Ahora, dibuja una flecha que indique el desplazamiento de cada uno. ¿Quién se desplazó más? Justifica.
- Más tarde, Vicente y Andrea se reunieron en la Plaza Perú. ¿Cómo se representa el desplazamiento de cada uno?, ¿cuál es su desplazamiento total, en cada caso?

Invitado especial

René Descartes fue uno de los grandes filósofos y científicos del siglo XVII. Inventó la geometría analítica, unificando la geometría y el álgebra, al mostrar en su obra Géométrie (1637) que su sistema de ecuaciones cuadráticas unificaba las curvas llamadas cónicas. Ello también posibilitó el desarrollo de la física y la ingeniería.
Sin embargo, Descartes es más conocido por su principio filosófico "pienso, luego existo" (deduzco que existo porque puedo pensar).

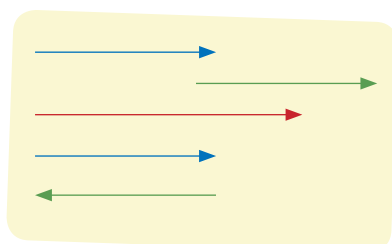
El desplazamiento, tal como la velocidad y la fuerza, es un **vector**.

Un vector se caracteriza por su:

- **módulo**: es el valor numérico de la magnitud vectorial. Se representa gráficamente por la longitud de la flecha.
- **dirección**: está dada por la orientación en el plano o en el espacio de la recta que lo contiene.
- **sentido**: se muestra mediante una punta de flecha situada en el extremo del vector, indicando hacia qué lado de la línea de acción se dirige el vector.

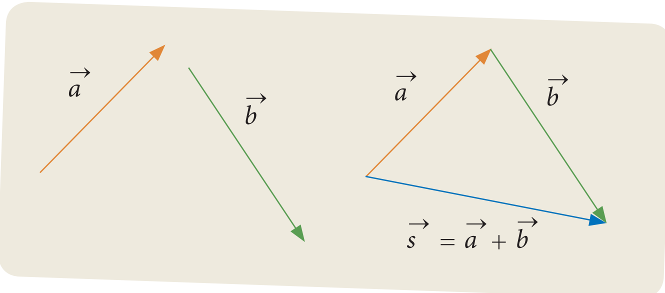
El vector se representa por un segmento orientado con origen en A y extremo en B, se representa por el símbolo $\overrightarrow{AB}$. La distancia entre A y B representa gráficamente el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

Dos segmentos orientados representan al mismo vector si son paralelos (luego, tienen la misma dirección), tienen el mismo sentido y el mismo módulo o magnitud, sin importar dónde está ubicado su origen. Si alguna de estas condiciones no se cumple, decimos que los vectores son distintos.



Además, decimos que dos vectores son opuestos si tienen igual módulo y dirección, pero sentido contrario.

Con los vectores se pueden calcular algunas operaciones; por ejemplo, una forma de determinar gráficamente el vector suma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ es dibujar uno de ellos, por ejemplo $\vec{a}$ y luego representar el vector $\vec{b}$ colocando el origen de $\vec{b}$ en el extremo de $\vec{a}$. Entonces, el vector suma tiene su origen en el origen de $\vec{a}$ y su extremo, en el extremo de $\vec{b}$.

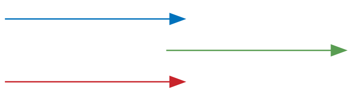


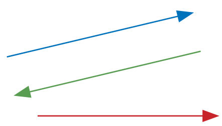
Tomo nota

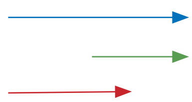
- Un vector es un segmento de recta dirigido caracterizable mediante una magnitud o módulo, una dirección y un sentido.
- Un vector puede representarse usando flechas sobre las letras correspondientes al punto inicial y final, esto es, $\overrightarrow{AB}$ o bien, sobre una letra minúscula, es decir, $\vec{u}$.
- Dos vectores son iguales solo si son paralelos, con igual sentido y con el mismo módulo, a la vez.
- El vector $\vec{0}$ corresponde a un vector, pero de módulo 0, y se considera que no tiene dirección ni sentido.

Actividades

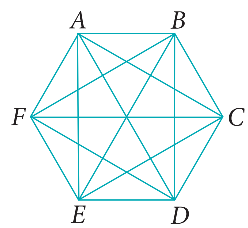
1. Determina si los siguientes vectores son iguales, opuestos o distintos, en cada caso. Justifica.

a. 

b. 

c. 

2. La figura *ABCDEF* es un hexágono regular. Determina:



a. dos parejas de vectores con igual sentido, dirección y módulo;

b. una pareja de vectores de distinta dirección pero con igual módulo;

c. una pareja de vectores con distinto módulo pero con igual dirección.

3. En cada caso, dibuja dos vectores:

a. que tengan la misma dirección, distinto sentido y que el módulo de uno sea el triple del módulo del otro;

b. con el mismo módulo, pero distinta dirección;

c. de la misma dirección, el mismo sentido y módulos diferentes;

d. de módulo y dirección iguales, pero distintos sentidos.

Desafío

¿Qué diferencias hay entre $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$?

4. A partir de la siguiente figura, determina en cada caso, si el enunciado es verdadero o falso.

a. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{f}$

b. $\vec{c} = \vec{d} - \vec{e} + \vec{f}$

c. $\vec{e} + \vec{d} = \vec{g} + \vec{h}$

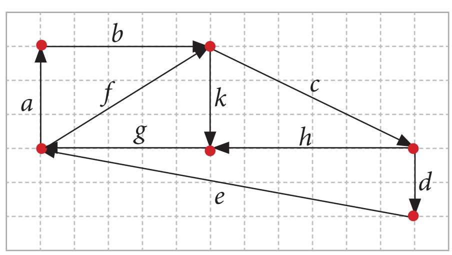
d. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{k} + \vec{g} = 0$

e. $\vec{k} + \vec{g} = \vec{f}$

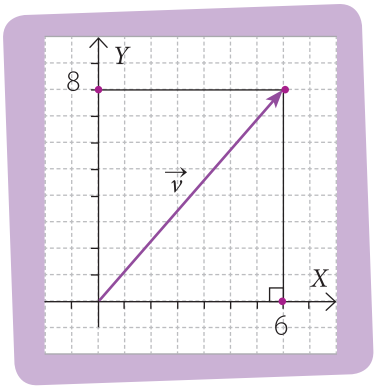
f. $\vec{g} + \vec{h} + \vec{e} = \vec{d}$

g. $\vec{h} - \vec{c} = \vec{g} - \vec{f}$

h. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{h} + \vec{g} = 0$



Cuando el origen de un vector coincide con el origen de un sistema de coordenadas, su extremo coincidirá con un punto del plano y lo representamos utilizando este punto y con paréntesis rectos, por ejemplo $\vec{v} = \langle x, y \rangle$.



Si el vector está descrito usando sus coordenadas cartesianas, digamos $\vec{v} = \langle x, y \rangle$, podemos calcular el valor de su módulo, que representamos como $\| \vec{v} \|$, utilizando el teorema de Pitágoras.

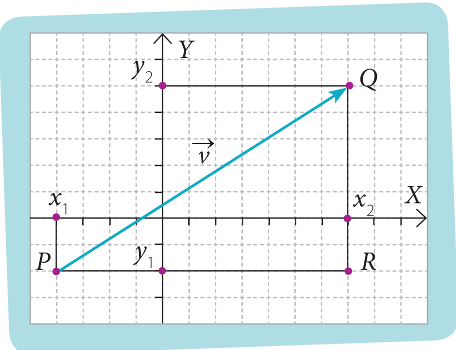
Como se cumple que $\| \vec{v} \|^2 = x^2 + y^2$, tenemos que $\| \vec{v} \| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

¿Cómo hacerlo?

Calcula el módulo del vector $\langle 6, 8 \rangle$.

Utilizando la expresión anterior y ya que el valor de x es 6 y el valor de y es 8, podemos calcular $\| \vec{v} \| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$.

Por otra parte, si el origen del vector no coincide con el origen del sistema de coordenadas, podemos calcular la diferencia, componente a componente, entre el extremo y el origen del vector para obtener la representación cartesiana del vector.



Dicho de otra manera, si $\vec{v}$ tiene su origen en el punto $P(x_1, y_1)$ y su extremo en el punto $Q(x_2, y_2)$, podemos calcular $\vec{v} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$.

En este caso, ya que conocemos los puntos P y Q, para determinar el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$ podemos calcular la distancia entre el origen y el extremo del vector. Considera el punto R, de coordenadas (x_2, y_1), entonces la medida de los lados estaría dada por:

$QR = (x_2 - x_1)$ y $RP = (y_2 - y_1)$.

Aplicando ahora el teorema de Pitágoras, obtenemos que

$\| \overrightarrow{PQ} \|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, de donde $\| \overrightarrow{PQ} \| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

¿Cómo hacerlo?

Si $A = (-5, 2)$ y $B = (7, 3)$, determina el vector $\overrightarrow{AB}$ y calcula su módulo.

Como el origen de $\overrightarrow{AB}$ corresponde al punto (–5, 2) y su extremo al punto (7, 3), entonces, podemos calcular

$\| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{(7 - -5)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{12^2 + 1^2} = \sqrt{144 + 1} = \sqrt{145}$.

Tomo nota

- Un vector $\overrightarrow{OP}$ que va desde el origen del plano cartesiano al punto P, se denomina vector posición de P y se representa por $\vec{p}$. Las componentes de $\vec{p}$ coinciden con las coordenadas del punto $P(p_x, p_y)$, dado que $\vec{p} = \langle p_x - 0, p_y - 0 \rangle = \langle p_x, p_y \rangle$.
- Si el origen y extremo de un vector $\vec{v}$ en el plano cartesiano corresponden a los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, respectivamente, entonces la representación cartesiana de ese vector está determinada por: $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$.
- El módulo de un vector, que está asociado a su longitud, se puede calcular mediante la expresión: $\| \vec{v} \| = \sqrt{x^2 + y^2}$, si $\vec{v} = \langle x, y \rangle$.

Actividades

1. **Dibuja los siguientes vectores, centrados en el origen del plano cartesiano, y cuyo extremo es el punto dado, en cada caso. Luego, calcula su módulo.**
   a. $A(3, 4)$
   b. $B(-7, 12)$
   c. $C(-9, -12)$
   d. $D(-13, 12)$
   e. $E(-1, 0)$
   f. $F(0, -4)$

2. **Considera que $\vec{a} = \langle -4, 5 \rangle$, $\vec{b} = \langle 6, -3 \rangle$ y $\vec{c} = \langle -2, -2 \rangle$.**
   a. Grafica los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.
   b. Determina $\vec{v}$ de modo que $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.
   c. Calcula el módulo de $\vec{v}$.

3. **Determina el vector, en cada caso, a partir de los puntos: $A = (25, 4)$, $B = (7, 22)$, $C = (21, 29)$ y $D = (2, 6)$. Luego, calcula su módulo.**
   a. $\overrightarrow{AB}$
   b. $\overrightarrow{AC}$
   c. $\overrightarrow{AD}$
   d. $\overrightarrow{BA}$
   e. $\overrightarrow{BD}$
   f. $\overrightarrow{DC}$
   g. $\overrightarrow{CB}$
   h. $\overrightarrow{BC}$
   i. $\overrightarrow{DA}$

4. **Los puntos $A(-1, 1)$, $B(2, 0)$ y $C(0, 2)$ son los vértices de un triángulo. Determina las coordenadas de los vectores que forman sus lados.**

5. **El minutero de un reloj mide 5 cm. Si el minutero parte a las doce en punto, representa gráficamente el vector desplazamiento de su punta, en cada caso, después de:**
   a. quince minutos.
   b. media hora.
   c. tres cuartos de hora.
   d. una hora.

6. **Si los puntos $A(1, 1)$, $B(1, 3)$ y $C(7, 3)$ son los vértices del paralelogramo $ABCD$, calcula:**
   a. las coordenadas de D.
   b. el vector $\overrightarrow{BD}$.

7. **¿Cuántos vectores se pueden formar con los puntos $A(4, 1)$, $B(2, 5)$, $C(0, 3)$ y $D(-1, -2)$? Descríbelos utilizando sus coordenadas y represéntalos gráficamente.**

8. **Sobre un cuerpo actúan las fuerzas $\vec{f}_1 = \langle 6, 8 \rangle$, $\vec{f}_2 = \langle -15, 20 \rangle$, $\vec{f}_3 = \langle -4, -16 \rangle$. Calcula:**
   a. la magnitud del vector resultante;
   b. la dirección del vector resultante.

Desafío

Dos vectores de desplazamiento centrados en el origen tienen módulos iguales a 6 m y 8 m.
¿Cuál debe ser la dirección y sentido de cada uno de estos vectores para que la resultante tenga un módulo igual a 14 m?, ¿a 2 m?, ¿y a 6 m? Representa gráficamente cada caso.

La adición (o sustracción) de vectores a partir de su representación cartesiana se efectúa a través de sus coordenadas, sumando (o restando) componente a componente. Es decir, al sumar los vectores $\vec{a} = \langle 2, 3\rangle$ y $\vec{b} = \langle -1, 2\rangle$, el vector $\vec{a} + b$ se calcula: $\langle 2, 3\rangle + \langle -1, 2\rangle = \langle 2 + -1, 3 + 2\rangle = \langle 1, 5\rangle$.

Tal como en los números en general, la multiplicación puede interpretrar como la suma iterada de uno de sus factores, con los vectores, podemos representar la adición iterada de un mismo vector como el producto de un escalar con un vector.

En este caso, cuando se calcula el producto por un escalar de un vector, obtenemos un nuevo vector, que conserva la dirección del vector original, pero cuya magnitud y sentido cambian según el valor por el cual fue multiplicado.

¿Cómo hacerlo?

Dados los vectores $\vec{a} = \langle -6, 2\rangle$ y $\vec{b} = \langle 3, -4\rangle$, ¿cuánto resulta $5 \cdot (\vec{a} + \vec{b})$?

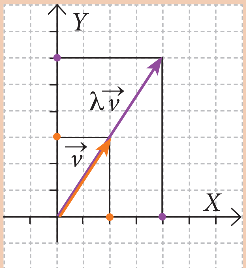
$5 \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 5 \cdot \vec{a} + 5 \cdot \vec{b}$ — Se distribuye el producto sobre la suma

$= 5 \cdot \langle -6, 2\rangle + 5 \cdot \langle 3, -4\rangle$ — Remplazamos cada vector

$= \langle -30, 10\rangle + \langle 15, -20\rangle$ — Aplicamos el producto del escalar por el vector, en cada caso

$= \langle -30 + 15, 10 + -20\rangle$ — Sumamos los vectores obtenidos

$= \langle -15, -10\rangle$

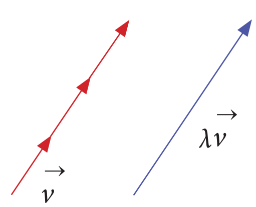


Si λ es un escalar y $\vec{v}$ un vector, decimos que $\lambda \cdot \vec{v}$ es un vector ponderado de $\vec{v}$. El vector ponderado mantiene siempre la dirección de $\vec{v}$, pero cambia su módulo, según el valor de λ, y su sentido, cuando λ es un número negativo.

Utilizando un vector ponderado, podemos representar una pareja de vectores paralelos como un vector ponderado uno del otro, si determinamos cuál es el valor de λ correspondiente.

Tomo nota

- La suma de dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, de coordenadas $\vec{v} = \langle a, b\rangle$ y $\vec{w} = \langle c, d\rangle$ es el vector resultante $\langle a + c, b + d\rangle$.
- El producto de un escalar λ por un vector $\vec{v}$, de coordenadas $\langle x, y\rangle$, es otro vector dado por $\lambda\vec{v}$, y lo definimos como: $\lambda\vec{v} = \lambda \cdot \langle x, y\rangle = \langle \lambda \cdot x, \lambda \cdot y\rangle$.
  Decimos que $\lambda\vec{v}$ es un vector ponderado de $\vec{v}$.
- El vector ponderado $\lambda\vec{v}$ tiene las siguientes características:
  - Mantiene la dirección de $\vec{v}$.
  - $\| \lambda\vec{v} \| = |\lambda| \cdot \| \vec{v} \|$.
  - Si $\lambda > 0$, el vector mantiene el sentido de $\vec{v}$.
    Si $\lambda < 0$, el vector cambia de sentido.
  - Si $\lambda = 0$, entonces $\lambda\vec{v} = 0$ (vector nulo).
- Podemos expresar dos vectores paralelos, uno como ponderado del otro: $\vec{w} = \lambda\vec{v}$ o bien, $\vec{v} = \mu\vec{w}$.



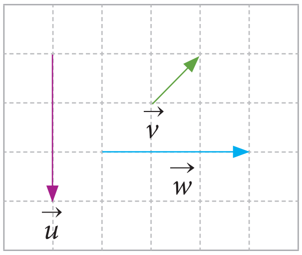
Actividades

1. Dado el producto de $\mu \cdot \vec{a}$, con $a \neq 0$, ¿qué características cumple el producto, en cada caso? Justifica tu respuesta con la representación gráfica correspondiente.

a. ¿si $\mu > 1$?
b. ¿si $\mu = 1$?
c. ¿si $0 < \mu < 1$?
d. ¿si $\mu = 0$?
e. ¿si $\mu = -1$?
f. ¿si $\mu < -1$?

2. Copia, en tu cuaderno, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Luego, representa gráficamente:

a. $\vec{u} + \vec{v}$
b. $3\vec{v}$
c. $2\vec{u} - \vec{v}$
d. $\vec{v} - 2\vec{w}$
e. $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$



3. Calcula el resultado de las siguientes operaciones.

a. $3 \cdot \langle 2, -1 \rangle - 3 \cdot \langle 2, 3 \rangle =$
b. $-2 \cdot \langle 7, -3 \rangle + 5 \cdot \langle 0, 5 \rangle =$
c. $\langle 5, -2 \rangle - \langle 3, 1 \rangle + 2 \cdot \langle 6, 0 \rangle =$
d. $5 \cdot \langle 3, -2 \rangle - 4 \cdot \langle -1, 0 \rangle + 2 \cdot \langle -1, -3 \rangle =$

4. Dados los vectores $\vec{a} = \langle 3, -2 \rangle$, $\vec{b} = \langle -1, 5 \rangle$ y $\vec{c} = \langle 4, 6 \rangle$, determina:

a. $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$
b. $\vec{b} - \vec{c}$
c. $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$
d. $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$
e. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
f. $\vec{a} + \vec{c}$

5. Si M es el punto medio de un segmento de recta AB, ¿qué se podría decir sobre los vectores de $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{BM}$?

Desafío

Santiago observó una araña, que estaba en un vértice de una sala cuyas dimensiones son 7 m de largo, 5 m de ancho y 3 m de alto. Más tarde, observó que se había trasladado al vértice diametralmente opuesto.

a. Determina la distancia mínima que pudo haber recorrido.
b. Describe el vector correspondiente al desplazamiento que realizó.

Antes de continuar

1. ¿En qué caso el resultado de la adición de vectores $\vec{u} + \vec{v}$ es el vector $\vec{0}$?
2. ¿Es posible que el producto de un escalar λ por un vector $\vec{v}$ dé como resultado el vector $\vec{0}$? Explica.

Vectores en el espacio

Aprenderé a: identificar y describir puntos en el espacio cartesiano. Representar vectores en el espacio y extender la distancia entre dos puntos a puntos en el espacio cartesiano y aplicarla al cálculo de módulo de un vector.

Repaso

1. **¿En qué se diferencian los vectores ⟨3, 2⟩ y ⟨2, 3⟩?**
2. **Describe gráficamente los siguientes vectores.**
   a. ⟨0, 5⟩
   b. ⟨5, 0⟩
   c. ⟨3, 3⟩

La siguiente figura corresponde a una sala de clases donde se instalará un nuevo proyector para las clases.

La profesora quiere dejar instrucciones sobre el lugar exacto dentro de la sala en que los técnicos lo deben instalar, este lugar es donde está la letra x a una altura de 2 metros. Escribe las indicaciones que tu le darías a los técnicos que deben instalar el proyector. ¿Cuántos números usaste? Si fuera algo que se instala sobre el suelo, ¿cuántos números usarías?

- ¿Qué es para ti una dimensión?
- ¿Cuántas dimensiones tiene una fotografía? ¿Qué característica tiene una película en 3D que la diferencia de las películas en 2D?

La recta numérica real es la recta que contiene a todos los números reales y sirve para ordenar cantidades, tales como medidas, pesos, etcétera. En el plano cartesiano, en cambio, podemos organizar puntos con dos coordenadas, cada una de las cuales tiene una magnitud que queremos representar; por ejemplo, la lista de las estaturas de un grupo de alumnos de cuarto año medio es: {1,75; 1,70; 1,65; 1,60; 1,54; 1,56; 1,78; 1,50}. Mientras que si organizamos las estaturas, con sus correspondientes masas, para el mismo grupo, podemos escribir: {(1,75, 70); (1,70, 66); (1,65, 61); (1,60, 70); (1,54, 49); (1,56, 59); (1,78, 80); (1,50, 54)}. De este modo, sabemos que la primera persona de la lista mide 1,75 m y su masa es de 70 kg.

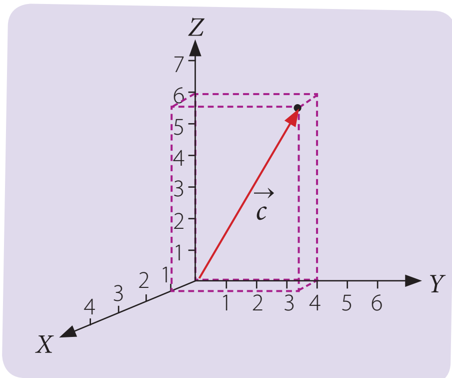
Cada una de las posiciones de los pares anteriores se llama coordenada (además, en el plano cartesiano, llamamos **abscisa** a la primera coordenada y **ordenada** a la segunda). Cuando queremos representar objetos que tengan más magnitudes asociadas a él, podemos agregar coordenadas a nuestra representación.

Tomo nota

- Decimos que la recta numérica real tiene solo una dimensión porque cada punto en ella puede representarse con un solo número real.
- En este sentido, decimos que el plano cartesiano tiene dos dimensiones porque podemos representar cada punto del plano con dos números reales, es decir, cada punto tiene dos coordenadas.
- De igual modo, decimos que el espacio cartesiano tiene tres dimensiones porque podemos representar cada punto de él con tres números reales, las dos primeras coordenadas, que corresponden al plano cartesiano (y que podemos asociar al "piso") y luego agregamos una coordenada más para indicar su altura, esto es, la distancia del punto a este "piso".

Por ejemplo, si se considera el plano cartesiano como el piso de la sala, la tercera coordenada va a representar la altura que tiene el vector.

Así, en el gráfico siguiente está representado el vector $\vec{c} = \langle 1, 4, 6 \rangle$.

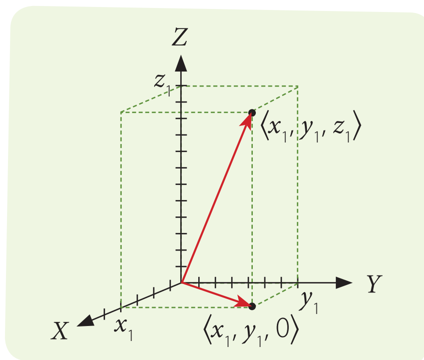


¿Lo entiendes?

Según esto, ¿cuál es el módulo de este vector?, ¿cuál es su dirección?, ¿y su sentido?

Hemos dicho que los vectores tienen módulo, dirección y sentido. Podemos asociar el punto (0, 0, 0) como punto inicial de un vector y cualquier punto en el espacio como su punto final.

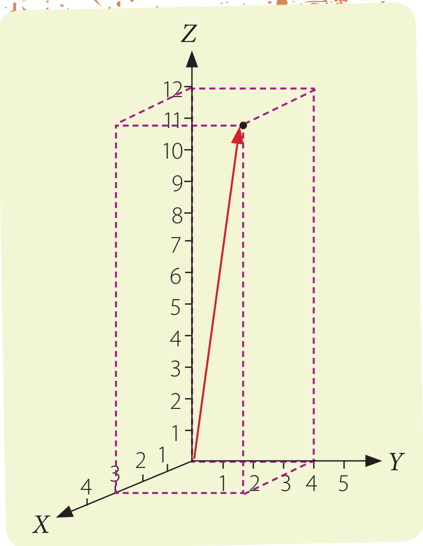
Tal como en el caso de los vectores en el plano cartesiano, para calcular el módulo de un vector en el espacio, utilizamos el teorema de Pitágoras, pero extendiendo la idea a las tres coordenadas del vector.



Si observamos el plano XY, el módulo del vector $\langle x_1, y_1, 0 \rangle$ se puede calcular como $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ utilizando la expresión para el módulo con dos coordenadas, ya que en este caso, la tercera coordenada es cero.

Ahora, si consideramos el vector $\langle x_1, y_1, 0 \rangle$ y la tercera coordenada z_1, podemos aplicar nuevamente el teorema de Pitágoras, y entonces tenemos que $\|\langle x_1, y_1, z_1 \rangle\| = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2) + z_1^2}$

En general, dado el vector en el espacio $\vec{v} = \langle x, y, z \rangle$ entonces denotamos su módulo por $\| \vec{v} \|$ o bien, $\|\langle x, y, z \rangle\|$ y lo podemos calcular como $\| \vec{v} \| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.



¿Cómo hacerlo?

¿Cuál es la distancia entre dos pares de vértices, que no pertenecen a la misma cara, de un paralelepípedo recto de medidas 3, 4, y 12 unidades?

Si consideramos un vértice del paralelogramo en el origen del sistema de coordenadas, entonces el vértice opuesto tiene coordenadas $\langle 3, 4, 12\rangle$ y, para conocer la distancia entre ambos vértices, calculamos su módulo.

$\|\langle 3, 4, 12\rangle\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$

Al estudiar vectores sabemos que existe el vector 0 y que los vectores se pueden sumar y calcular su producto por un escalar. En el caso de los vectores en el espacio estas operaciones son similares a las que existen en los vectores en el plano.

¿Cómo hacerlo?

Dados los vectores $\vec{v} = \langle 2, 3, 4\rangle$, $\vec{u} = \langle 4, 1, 0\rangle$ y el escalar $\lambda = -3$, determina los vectores correspondientes a $\vec{v} + \vec{u}$, $\lambda \cdot \vec{v}$ y $\vec{v} + \lambda \cdot \vec{u}$.

$\vec{v} + \vec{u} = \langle 2, 3, 4\rangle + \langle 4, 1, 0\rangle = \langle 2, 4, 4\rangle$

$\lambda \cdot \vec{v} = -3 \cdot \langle 2, 3, 4\rangle = \langle 6, -9, -12\rangle$

$\vec{v} + \lambda \cdot \vec{u} = \langle 2, 3, 4\rangle - 3 \cdot \langle 4, 1, 0\rangle = \langle -10, 0, 4\rangle$

Tomo nota

- Si un vector tiene coordenadas en el espacio $\langle x, y, z\rangle$ entonces su módulo es $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y lo denotamos por $\|\langle x, y, z\rangle\|$
- El vector de coordenadas $\langle 0, 0, 0\rangle$ en el espacio es el llamado vector $\vec{0}$.
- La suma de los vectores de coordenadas $\langle x_1, y_1, z_1\rangle$ con el vector de coordenadas $\langle x_2, y_2, z_2\rangle$ es el vector resultante $\langle x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2\rangle$
- El producto de un escalar λ por un vector $\langle x, y, z\rangle$ resulta el vector $\langle \lambda x, \lambda y, \lambda z\rangle$

Actividades

1. Calcula el módulo de los siguientes vectores.

a. $\langle 1, 2, 0\rangle$
b. $\langle 0, -4, 3\rangle$
c. $\langle 2, -4, 1\rangle$
d. $\langle 5, 0, 3\rangle$
e. $\langle 3, -7, 1\rangle$
f. $\langle 4, 3, 12\rangle$
g. $\langle 9, 0, 0\rangle$
h. $\langle 0, -12, 5\rangle$
i. $\langle 15, 0, -20\rangle$

2. Para los vectores $\vec{u} = \langle 1, 0, 2\rangle$, $\vec{v} = \langle 2, -5, -7\rangle$, $\vec{w} = \langle 3, -4, 1\rangle$ y el escalar $\lambda = 3$, calcula:

a. $\vec{u} + \vec{v}$
b. $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$
c. $\lambda\vec{u} + \vec{v} - \lambda\vec{w}$
d. $\lambda\vec{u} - \vec{v} + \lambda\vec{w}$
e. $\vec{v} - \lambda(\vec{u} + \vec{w})$
f. $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) - (\vec{v} - \vec{w} + \vec{u})$

De manera similar a los puntos en el plano, para calcular la distancia entre dos puntos en el espacio, calcularemos el módulo del vector que resulta al restar los dos vectores correspondientes a los puntos.

¿Cómo hacerlo?

Calcula la distancia entre los puntos $P(2, 1, 0)$ y $Q(1, -1, 2)$.

Calculamos primero el vector correspondiente $\overrightarrow{PQ}$, cuyo origen corresponde al punto P, y su punta de flecha es Q.

$\overrightarrow{PQ} = \langle 1, -1, 2\rangle - \langle 2, 1, 0\rangle = \langle -1, -2, 2\rangle$

Entonces, calculamos el módulo del vector.

$$\begin{aligned} \| \overrightarrow{PQ} \| &= \|\langle -1, -2, 2\rangle\| \\ &= \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (2)^2} + \sqrt{1 + 4 + 4} \\ &= \sqrt{9} = 3. \end{aligned}$$

Luego, la distancia entre los puntos P y Q es 3.

Imagina que un insecto volador vuela del punto V al punto U en una habitación. Considera además que existe un tercer punto W. ¿Qué ocurre si el insecto decide hacer una parada en W, es decir, primero, ir de V a W y luego de W a U? ¿Este trayecto es más largo o más corto que ir directo?

La distancia de V a U es $\| \vec{v} - \vec{u} \|$, de V a W es $\| \vec{v} - \vec{w} \|$ y de W a U es $\| \vec{w} - \vec{u} \|$. Como al escoger el camino directo se recorre una distancia menor, se cumple la siguiente desigualdad:

$$\| \vec{v} - \vec{u} \| \leq \| \vec{v} - \vec{w} \| + \| \vec{w} - \vec{u} \|$$

Tomo nota

- La desigualdad $\|\vec{v} - \vec{u}\| \leq \|\vec{v} - \vec{w}\| + \|\vec{w} - \vec{u}\|$ se denomina desigualdad triangular y se cumple para cualquier trío de vectores, tanto en el plano, como en el espacio.

Actividades

1. **En el plano cartesiano, encuentra 3 puntos $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tales que $\| \vec{u} - \vec{v}\| = \| \vec{u} - \vec{w} \| + \| \vec{w} - \vec{v}\|$**
2. **Considera los puntos $\vec{u} = \langle 2, 3, 1\rangle$, $\vec{v} = \langle 1, -2, 2\rangle$, $\vec{w} = \langle 1, 1, -1\rangle$.**
   a. Calcula la distancia de $\vec{u}$ a $\vec{v}$.
   b. Calcula la distancia de $\vec{u}$ a $\vec{w}$ más la distancia de $\vec{w}$ a $\vec{v}$.
   c. Verifica que se cumple la desigualdad triangular.
3. **Muestra gráficamente, con un ejemplo en el plano cartesiano, que se cumple la desigualdad triangular para cualquier trío de vectores. ¿Por qué crees que se llama desigualdad triangular?**

Dado el vector $\vec{v} = \langle 2, 2, 3\rangle$, si definimos el vector $\vec{w} = \vec{v} + \vec{v} \ldots + \vec{v}$, de modo que $\vec{v}$ se repita en la suma 30 veces, supón que quiséramos calcular el módulo de $\vec{w}$.

Como la suma de vectores se realiza sumando coordenada a coordenada, el vector $\vec{w}$ tendrá coordenadas $\langle 60, 60, 90\rangle$ y luego, para determinar su módulo, tendrías que calcular $\sqrt{60^2 + 60^2 + 90^2}$ lo cual, si se desarrolla sin utilizar calculadora, supone un cálculo muy grande y con posibilidades de cometer errores. En lugar de desarrollarlo así, observa de dónde vienen todos los números:

$$\begin{aligned}\sqrt{60^2 + 60^2 + 90^2} &= \sqrt{(30 \cdot 2)^2 + (30 \cdot 2)^2 + (30 \cdot 3)^2}\\ &= \sqrt{(30)^2 \cdot (2^2 + 2^2 + 3^2)}\\ &= |30| \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2}\end{aligned}$$

En este caso, como 30 es un número positivo, $|30| = 30$ y además sabemos que $\sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2} = \|\vec{v}\|$. Por lo tanto, el valor del módulo de $\vec{w}$ es $30\|\vec{v}\|$.

Tomo nota

- Si $\vec{v}$ es un vector y λ un número real, el módulo de la ponderación de λ por $\vec{v}$ es igual al valor absoluto de λ multiplicado por el módulo de $\vec{v}$. Es decir, $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda|\ \|\vec{v}\|$.
- En particular, si consideramos $\lambda = -1$ obtenemos que $\|-\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$.

Actividades

1. Si $\langle x, y, z\rangle$ es un vector en el espacio, escribe el módulo de ese vector. Calcula además el módulo de los vectores $\langle 1, 1, 1\rangle$, $\langle -1, -1, -1\rangle$, $\langle 2, 1, 0\rangle$ y $\langle 3, 4, 0\rangle$.

2. Dados los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ y λ un número real, decide si cada una de las siguientes relaciones es siempre verdadera, para distintos valores de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ y λ. Si no fuera verdadera, muestra un contraejemplo.

a. $\|\vec{v} + \vec{w}\| = \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$

b. $\|\vec{v} - \vec{w}\| = \|\vec{v}\| - \|\vec{w}\|$

c. $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{w}\| + \|\vec{w} - \vec{v}\|$

d. $\|\lambda \cdot \vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$

e. $\|\vec{u} - \vec{v}\| < \|\vec{u} - \vec{w}\| + \|\vec{w} - \vec{v}\|$

f. $\|\vec{u} - \vec{v}\| \leq \|\vec{u} - \vec{w}\| + \|\vec{w} - \vec{v}\|$

g. $\|\lambda \cdot \vec{v}\| = \lambda \cdot \vec{v}$

h. $\|\lambda \cdot \vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$

3. Dibuja en tu cuaderno un plano cartesiano y ubica el vector $\langle 3, 4\rangle$.

a. Calcula su módulo y explica qué significa el módulo en este caso.

b. Luego ubica los vectores $\langle -3, 4\rangle$, $\langle 3, -4\rangle$ y $\langle -3, -4\rangle$ en el plano cartesiano.

c. Calcula el módulo de cada uno de los vectores anteriores. ¿Qué relación existe entre ellos?, ¿por qué?

Al comienzo de esta lección definimos las dimensiones de un vector como la cantidad de números o valores necesarios para definir una posición relativa. En el resto de la unidad revisaremos principalmente los casos de dimensión 2, que corresponde al plano cartesiano, y de dimensión 3, que es el espacio cartesiano, pero lo cierto es que todas las propiedades que hemos visto son aplicables, cualquiera sea la cantidad de dimensiones del vector. Así, por ejemplo, los vectores en un espacio de dimensión n los denotaremos con n coordenadas de la forma $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$.

A continuación, verás cómo se extienden algunas definiciones y propiedades a los espacios n-dimensionales. Observa que en lugar de utilizar letras distintas $x, y, z\ldots$ para escribir los números genéricos de cada coordenada, utilizamos una letra, por ejemplo, x con distintos subíndices. Esto es, si $n = 3$, usando esta notación los vectores se escriben de la forma $\langle x_1, x_2, x_3\rangle$.

El módulo del vector $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ se denota también $\| \langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \|$ y se calcula: $\| \langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \| = \sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + \ldots\, x_n^{\,2}}$.

Dados dos vectores $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$, $\langle y_1, y_2, \ldots, y_n\rangle$ su suma es $\langle x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n\rangle$, y si tienes tres vectores $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$, $\langle y_1, y_2, \ldots, y_n\rangle$, $\langle z_1, z_2, \ldots, z_n\rangle$ también se cumple la desigualdad triangular:

$$\| \langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle - \langle y_1, y_2, \ldots, y_n\rangle \| \leq \| \langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle - \langle z_1, z_2, \ldots, z_n\rangle \| + \| \langle z_1, z_2, \ldots, z_n\rangle - \langle y_1, y_2, \ldots, y_n\rangle \|$$

Tomo nota

- **Las operaciones, como la adición y el módulo, y propiedades de vectores, como la desigualdad triangular, se extienden naturalmente a los espacios n-dimensionales.**

Actividades

1. **Para cada par de puntos, en el plano o en el espacio, calcula la distancia entre ellos.**
   a. $\langle 1, 1\rangle$ y $\langle 2, 2\rangle$
   b. $\langle 0, 0\rangle$ y $\langle -1, 2\rangle$
   c. $\langle 1, 1\rangle$ y $\langle -1, -1\rangle$
   d. $\langle 0, 0, 0\rangle$ y $\langle 2, -1, 3\rangle$
   e. $\langle 1, 1, 1\rangle$ y $\langle 0, -1, -2\rangle$
   f. $\langle 2, 1, 5\rangle$ y $\langle 2, 2, 1\rangle$

2. **Siguiendo la idea presentada al comienzo de la lección, indica en qué situaciones podrías referirte a algo utilizando 4 dimensiones. Indica un ejemplo de un vector y qué significaría en ese contexto.**

3. **En el espacio de 5 dimensiones, calcula el módulo de los siguientes vectores.**
   a. $\langle 1, 2, 1, 0, 1\rangle$
   b. $\langle 1, 1, 1, 1, 1\rangle$
   c. $\langle -1, -2, -1, 2, 1\rangle$
   d. $\langle 0, 0, 0, 0, 0\rangle$
   e. $\langle -1, -2, -1, 0, -1\rangle$

Antes de continuar

1. Explica con tus palabras qué es una dimensión. ¿Cuántas dimensiones tienen la recta numérica, el plano cartesiano y el espacio?

Proyecto de la unidad

El proyecto que aquí te presentamos lo tendrás que desarrollar por etapas mientras avances en la unidad. Su objetivo es conjeturar y verificar la relación entre una recta en el espacio y su proyección en el plano XY. Para esto, es necesario revisar las ecuaciones correspondientes al plano y a la recta en el espacio.

Con lo que has aprendido hasta aquí puedes avanzar en la etapa 1.

Etapa 1

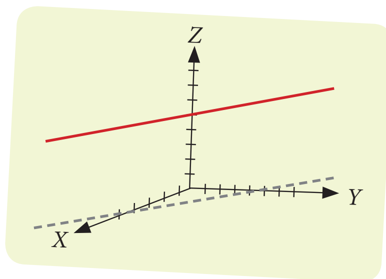
1. **Escribe las coordenadas de cuatro puntos distintos en el espacio cartesiano, llama a esos puntos P, Q, R y S.**
   a. Calcula las distancias entre los puntos P y Q, entre R y S, y entre Q y R.
   b. Determina las ecuaciones vectoriales de las rectas que pasan por los puntos : P y Q, P y R, y S y R.

Etapa 2

1. **Responde a las siguientes preguntas.**
   a. ¿Cuántos puntos definen un único plano?
   b. ¿Es posible que una mesa con tres patas se tambalee porque está coja?, ¿cómo puedes relacionar esto con los planos en el espacio?
2. **Escribe las ecuaciones de los planos que pasan por P, Q, R y S.**
   a. Determina la ecuación vectorial del plano Π_1 que pasa por los puntos P, Q y R.
   b. Verifica que el punto S no pertenezca al plano Π_1 (Si el punto S pertenece al plano, cambia alguna de las coordenadas de S de tal forma que no pertenezca a Π_1).
   c. Determina la ecuación vectorial del plano Π_2 que pasa por los puntos P, Q y S. Sin hacer ningún cálculo, ¿puedes afirmar que el punto R no pertenece a Π_2?
   d. Escribe las ecuaciones paramétricas de los planos Π_1 y de Π_2.
   e. Luego, escribe las ecuaciones cartesianas de los planos Π_1 y de Π_2.
   f. Sin hacer ningún cálculo, ¿puedes encontrar 2 puntos que pertenezcan a $\Pi_1 \cap \Pi_2$?, ¿por qué?

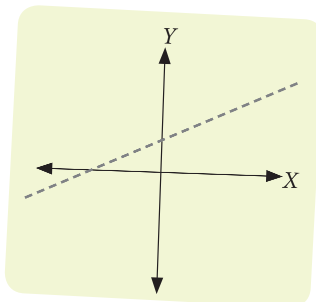
Etapa 3

1. **Escribe la función paramétrica de la recta L_1, la cual debe quedar de la forma $f(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda))$, es decir, determina las expresiones correspondientes a $x(\lambda)$, $y(\lambda)$, $z(\lambda)$.**
2. **Imagina que el parámetro λ corresponde al tiempo y, para valor de λ, $f(\lambda)$ muestra la posición de un insecto volador en dicho tiempo λ.**
   a. ¿Cuál es la posición del insecto en el tiempo $\lambda = 0$?, ¿y si $\lambda = 3$?
   b. ¿Qué distancia recorrió en esos tres segundos?
   c. Calcula ahora la distancia que recorrió entre $\lambda = -2$ y $\lambda = 1$. ¿Tú crees que este insecto viaja siempre a velocidad constante?
3. **Considera que la tercera coordenada, Z, es la altura en la que vuela el insecto y las coordenadas X e Y corresponden a la posición en el suelo de una habitación.**
   a. Imagina que solo estás viendo el suelo mientras el insecto vuela en el aire. ¿Cómo es la trayectoria que puedes ver de la sombra del insecto si suponemos que la luz llega directamente desde arriba?
   b. Observa el siguiente gráfico en el cual la recta roja denota el desplazamiento del insecto en el aire y la línea gris su sombra en el piso.



La trayectoria que sigue el insecto en el plano XY se puede obtener de la misma ecuación pero con $z = 0$, es decir, $g(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda), 0)$. Escribe, en el caso de la recta que encontraste, la trayectoria de la sombra del insecto.

4. **Observando solo el plano XY, podrás ver que la trayectoria de la sombra es la ecuación de una recta.**
   a. Utilizando la ecuación del plano, determina la ecuación de esa recta (El siguiente es un dibujo de referencia de la sombra, ya que no necesariamente tiene esa pendiente ni corta a los ejes coordenados en esos puntos).
   b. Indica los puntos, en el plano XY, en que se veía la sombra del insecto en los tiempos $\lambda = 0$ y $\lambda = 3$.
   c. ¿Cuánta distancia recorrió la sombra? ¿Avanza más rápido la sombra o el insecto mismo?, ¿cómo puedes explicar eso?



Etapa 4

1. **Escribe las ecuaciones cartesianas de la recta L_1 de la intersección entre los planos Π_1 y Π_2.**
   a. ¿Cómo sabes que la intersección de estos dos planos es una recta?
   b. ¿Qué posibilidades existen al intersecar dos planos? ¿Por qué las otras opciones no ocurren ahora?
   c. Escribe las ecuaciones paramétrica y vectorial de la recta L_1.
   d. Ya sabemos que, dados dos puntos en el espacio, se puede encontrar una recta que los contenga. Utilizando esto, determina la ecuación paramétrica de la recta que pasa por los puntos P y Q, llama a esa recta L_2.
   e. ¿Qué puedes decir, respecto de las rectas L_1 y L_2?
   f. Sin hacer ningún cálculo, ¿puedes encontrar las ecuaciones cartesianas de la recta L_2?, ¿por qué?

Ecuación vectorial de la recta en el plano y su ecuación cartesiana

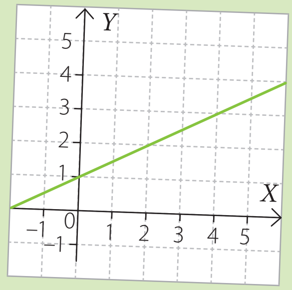
Aprenderé a: identificar y describir rectas en plano, deducir la ecuación vectorial de la recta y su relación con la ecuación cartesiana.

Repaso

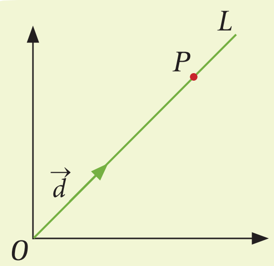
1. Grafica en un mismo plano cartesiano los siguientes vectores.
   a. $\vec{v} = \langle 6, 2\rangle$
   b. $\vec{u} = \langle 12, 4\rangle$
   c. $\vec{w} = \langle 9, 3\rangle$
   d. ¿Qué puedes concluir?

Observa el siguiente gráfico.

- ¿Cuál es la ecuación de la recta representada?
- ¿Qué vector tiene la misma dirección que esta recta?, ¿cómo lo supiste?
- ¿Cómo podrías representar la ecuación de esta recta utilizando vectores? Explica.



Sabemos que basta conocer dos puntos que pertenezcan a una recta, para determinar correctamente la ecuación de una recta en el plano. Consideremos primero el caso de una recta que pasa por el origen del plano cartesiano. Es decir, uno de los puntos de la recta es (0, 0) y otro es, digamos (a, b). Si ahora trazamos el vector $\langle a, b\rangle$, podremos observar que este vector tiene, naturalmente, la misma dirección que la recta que pasa por (0, 0) y (a, b).



Entonces, podemos decir que, para determinar una recta que pasa por el origen, basta un vector, que tenga la misma dirección de la recta. Observa.

En un plano cartesiano podemos representar una recta L, que pasa por el origen $O(0, 0)$ y con vector director $\vec{d} = \langle d_1, d_2\rangle$ paralelo a la recta L.

Si P es un punto que pertenece a la recta L, por ejemplo $P(x, y)$, entonces siempre existe un número real λ, tal que $\overrightarrow{OP} = \lambda \cdot \vec{d}$.

Luego la **ecuación vectorial** de la recta L es $\langle x, y\rangle = \lambda\langle d_1, d_2\rangle$.

¿Cómo hacerlo?

Dado el punto $A(4, 7)$, determina la ecuación vectorial de la recta que pasa por el origen y el punto A.

Se utiliza el vector $\vec{a}$ como vector director $\vec{d}$, que corresponde al vector $\overrightarrow{OA}$:

$\vec{d} = \vec{a} = \langle 4, 7\rangle$

De esta manera, se puede escribir la ecuación vectorial de la recta como: $\langle x, y\rangle = \lambda\langle 4, 7\rangle$. O bien, como: $\langle x, y\rangle = \langle 4\lambda, 7\lambda\rangle$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Veamos ahora qué sucede si $\lambda = 3$. Al remplazar en la ecuación:

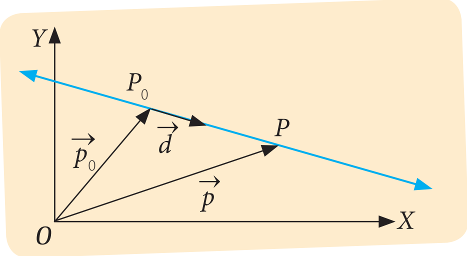
$\langle x, y\rangle = \langle 4 \cdot \lambda, 7 \cdot \lambda\rangle = \langle 4 \cdot 3, 7 \cdot 3\rangle = \langle 12, 21\rangle$

Es decir, el punto (12, 21) pertenece a la recta $\langle x, y\rangle = \lambda\langle 4, 7\rangle$.

Ahora, cuando la recta no pasa por el origen, además del vector director $\langle d_1, d_2\rangle$ es necesario determinar un vector que indique la ubicación de la recta en el plano.

En este caso, si la recta L tiene vector director $\vec{d}$, pero que además pasa por el punto $P_0(x_0, y_0)$, para representarla consideramos un punto cualquiera P de la recta L, cuyas coordenadas son $P(x, y)$, entonces existe un número real λ, tal que $\overrightarrow{P_0P} = \lambda \cdot \vec{d}$, y por lo tanto: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}_0 + \lambda \cdot \vec{d}$.

Utilizando el vector posición $\vec{p}_0$ de P_0 y considerando el vector $\vec{p}$ de P, resulta: $\vec{p} = \vec{p}_0 + \lambda \cdot \vec{d}$.



Además, si d_1 y d_2 son las componentes del vector $\vec{d}$, la ecuación vectorial de la recta, expresada en coordenadas es:

$\langle x, y\rangle = \langle x_0, y_0\rangle + \lambda \langle d_1, d_2\rangle$.

¿Cómo hacerlo?

Dados los puntos $A(2, 3)$ y $B(5, 2)$, determina la ecuación vectorial de la recta que pasa por ellos. ¿Qué sucede si $\lambda = \frac{1}{2}$?

Utilizamos el vector $\vec{b}$ como vector posición de la recta (también podríamos haber usado $\vec{a}$ como vector posición).

Luego, calculamos su vector director $\vec{d}$, que corresponde al vector $\overrightarrow{AB}$:

$\vec{d} = \vec{b} - \vec{a} = \langle 5, 2\rangle - \langle 2, 3\rangle = \langle 3, -1\rangle$.

De esta manera, podemos escribir la ecuación vectorial de la recta como: $\langle x, y\rangle = \langle 5, 2\rangle + \lambda\langle 3, -1\rangle$. O bien, como: $\langle x, y\rangle = \langle 5 + 3\lambda, 2 - \lambda\rangle$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Veamos ahora qué sucede si $\lambda = \frac{1}{2}$. Al remplazar en la ecuación:

$$\langle x, y\rangle = \langle 5 - 3\lambda, 2 + \lambda\rangle = \left\langle 5 - \frac{3}{2}, 2 + \frac{1}{2}\right\rangle = \left\langle \frac{10-3}{2}, \frac{4+1}{2}\right\rangle = \left\langle \frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right\rangle.$$

Observa que, por otra parte, el punto medio del segmento AB está dado por: $\left(\frac{2+5}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$, lo que coincide con el punto correspondiente a remplazar $\lambda = \frac{1}{2}$ en la ecuación vectorial de la recta.

Una ventaja importante de una ecuación vectorial de una recta es que permite obtener ecuaciones para un segmento específico de la recta por medio de una restricción del parámetro λ. Así, por ejemplo, en la ecuación $\langle x, y\rangle = \langle 2, -1\rangle + \lambda\langle 1, 2\rangle$, si restringimos el parámetro a $1 \leq \lambda \leq 3$, estamos describiendo el segmento de recta que une los puntos (3, 1) y (5, 5), que son los puntos obtenidos al remplazar por el mínimo y el máximo valor asignado al parámetro λ.

Tomo nota

- Las expresiones $\vec{p} = \lambda\,\vec{d}$ y también $\vec{p} = \vec{p_0} + \lambda\,\vec{d}$ reciben el nombre de ecuación vectorial de la recta.
  - $\vec{d}$ es el vector director, paralelo a la recta,
  - λ es un parámetro. Al remplazar valores de λ, obtenemos los puntos que pertenecen a la recta,
  - $\vec{p_0}$ es el vector posición de la recta (que no es un vector ponderado de $\vec{d}$), se utiliza cuando la recta no pasa por el origen del plano cartesiano.

Actividades

1. **Determina la ecuación vectorial de la recta que pasa por dos puntos dados: $A(-4, 6)$ y $B(4, -2)$.**
2. **¿Se puede determinar la ecuación vectorial de la recta a partir de los puntos $C(1, 1)$ y $D(4, 4)$? En caso afirmativo, ¿cuál es su ecuación vectorial?**
3. **Dada la ecuación vectorial $\langle x, y\rangle = \langle 1, 2\rangle + \lambda\langle 4, 8\rangle$, determina tres puntos que pertenezcan a la recta.**
4. **Determina la ecuación vectorial de una recta paralela a $\langle x, y\rangle = \langle 2, -5\rangle + \lambda\langle 1, -4\rangle$; luego, grafica ambas rectas.**

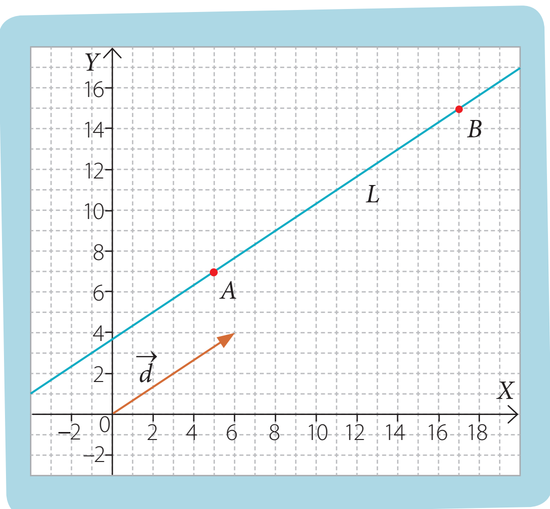
¿Cómo hacerlo?

Si la recta L tiene vector director es $\vec{d} = \langle 6, 4\rangle$ y el punto $A(5, 7)$ pertenece a ella, ¿cuál es la ecuación vectorial de L?, ¿cuál es su ecuación cartesiana?

Para determinar la ecuación vectorial de la recta, observamos que la recta L pasa por el punto A, luego, podemos usar $\vec{a}$ como el vector posición:

$\langle x, y\rangle = \langle 5, 7\rangle + \lambda\langle 6, 4\rangle$ con λ, número real.

Si remplazamos valores en la ecuación vectorial, podemos ubicar en el plano cartesiano dos puntos pertenecientes a la recta y, luego, determinar su ecuación cartesiana.



Entonces, para determinar un punto B de la recta L, asignamos un valor cualquiera a λ y lo remplazamos en la ecuación vectorial. Por ejemplo, si $\lambda = 2$:

$\vec{b} = \langle 5, 7\rangle + 2 \cdot \langle 6, 4\rangle = \langle 5, 7\rangle + \langle 12, 8\rangle = \langle 17, 15\rangle$

Luego, el punto B resultante es (17, 15).

Finalmente, calculamos la ecuación cartesiana de la recta, ya sea a partir de los puntos A y B, o bien, dados un punto de ella y su pendiente.

Podemos obtener el valor de la pendiente m a partir de las coordenadas del vector director $\langle d_1, d_2\rangle$ como $m = \dfrac{d_2}{d_1}$.

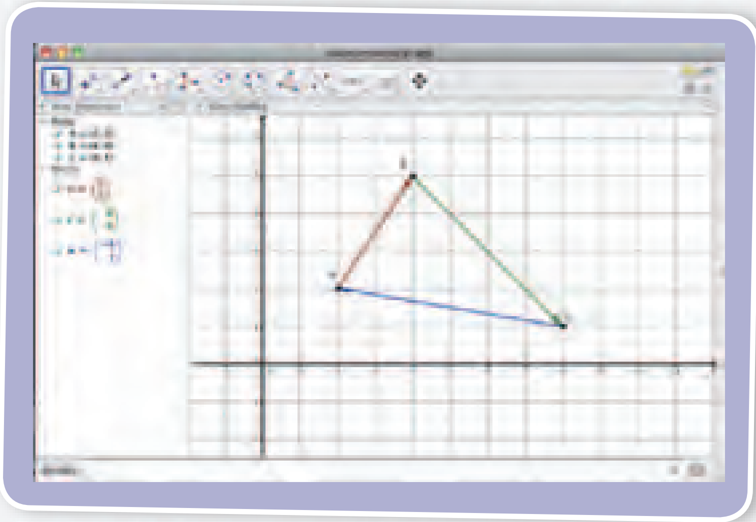
Entonces, remplazando en la ecuación punto-pendiente, obtenemos que la recta es $y - 7 = \dfrac{4}{6} \cdot (x - 5)$. Y, ordenando, la recta es: $2x - 3y + 11 = 0$.

Uso GeoGebra

GeoGebra es un *software* libre que relaciona álgebra y geometría. Por una parte, se pueden construir puntos, vectores y rectas, y luego modificarlas dinámicamente. Pero también se pueden ingresar las ecuaciones y coordenadas directamente y obtener las gráficas correspondientes.

Para descargar este programa ingresa a www.geogebra.org/cms/es. Pulsa el botón Descarga, y luego haz clic en el botón Applet Start. De este modo podrás trabajar con este *software* sin tener la necesidad de instalarlo en el computador.

1. **Usando el botón Nuevo punto, ubica tres puntos no colineales en el plano cartesiano.**
2. **Con el botón Vector entre dos puntos, determina los vectores correspondientes.**
   a. $\overrightarrow{AB}$
   b. $\overrightarrow{BC}$
   c. $\overrightarrow{CA}$



Observa en la **Vista algebraica** que los vectores se escriben en dos filas, de modo que la abscisa está en la primera fila y la ordenada está en la segunda fila.

3. **Para determinar la recta que pasa por un punto, digamos A, y cuyo vector director es el vector v, por ejemplo, se escribe en la celda Entrada el comando Recta [A, v] y luego presiona Enter.**
   a. Determina la recta que pasa por A y cuyo vector director es $\overrightarrow{AB}$.
   b. Determina la recta que pasa por B y cuyo vector director es $\overrightarrow{BC}$.
   c. Determina la recta que pasa por C y es paralela a la recta que pasa por A y B. Observa las correspondientes ecuaciones cartesianas. ¿Qué tienen en común?, ¿en qué se diferencian?

Al ingresar cada recta en el programa GeoGebra, simultáneamente en la **Vista Gráfica** se representa gráficamente la recta y en la **Vista algebraica** aparece la ecuación cartesiana correspondiente.

4. **Con el botón Elige y Mueve, puedes mover cada punto, o incluso, los vectores, y a medida que desplazas los elementos, el programa determina la nueva ubicación de cada punto y recalcula las ecuaciones correspondientes en la Vista Algebraica.**
   a. Si desplazas uno de los puntos de modo que uno de los vectores quede horizontal, ¿qué forma tiene la ecuación cartesiana de la recta que tiene ese vector director?, ¿por qué sucede esto?

¿Cómo hacerlo?

Dada la ecuación vectorial de la recta: $\langle x, y\rangle = \langle 5, 2\rangle + \lambda\langle 3, 1\rangle$, determina la correspondiente ecuación cartesiana.

Otra forma de obtener la ecuación cartesiana correspondiente a una ecuación vectorial dada es igualar componente a componente y obtener una ecuación que relacione los valores de x e y, sin el parámetro λ. Para esto, despejamos λ en cada una de las ecuaciones.

$x = 5 + 3\lambda \rightarrow \lambda = \frac{x-5}{3}$

$y = 2 + \lambda \rightarrow \lambda = y - 2$

Luego, igualamos las ecuaciones y ordenamos la ecuación:

$$\frac{x-5}{3} = y - 2$$
$$x - 5 = 3y - 6$$
$$x - 3y + 1 = 0$$

¿Cómo hacerlo?

Dada la ecuación cartesiana de la recta: $4x + 3y + 7 = 0$, determina la correspondiente ecuación vectorial.

Primer paso: para obtener el vector posición se requiere determinar un punto que pertenezca a la recta; por ejemplo, podemos calcular el valor de y remplazando en la ecuación de la recta un valor para x.

Si $x = -1$, entonces $4 \cdot (-1) + 3y + 7 = 0$

$$3y + 3 = 0$$
$$y = -1$$

Luego, el vector posición es $\langle -1, -1\rangle$.

Segundo paso: para obtener el vector director podemos calcular la pendiente de la recta $m = \frac{d_2}{d_1}$ y, luego, escribir el vector director.

$$4x + 3y + 7 = 0$$
$$3y = -4x - 7$$
$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{7}{3}\text{, es decir, } m = -\frac{4}{3}.$$

Luego, un vector director es $\langle 3, -4\rangle$.

Por lo tanto, una ecuación vectorial de la recta es: $\langle x, y\rangle = \langle -1, -1\rangle + \lambda\langle 3, -4\rangle$.

Tomo nota

- La ecuación de la recta en el plano se puede representar mediante:
  - la ecuación cartesiana de la recta: $ax + by + c = 0$;
  - la ecuación vectorial de la recta: $\langle x, y\rangle = \vec{p}_0 + \lambda\vec{d} = \langle x_0, y_0\rangle + \lambda\langle d_1, d_2\rangle$, donde $\vec{d}$ es el vector director de la recta, $\vec{p}_0\ \langle x_0, y_0\rangle$ es el vector posición y λ es su parámetro.

    Si d es un vector director cuyas coordenadas son $\langle d_1, d_2\rangle$, la pendiente m de la recta correspondiente está dada por $m = \frac{d_2}{d_1}$.

Actividades

1. **Para cada ecuación vectorial de la recta, determina la ecuación cartesiana correspondiente.**
   a. $\langle x, y\rangle = \langle 1, 2\rangle + \lambda \langle 4, 8\rangle$
   b. $\langle x, y\rangle = \langle 0, 4\rangle + \lambda \langle 3, 5\rangle$
   c. $\langle x, y\rangle = \langle 3, -2\rangle + \lambda \langle 1, -6\rangle$
   d. $\langle x, y\rangle = \langle 5, 1\rangle + \lambda \langle 0, 3\rangle$

2. **Determina la ecuación cartesiana correspondiente a la recta que pasa por el punto (5, –2) y es paralela al vector $\vec{d} = \langle -2, 3\rangle$.**

3. **La recta L pasa por el punto (–3, 2) y es paralela a la recta $y = 3x - 2$.**
   a. Encuentra la ecuación vectorial de la recta L.
   b. Decide si los puntos (0, 0), (0, 11) y (–3, 0) pertenecen a la recta L. Justifica tu decisión.

4. **Determina la ecuación vectorial para cada recta.**
   a. $4x + 2 = 3y - 3$
   b. $2x - 5y + 1 = 0$
   c. $-7x + y - 18 = 0$
   d. $8x - 3y = -6$

5. **Indica cuál es la posición relativa entre las rectas dadas, en cada caso. Explica.**
   a. L_1: $x - y - 2 = 0$, L_2: $\langle x, y\rangle = \langle 1, 2\rangle + \lambda\langle 2, 2\rangle$
   b. L_1: $4x + y - 3 = 0$, L_2: $\langle x, y\rangle = \langle 3, 0\rangle + \lambda\langle 1, 4\rangle$
   c. L_1: $2x - y + 2 = 0$, L_2: $\langle x, y\rangle = \langle 1, -1\rangle + \lambda\langle 3, -1\rangle$
   d. L_1: $x + y - 9 = 0$, L_2: $\langle x, y\rangle = \langle 5, 4\rangle + \lambda\langle -1, 1\rangle$

6. **Dada la recta L: $\langle x, y\rangle = \langle 2, -3\rangle + \lambda \langle 1, 2\rangle$ y el punto $P(2, 1)$, calcula la ecuación de la recta:**
   a. paralela a L que pasa por P.
   b. perpendicular a L que pasa por P.

7. **Determina la recta que pasa por el punto $A(2, -1)$ y tiene la misma pendiente que:**
   a. $\langle x, y\rangle = \langle 0, 3\rangle + \lambda\langle 1, 1\rangle$
   b. $2x - 3y = 6$

Antes de continuar

1. ¿Es posible que dos ecuaciones cartesianas distintas tengan asociada la misma ecuación vectorial?, ¿por qué?
2. Al determinar la ecuación vectorial correspondiente a una ecuación cartesiana dada, ¿la respuesta es única? Explica.

Ecuación vectorial y paramétrica de una recta en el espacio

Aprenderé a: identificar y describir rectas en el espacio, deducir la ecuación vectorial de la recta en el espacio y su relación con la ecuación paramétrica.

Repaso

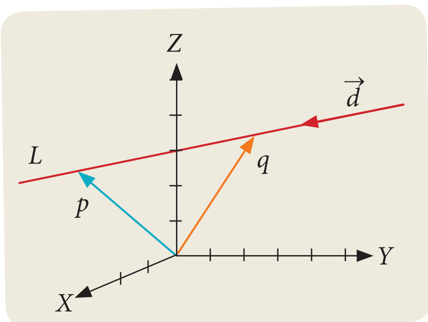
1. ¿Cuál es la diferencia entre el vector posición y el vector director en una ecuación vectorial de la recta? Explica.

Al ubicar dos puntos en el plano, siempre podemos trazar una recta que los contiene. Si ubicamos dos puntos en el plano cartesiano, podemos determinar la ecuación de la recta y podemos justificar que es la única recta que pasa por los dos puntos (quizá podamos escribirla de diferentes maneras, pero la recta sigue siendo la misma, no hay dos rectas distintas que pasen por dos puntos fijos del plano).

Ahora, ¿qué sucede en el caso de puntos en el espacio? Esto es, dados los puntos en el espacio P y Q, ¿existe una recta que pase por P y Q?, ¿existe más de una?, ¿cómo lo sabes?

- Además de los vectores posición y director, ¿es necesario considerar un nuevo vector para identificar una recta en el espacio?, ¿por qué?

Observa que en el espacio cartesiano, requerimos de tres coordenadas para ubicar cada punto correctamente, pero para representar una recta no sucede que necesitemos tres vectores distintos. En cambio, podemos utilizar su vector posición y su vector director para escribir la ecuación vectorial, tal como en el plano, la diferencia está en que ahora estos vectores tienen tres coordenadas.



La ecuación vectorial de una recta en el espacio, se escribe tal como la de una recta en el plano, pero extendiéndola a tres coordenadas. Es decir, dado un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y un vector $\vec{d} = \langle d_1, d_2, d_3\rangle$, la ecuación de la recta que pasa por P y tiene dirección $\vec{d}$ es:

$\langle x, y, z\rangle = \langle x_0, y_0, z_0\rangle + \lambda\langle d_1, d_2, d_3\rangle$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

O también $\langle x, y, z\rangle = \langle x_0 + \lambda d_1, y_0 + \lambda d_2, z_0 + \lambda d_3\rangle$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

¿Cómo hacerlo?

Dados los puntos en el espacio $P(3, -3, 5)$ y $Q(1, 4, 6)$, ¿cuál es la ecuación vectorial de la recta L que los contiene?

Tal como al escribir la ecuación en el plano, escogemos cualquiera de los dos puntos como vector posición. Digamos que usamos $\vec{p} = \langle 3, -3, -5\rangle$.

Luego, calculamos el vector director, que corresponde a $\overrightarrow{PQ}$.

$$\begin{aligned}\vec{d} &= \overrightarrow{PQ}\\ &= \vec{q} - \vec{p}\\ &= \langle 1, 4, 6\rangle - \langle 3, -3, 5\rangle\\ &= \langle -2, 7, 1\rangle\end{aligned}$$

Finalmente, la ecuación de L es $\langle x, y, z\rangle = \langle 3, -3, -5\rangle + \lambda\langle -2, 7, 1\rangle$.

Observa que la ecuación $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 4, 6\rangle + \lambda\langle -2, 7, 1\rangle$ también representa a la recta L.

¿Lo entiendes?

Si usamos como vector director $\vec{d} = \langle 2, -7, -1\rangle$, ¿representa la misma recta? Explica.

¿Cómo hacerlo?

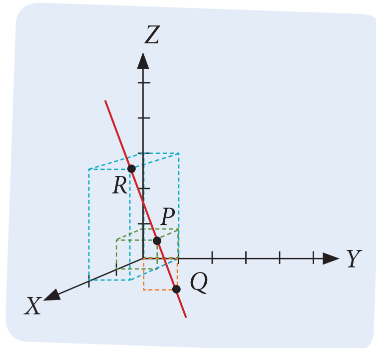
Los puntos $P(1, 1, 1)$, $Q(0, 1, -1)$ y $R(2, 1, 3)$, ¿son colineales?
Si lo fueran, escribe la ecuación vectorial de la recta que los contiene.

Podemos asegurar que los puntos P, Q y R son colineales si comparamos los vectores que tienen origen y extremo en estos puntos. Si estos vectores no son paralelos, los tres puntos no pueden estar en la misma recta, porque en realidad serían como los vértices de un triángulo. Pero cuando son paralelos y como además, necesariamente, tienen un punto en común, entonces estos puntos están en la misma recta.

Primero, verificamos si $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$ son paralelos:

$\overrightarrow{PQ} = \langle 0 - 1, 1 - 1, -1 - 1\rangle = \langle -1, 0, -2\rangle$

$\overrightarrow{QR} = \langle 2 - 0, 1 - 1, 3 - -1\rangle = \langle 2, 0, 4\rangle$.



¿Son paralelos? Para asegurar esto, podemos determinar si existe un número real λ, tal que $\overrightarrow{QR} = \lambda\overrightarrow{PQ}$.

En efecto, si $\langle 2, 0, 4\rangle = \lambda\langle -1, 0, -2\rangle$, entonces, igualando componente a componente, tenemos que $2 = -\lambda$ y $4 = -2\lambda$, de donde podemos inferir que $\lambda = -2$. Por lo tanto, los puntos P, Q y R son colineales.

Para escribir la ecuación de la recta que contiene a P, Q y R podemos utilizar como vector de posición a $\vec{p}$ y como vector director a $\overrightarrow{QR}$.

$\langle x, y, z\rangle = \langle x_0, y_0, z_0\rangle + \lambda\langle d_1, d_2, d_3\rangle$.

$\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 1, 1\rangle + \lambda\langle 2, 0, 4\rangle$

Ahora, si utilizáramos el vector $\vec{r}$ y el vector $\overrightarrow{PQ}$, obtendríamos una ecuación diferente, $\langle x, y, z\rangle = \langle 2, 1, 3\rangle + \lambda_1\langle -1, 0, -2\rangle$, pero que representa la misma recta.

Una misma recta puede representarse mediante distintas ecuaciones vectoriales. Esto sucede porque, por ejemplo, los vectores $\langle 2, 0, 4\rangle$ y $\langle -1, 0, -2\rangle$ representan la misma dirección. Por otra parte, cualquiera de los puntos que pertenecen a la recta puede utilizarse como vector posición.

Para verificar que un punto pertenece a una recta, podemos determinar cuál es el valor de λ de modo que se satisfaga la ecuación vectorial correspondiente. Por ejemplo, $\langle 2, 1, 3\rangle$ pertenece a la recta de ecuación $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 1, 1\rangle + \lambda\langle 2, 0, 4\rangle$ porque al remplazar $\lambda = \frac{1}{2}$ se satisface la igualdad:

$$\langle 2, 1, 3\rangle = \langle 1, 1, 1\rangle + \frac{1}{2}\cdot\langle 2, 0, 4\rangle$$

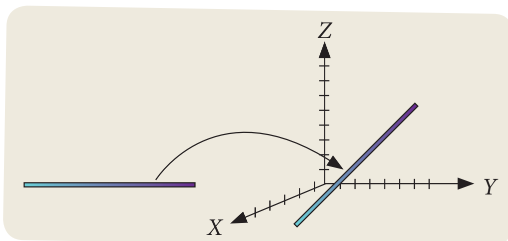
Tomo nota

- La ecuación vectorial de la recta en el espacio está dada por la expresión $\langle x, y, z\rangle = \vec{p}_0 + \lambda\vec{d} = \langle x_0, y_0, z_0\rangle + \lambda\langle d_1, d_2, d_3\rangle$, donde:
  - $\vec{d}\,\langle d_1, d_2, d_3\rangle$ es el vector director de la recta;
  - $\vec{p}_0\,\langle x_0, y_0, z_0\rangle$ es el vector posición de la recta;
  - λ es el parámetro.

Actividades

1. **Escribe la ecuación vectorial de la recta L que pasa por $P(12, -5, 7)$ y $Q(0, 6, -3)$.**
2. **Determina si los siguientes puntos son colineales. Si así fuera, escribe la ecuación vectorial correspondiente.**
   a. $P(1, 0, 2)$, $Q(-1, 1, 1)$ y $R(3, -1, 1)$.
   b. $P(-1, -1, -1)$, $Q(-1, 0, 1)$ y $R(-1, -2, -3)$.
   c. $P(0, -1, -2)$, $Q(0, 2, 4)$ y $R(0, 1, 2)$.
   d. $P(4, 2, 1)$, $Q(3, 7, 3)$ y $R(1, -5, -2)$.
3. **Considera la siguiente recta en el espacio, de ecuación $\langle 1, 2, 1\rangle + \lambda\,\langle 0, 1, 1\rangle$.**
   a. Encuentra, para cuatro valores distintos de λ, cuatro puntos que pertenezcan a la recta.
   b. Determina los valores de λ con los cuales puedes establecer que (1, 1, 0) y (1, 2, 1) pertenecen a la recta.
   c. Justifica por qué el punto (1, 6, 6) no pertenece a la recta.

Cuando utilizamos la ecuación vectorial de la recta, cada valor de λ que remplacemos en la ecuación determina un único punto en el espacio. Además, sucede que si pudiéramos remplazar los distintos valores de λ, uno a uno, podríamos ver cómo se va construyendo la recta de forma continua. Dicho de otra manera, a medida que se avanza en la recta numérica real, con distintos valores de λ, se avanza también en la recta en el espacio correspondiente a la ecuación.



Atención

Una función entre un conjunto A y un conjunto B es una asignación de cada elemento del conjunto A con un único elemento del conjunto B.

Para comprender mejor esta relación, puedes imaginar el parámetro λ como el tiempo y pensar que, a medida que el tiempo transcurre, se va avanzando en la recta (que está definida por la ecuación) de forma continua por el espacio. Así, cada instante de tiempo determina un punto en el espacio.

Si consideramos esta relación como una función, cuyo dominio corresponde a la recta numérica real y su recorrido, a la recta en el espacio, veremos que a cada valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ se le asigna el punto en el espacio $(1, 2 + \lambda, 1 + \lambda)$. Esto, expresado en términos de función, es $f(\lambda) = (1, 2 + \lambda, 1 + \lambda)$, la que se conoce como **función paramétrica**.

¿Cómo hacerlo?

¿Cuál es la función paramétrica de la recta que pasa por los puntos (1, 2, –1) y (–2, 3, 2)?

Calculamos el vector director, $\langle d_1, d_2, d_3\rangle = \langle 1 - -2, 2 - 3, -1 - 2\rangle = \langle 3, -1, -3\rangle$ y luego, escogemos uno de los puntos como vector posición $\langle x_0, y_0, z_0\rangle = \langle 1, 2, -1\rangle$.

Entonces, escribimos la función $f(\lambda) = \langle x_0 + \lambda \cdot d_1, y_0 + \lambda \cdot d_2, z_0 + \lambda \cdot d_3\rangle$, esto es: $f(\lambda) = \langle 1 + 3 \cdot \lambda, 2 - \lambda, -1 - 3 \cdot \lambda\rangle$

Ahora, podemos escribir la ecuación paramétrica $\langle x, y, z\rangle = \langle x_0 + \lambda d_1, y_0 + \lambda d_2, z_0 + \lambda d_3\rangle$ como tres ecuaciones, igualando coordenada a coordenada:

$$x = x_0 + \lambda d_1$$
$$y = y_0 + \lambda d_2$$
$$z = z_0 + \lambda d_3$$

Como puedes observar, si conocemos el vector posición $\langle x_0, y_0, z_0\rangle$ y el vector director $\langle d_1, d_2, d_3\rangle$, los valores de x, y, z dependen solo del parámetro λ, por lo tanto, podemos reescribir las ecuaciones anteriores como funciones en los números reales.

$$x(\lambda) = x_0 + \lambda d_1$$
$$y(\lambda) = y_0 + \lambda d_2$$
$$z(\lambda) = z_0 + \lambda d_3$$

Estas tres ecuaciones definen la misma recta, pero permiten expresar cómo varía cada coordenada con respecto al parámetro λ.

Tomo nota

- La imagen de la **función paramétrica** $f(\lambda) = \langle x_0 + \lambda d_1, y_0 + \lambda d_2, z_0 + \lambda d_3\rangle$ representa una recta en el espacio, cuya ecuación vectorial es $\langle x, y, z\rangle = \langle x_0, y_0, z_0\rangle + \lambda \langle d_1, d_2, d_3\rangle$.
- La **ecuación paramétrica** de la recta en el espacio está dada por $\langle x, y, z\rangle = \langle x_0 + \lambda d_1, y_0 + \lambda d_2, z_0 + \lambda d_3\rangle$.
- Podemos separar la ecuación paramétrica en tres ecuaciones, que definen la misma recta, y que llamaremos **ecuaciones paramétricas de la recta** en el espacio.

$$x(\lambda) = x_0 + \lambda d_1$$
$$y(\lambda) = y_0 + \lambda d_2$$
$$z(\lambda) = z_0 + \lambda d_3$$

Actividades

1. **Determina la función paramétrica que define la recta en el espacio que pasa por los siguientes puntos. Luego, escribe la ecuación paramétrica de cada recta.**
   a. $P(4, 2, 7)$, $Q(3, -1, 6)$
   b. $P(1, 3, -4)$, $Q(0, -2, 2)$
   c. $P(0, 3, 5)$, $Q(-2, 1, -3)$
   d. $P(2, 4, 7)$, $Q(3, -2, 1)$
2. **Para cada una de las siguientes rectas, escribe sus ecuaciones paramétricas.**
   a. Recta que pasa por $P(2, 2, -3)$ y $Q(-1, -1, 1)$.
   b. Recta con vector director $\langle 5, 2, 0\rangle$ y vector posición $\langle 6, 0, 2\rangle$.
   c. $L: \langle x, y, z\rangle = \langle 2, 5, -9\rangle + \mu\langle -3, 4, -5\rangle$
   d. Recta que pasa por $P(1, 4, -7)$ y $Q(-2, 0, 3)$.
   e. Recta con vector director $\langle -2, 5, 1\rangle$.
   f. $L: \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 0, -6\rangle + \mu\langle -4, 3, -6\rangle$

Antes de continuar

1. ¿Cuáles son las diferencias entre la ecuación vectorial y la ecuación paramétrica de una misma recta?
2. ¿Cuáles son las posibles ventajas de escribir la ecuación en su forma paramétrica?

Practico

Resuelve las siguientes actividades para consolidar los conceptos y los procedimientos que has aprendido.

1. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica las falsas.

a. El vector nulo tiene módulo igual a cero.

b. Dos vectores opuestos tienen distintas direcciones y diferentes módulos.

c. La suma de dos vectores es siempre un número real.

d. La diferencia entre dos vectores es otro vector.

2. Utilizando los contenidos aprendidos hasta aquí, responde en tu cuaderno.

a. ¿Qué característica tienen los puntos $P(a, b)$ que están ubicados en el eje Y?

b. Los puntos $P(a, b)$ y $Q(b, a)$, ¿son iguales? Justifica.

c. La suma de dos vectores, ¿es conmutativa? Es decir, ¿$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$?

d. ¿Cuáles son las condiciones que deben cumplir dos vectores para considerarlos iguales?

3. Determina la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto P y tiene vector director $\vec{d}$, en cada caso. Luego, obtén otros tres puntos de cada recta.

a. $P(2, 1)$ y $\vec{d} = \langle -2, 6\rangle$

b. $P(-1, 4)$ y $\vec{d} = \langle 3, 8\rangle$

c. $P(0, 5)$ y $\vec{d} = \langle 4, -7\rangle$

4. Determina la ecuación vectorial correspondiente, en cada caso.

a. $4x - 5 = 2y + 3$

b. $3x - 4y + 7 = 0$

5. Calcula, en cada caso, el valor de k de modo que las operaciones entre vectores tengan el resultado indicado:

a. $\langle 2, k\rangle + \langle 1, -6\rangle = \langle 3, 1\rangle$

b. $\langle 1, k\rangle + \langle k, 3\rangle = \langle 4, 6\rangle$

c. $\langle k, 2\rangle + \langle -4, 6\rangle + \langle k, 3\rangle = \langle 8, 1\rangle$

d. $\langle k, 2\rangle - \langle 3, k\rangle = \langle 0, -1\rangle$

e. $\langle -3, 2\rangle + 2\,\langle k, 2\rangle = \langle 7, 6\rangle$

f. $3\,\langle 4, k\rangle - 4\,\langle k, 7\rangle = \langle 20, -34\rangle$

6. ¿Para qué valor de q, en cada caso, los vectores dados son paralelos?

a. $\langle 3, 5\rangle$ y $\langle q, 15\rangle$

b. $\langle 4, -10\rangle$ y $\langle q, 5\rangle$

c. $\left\langle \frac{1}{2}, q\right\rangle$ y $\left\langle 3, -\frac{9}{2}\right\rangle$

d. $\langle 6, 8\rangle$ y $\langle q, 6\rangle$

e. $\left\langle q, -\frac{4}{5}\right\rangle$ y $\left\langle -\frac{3}{4}, \frac{12}{5}\right\rangle$

f. $\left\langle \frac{14}{3}, 2\right\rangle$ y $\left\langle q, -\frac{4}{7}\right\rangle$

7. ¿Para qué valor de p, en cada caso, los vectores dados son perpendiculares?

a. $\langle 4, 5\rangle$ y $\langle p, -12\rangle$

b. $\langle 6, 15\rangle$ y $\langle -9, p\rangle$

c. $\langle 12, 0\rangle$ y $\langle p, 25\rangle$

d. $\left\langle p, \frac{1}{3}\right\rangle$ y $\left\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right\rangle$

e. $\left\langle 3, \frac{3}{7}\right\rangle$ y $\langle -2, p\rangle$

f. $\left\langle -\frac{15}{4}, p\right\rangle$ y $\langle \sqrt{2}, 5\rangle$

8. Determina un vector paralelo a $\langle -5, 2\rangle$, en cada caso, tal que cumpla:

a. Su segunda componente es 3.

b. Su primera componente es –1.

c. Su segunda componente es negativa y su módulo es 10.

d. Su primera componente es positiva y su módulo es 1.

e. Al restar 3 a su segunda componente, se obtiene su primera componente.

f. Al sumar 4 a su primera componente, se obtiene su segunda componente.

9. Calcula el módulo de los siguientes vectores.

a. $\langle 1, -2\rangle$

b. $\langle -3, 4\rangle$

c. $\langle -4, 7\rangle$

d. $\langle 1, 0, 2\rangle$

e. $\langle 0, -3, 4\rangle$

f. $\langle -2, 1, 1\rangle$

10. Determina el resultado de las operaciones siguientes, si $\vec{u} = \langle -1, 1, 2\rangle$, $\vec{v} = \langle 2, 0, 3\rangle$ y $\vec{w} = \langle -1, 3, 9\rangle$.

a. $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$

b. $6\vec{u} + 2\vec{v} - 2\vec{w}$

c. $\frac{1}{3}(\vec{v} - 3\vec{u} - 4\vec{w})$

d. $\frac{1}{3}(3\vec{u} - \vec{v} + 4\vec{w})$

e. $2\vec{v} - 3(\vec{u} + \vec{w})$

11. Decide si los siguientes vectores son paralelos o no.

a. $\langle -3, -6, 3\rangle$ y $\langle 5, 10, -5\rangle$

b. $\langle 3, -6, 3\rangle$ y $\langle -1, 2, -1\rangle$

c. $\langle 1, 0, 1\rangle$ y $\langle -1, 0, 1\rangle$

d. $\langle 2, 0, -1\rangle$ y $\langle -8, 0, 4\rangle$

e. $\langle 3, 2, 1\rangle$ y $\langle 1, 2, 3\rangle$

12. En cada caso, calcula el vector $\overrightarrow{PQ}$.

a. $P(1, -1, 3)$, $Q(3, 1, 0)$

b. $P(2, 0, 1)$, $Q(1, -1, 6)$

c. $P(1, 0, 1)$, $Q(1, 0, -3)$

d. $P(1, -1, 2)$, $Q(1, -1, 2)$

e. $P(1, 0, -3)$, $Q(-1, 0, 3)$

13. ¿Cuál es el punto Q de modo que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea igual al vector $\vec{v}$?

a. $P(2, 3)$ $\vec{v} = \langle 4, 7\rangle$

b. $P(-4, 5)$ $\vec{v} = \langle 1, -2\rangle$

c. $P\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ $\vec{v} = \left\langle \frac{3}{4}, 1\right\rangle$

d. $P(1, 0, 2)$ $\vec{v} = \langle 3, 4, 0\rangle$

e. $P(-2, 1, 4)$ $\vec{v} = \langle 6, -2, -3\rangle$

14. Si P y Q son los extremos de un segmento, ¿cuál es su punto medio?

a. $P(3, 5)$ y $Q(4, 1)$

b. $P(5, -2)$ y $Q(-2, 1)$

c. $P\left(\frac{3}{4}, 1\right)$ y $Q\left(\frac{2}{3}, 5\right)$

d. $P(-2, 1)$ y $Q(2, -1)$

e. $P(3, 1)$ y $Q(1, 3)$

15. ¿Cuál es el punto Q tal que el vector $\overrightarrow{PQ}$ tenga la misma dirección y módulo que el vector $\vec{v}$, pero sentido opuesto?

a. $P(3, 7)$ $\vec{v} = \langle 1, 2\rangle$

b. $P\left(-\frac{2}{3}, 6\right)$ $\vec{v} = \langle 3, 5\rangle$

c. $P\left(12, \frac{1}{5}\right)$ $\vec{v} = \left\langle \frac{3}{4}, -2\right\rangle$

d. $P(1, 2, -1)$ $\vec{v} = \langle 2, 0, 1\rangle$

e. $P(3, 4, 6)$ $\vec{v} = \langle 6, -2, 0\rangle$

f. $P\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{6}\right)$ $\vec{v} = \left\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, 1\right\rangle$

16. Si $\vec{u} = \langle 1, 2\rangle$, $\vec{v} = \langle -3, 5\rangle$ y $\vec{w} = \left\langle 4, \frac{1}{2}\right\rangle$, determina el vector $\vec{x}$, en cada caso.

a. $2\vec{u} - \vec{x} + \vec{v} = \langle -4, 5\rangle$

b. $\vec{u} + \vec{v} - (\vec{x} + \vec{w}) = \left\langle -1, \frac{13}{2}\right\rangle$

c. $4(\vec{x} - \vec{w}) - 3(\vec{v} - \vec{x}) = \langle 21, -66\rangle$

d. $\vec{x} + \vec{v} = 2\vec{x} - \vec{w}$

e. $2(\vec{x} + \vec{v}) - \vec{u} = \vec{x} - \vec{w} + 3\vec{u}$

f. $5(\vec{u} - \vec{v}) - 2(\vec{x} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{x}$

17. Si $\vec{u} = \langle 3, -1, 0\rangle$, $\vec{v} = \langle 4, 0, 1\rangle$ y $\vec{w} = \langle -1, 1, 5\rangle$, determina el vector $\vec{x}$, en cada caso.

a. $2\vec{x} + \vec{u} = \vec{w}$

b. $2(\vec{v} - \vec{x}) + \vec{u} = \vec{x} - \vec{w}$

c. $3(2\vec{u} + \vec{x}) + \vec{w} = 2\vec{x} - \vec{v}$

d. $2(3\vec{v} - \vec{x}) = 5\vec{w} + \vec{u} - 3\vec{x}$

e. $6\vec{u} + 2\vec{x} - 2\vec{w} = 2\vec{v} - 3(\vec{x} + \vec{w})$

f. $\frac{1}{3}(\vec{v} - 2\vec{x} + \vec{u}) = 3(2\vec{w} - 2\vec{x} - 2\vec{v})$

18. ¿Cuál es la ecuación vectorial de la recta que pasa por cada par de puntos?

a. $(1, 3)$ y $(2, 4)$

b. $(3, -5)$ y $(0, 3)$

c. $(5, 1)$ y $\left(-2, \frac{1}{3}\right)$

d. $(0, 6)$ y $\left(\frac{2}{5}, -\frac{3}{2}\right)$

e. $\left(\frac{12}{5}, -4\right)$ y $\left(\frac{4}{3}, -1\right)$

f. $\left(\frac{21}{2}, 5\right)$ y $\left(2, -\frac{4}{3}\right)$

19. **¿Cuál es la ecuación vectorial de la recta que pasa por cada par de puntos?**

a. $(1, 2, 3)$ y $(2, 0, 4)$

b. $(-2, 0, 5)$ y $(-3, 6, 2)$

c. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -6\right)$ y $(-1, 0, 3)$

d. $\left(\frac{13}{2}, -\frac{4}{5}, 3\right)$ y $\left(3, 5, -\frac{5}{2}\right)$

e. $(2, 3, -1)$ y $(-2, -3, 1)$

f. $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 0)$

20. **Para cada ecuación vectorial, ¿cuál es la ecuación cartesiana asociada?**

a. $\langle 2, 4\rangle + \lambda \langle 2, -1\rangle$

b. $\langle 0, 1\rangle + \lambda \langle 1, 1\rangle$

c. $\langle -2, 6\rangle + \lambda \langle 4, 3\rangle$

d. $\langle 7, -1\rangle + \lambda \langle 5, 0\rangle$

e. $\langle 4, 4\rangle + \lambda \langle 4, 4\rangle$

f. $\langle 0, 1\rangle + \lambda \langle 15, 2\rangle$

21. **Determina, en cada caso, la ecuación cartesiana de la recta paralela a $\vec{v}$ y que pase por P.**

a. $\vec{v} = \langle 2, 1\rangle, P(1, 3)$

b. $\vec{v} = \langle -1, 1\rangle, P(0, 5)$

c. $\vec{v} = \langle 2, 5\rangle, P(6, 0)$

d. $\vec{v} = \langle -4, 1\rangle, P(-3, 12)$

e. $\vec{v} = \langle 2, 0\rangle, P\left(\frac{5}{2}, \frac{8}{3}\right)$

f. $\vec{v} = \langle 0, -12\rangle, P\left(\frac{3}{5}, -21\right)$

22. **Determina, en cada caso, la ecuación cartesiana de la recta perpendicular a $\vec{v}$ y que pase por P.**

a. $\vec{v} = \langle 3, 1\rangle, P(2, 7)$

b. $\vec{v} = \langle 2,-5\rangle, P(4, 7)$

c. $\vec{v} = \langle 0, 13\rangle, P(1, 1)$

d. $\vec{v} = \left\langle \frac{3}{2}, 5\right\rangle, P(0, 1)$

e. $\vec{v} = \left\langle \frac{4}{3}, -6\right\rangle, P\left(\frac{5}{2}, 12\right)$

f. $\vec{v} = \left\langle \frac{3}{5}, -\frac{5}{2}\right\rangle, P\left(-\frac{3}{4}, \frac{7}{2}\right)$

23. **Para cada ecuación cartesiana, determina una ecuación vectorial asociada a ella.**

a. $x + y = 3$

b. $x - 2y = 7$

c. $2x + 3y = 10$

d. $x = 5$

e. $6x - 5y = -65$

f. $x - y = 0$

24. **Determina, en cada caso, si las rectas dadas son paralelas, perpendiculares, o ninguna de ambas:**

a. $L_1: \langle 3, -1\rangle + \lambda \langle 4, -2\rangle$ y $L_2: \langle 1, 0\rangle + \lambda \langle 2, -1\rangle$

b. $L_1: \langle 4, 1\rangle + \lambda \left\langle 4, -\frac{8}{3}\right\rangle$ y $L_2: \langle 4, -1\rangle + \lambda \langle 2, 3\rangle$

c. $L_1: \langle -3, 5\rangle + \lambda \langle 6, -9\rangle$ y $L_2: \langle 5, -1\rangle + \lambda \langle -2, 3\rangle$

d. $L_1: \langle 7, 0\rangle + \lambda \langle 3, 4\rangle$ y $L_2: \langle 8, 12\rangle + \lambda \langle 4, 3\rangle$

e. $L_1: \langle 12, -2\rangle + \lambda \langle 5, 6\rangle$ y $L_2: \langle -9, 1\rangle + \lambda \left\langle \frac{5}{3}, 2\right\rangle$

f. $L_1: \langle -5, 9\rangle + \lambda \langle 12, 24\rangle$ y $L_2: \langle 1, 1\rangle + \lambda \langle 10, -5\rangle$

25. **Si sobre un cuerpo se aplican las fuerzas $\vec{v}$ y $\vec{w}$, ¿cuál debe ser la fuerza $\vec{f}$, ejercida sobre el mismo cuerpo, para que la fuerza total sea nula?**

a. $\vec{v} = \langle 1, 2\rangle, \vec{w} = \langle 3, 4\rangle$

b. $\vec{v} = \langle 0, 3\rangle, \vec{w} = \langle 2, -5\rangle$

c. $\vec{v} = \langle 4, -3\rangle, \vec{w} = \langle -7, 1\rangle$

d. $\vec{v} = \left\langle \frac{2}{3}, 0\right\rangle, \vec{w} = \langle 7, -1\rangle$

e. $\vec{v} = \left\langle \frac{3}{4}, -2\right\rangle, \vec{w} = \langle 5, 0\rangle$

f. $\vec{v} = \langle 1, -1\rangle, \vec{w} = \langle 1, 1\rangle$

26. **Si sobre un cuerpo se aplican las fuerzas $\vec{v}$ y $\vec{w}$, ¿cuál debe ser la fuerza $\vec{f}$, ejercida sobre el mismo cuerpo, para que la fuerza total sea nula?**

a. $\vec{v} = \langle 0, 1, 2\rangle, \vec{w} = \langle 2, 0, 4\rangle$

b. $\vec{v} = \langle -1, 0, -1\rangle, \vec{w} = \langle 3, 2, 0\rangle$

c. $\vec{v} = \langle 0, 1, 0\rangle, \vec{w} = \langle 2, 0, -2\rangle$

d. $\vec{v} = \langle 1, 2, 4\rangle, \vec{w} = \langle -5, -2, 2\rangle$

e. $\vec{v} = \left\langle 0, -1, \frac{3}{2}\right\rangle, \vec{w} = \left\langle -\frac{1}{2}, 1, 0\right\rangle$

f. $\vec{v} = \left\langle \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, 0\right\rangle, \vec{w} = \langle 1, 1, 1\rangle$

Marca la opción correcta en los ítems 27 a 36.

27. ¿A qué recta pertenecen los puntos $A(-1, -4)$, $B(1, 1)$ y $C(0, 5)$? Justifica.

A. $L: \langle x, y\rangle = \langle 1 + 2\lambda, -1 + 3\lambda\rangle$
B. $L: \langle x, y\rangle = \langle -1 + 2\lambda, 3 - 2\lambda\rangle$
C. $L: \langle x, y\rangle = \langle 2 - \lambda, -1 + 2\lambda\rangle$
D. $L: \langle x, y\rangle = \langle -2 - \lambda, -3 + 2\lambda\rangle$
E. Ninguna de las anteriores.

28. ¿Cuál es el valor de k que resuelve $6 \cdot \langle -2, k\rangle - 6 \cdot \langle k, -9\rangle = \langle -48, 90\rangle$?

A. 4
B. –6
C. 0
D. 6
E. –4

29. ¿Cuál es el valor de p para el cual $\langle 5, -7\rangle$ es paralelo a $\langle 13, p\rangle + 3\,\langle 4, -8\rangle$?

A. 13
B. 5
C. 8
D. $\frac{3}{2}$
E. –11

30. ¿Cuál es el valor de q para el cual $\langle 15, 12\rangle$ es perpendicular a $\langle 7, -3\rangle + \langle 1, q\rangle$?

A. –3
B. 4
C. –5
D. –7
E. 3

31. Si sobre un cuerpo actúan cuatro fuerzas, $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ y $\vec{s}$, determina cuál de las siguientes expresiones NO afirma que la suma de las fuerzas es nula sobre el objeto:

A. $\vec{p} - \vec{q} + \vec{r} - \vec{s} = -2\vec{q} - 2\vec{s}$
B. $3\vec{p} + 2\vec{r} - 3\vec{q} + \vec{s} = 2\vec{p} + \vec{r} - 4\vec{q}$
C. $\vec{p} + 2\vec{q} - \vec{s} = \vec{q} - \vec{r} - 2\vec{s}$
D. $3\vec{p} + 5\vec{q} + 2\,\vec{r} - 4\vec{s} = 3\vec{q} + \vec{p} - 6\vec{s}$
E. $2\vec{p} - \vec{q} + \vec{r} = \vec{p} + \vec{s} + 2\vec{q} - \vec{t}$

32. ¿Cuál es la ecuación cartesiana asociada a $\langle -2, 5\rangle + \lambda\,\langle -5, -2\rangle$?

A. $5x + 2y = 0$
B. $2x - 5y + 29 = 0$
C. $2x + 5y - 21 = 0$
D. $5x - 2y + 20 = 0$
E. $2x - 5y = 0$

33. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones vectoriales corresponde a la ecuación $3x - 5y + 59 = 0$?

A. $\langle 3, -5\rangle + \lambda\,\langle -5, 59\rangle$
B. $\langle 5, 3\rangle + \lambda\,\langle 59, 5\rangle$
C. $\langle 3, -5\rangle + \lambda\,\langle 5, 3\rangle$
D. $\langle -3, 10\rangle + \lambda\,\langle 3, -5\rangle$
E. $\langle -8, 7\rangle + \lambda\,\langle 5, 3\rangle$

34. ¿Cuál de los siguientes puntos pertenece a la recta $\langle 2, -4\rangle + \lambda\,\langle 9, 6\rangle$?

A. (9 ,6)
B. (–10, –12)
C. (–54, 40)
D. (10, 12)
E. (5, 3)

35. ¿Cuál de los siguientes puntos pertenece a la recta $\langle 1, 0, 5\rangle + \lambda\,\langle 0, -2, 3\rangle$?

A. (1, 8, 7)
B. (0, –2, 3)
C. $\left(2, -3, \frac{19}{2}\right)$
D. $\left(1, -\frac{4}{3}, 7\right)$
E. $\left(2, 5, -\frac{5}{2}\right)$

36. Si sobre un cuerpo se aplican las fuerzas $\vec{v} = \langle 2, 4, -1\rangle$ y $\vec{w} = \langle 0, 5, 2\rangle$, ¿cuál es la fuerza $\vec{f}$ que hay que ejercer sobre dicho cuerpo para que la fuerza total sobre él sea nula?

A. $\langle -2, -9, -1\rangle$
B. $\langle 0, 0, 0\rangle$
C. $\langle -2, 1, 3\rangle$
D. $\langle 2, 9, 1\rangle$
E. $\langle 4, 3, -4\rangle$

Evaluación de proceso

Aplica lo aprendido hasta este momento en la unidad y desarrolla las siguientes actividades.

1. **Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica las falsas.**
   a. Todo vector nulo tiene módulo distinto de cero.
   b. Si dos vectores tienen la misma dirección y el mismo módulo, entonces son opuestos.
   c. Si dos vectores tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido, entonces son iguales.
   d. El elemento neutro para la suma de vectores es $\langle 1, 1 \rangle$.
   e. El opuesto de un vector se obtiene al multiplicarlo por $k = -1$.

2. **¿Cuál es la distancia entre los siguientes puntos, en cada caso?**
   a. $(9, 1)$ y $(3, 5)$
   b. $(-23, 7)$ y $(-7, 0)$
   c. $(34, -18)$ y $(0, 3)$
   d. $(54, 77)$ y $(63, 81)$

3. **Calcula el perímetro de cada triángulo, dados sus vértices.**
   a. $A(0, 1)$, $B(3, 2)$, $C(-5, 4)$
   b. $D(-5, 8)$, $E(2, 7)$, $F(8, -3)$
   c. $G(12, 7)$, $H(1, -13)$, $I(-3, 2)$
   d. $J(8, 1)$, $K(0, -4)$, $L(2, 12)$
   e. $M(1, 4)$, $N(0, 4)$, $O(0, 16)$

4. **Determina en cada caso las coordenadas del punto P si el vector $\overrightarrow{QP}$ es $\langle 2, -5 \rangle$, cuando:**
   a. $Q = (2, 1)$
   b. $Q = (0, -3)$
   c. $Q = (7, 0)$
   d. $Q = (-4, 2)$
   e. $Q = (12, 29)$
   f. $Q = (-5, 3)$

5. **Para los vectores $\vec{a} = \langle 3, 7 \rangle$, $\vec{b} = \langle -5, 1 \rangle$ y $\vec{c} = \langle 12, 25 \rangle$, calcula:**
   a. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
   b. $3\vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{c}$
   c. $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} - 2\vec{b} + 3\vec{a}$
   d. $\vec{c} - \vec{a} + \vec{a} - \vec{b}$
   e. $3(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$
   f. $\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$

6. **¿Cuál es la ecuación vectorial de la recta que pasa por cada par de puntos?**
   a. $P(7, 3)$ y $Q(1, 4)$
   b. $P(8, 5)$ y $Q(7, 9)$
   c. $P(3, -1)$ y $Q(-2, 7)$
   d. $P(0, 5)$ y $Q(-4, -3)$
   e. $P(-3, -8)$ y $Q(0, 4)$
   f. $P(5, 2)$ y $Q(-3, 9)$

7. **Para cada ecuación vectorial, ¿cuál es la ecuación cartesiana asociada?**
   a. $\langle x, y \rangle = \langle 3, 4 \rangle + \lambda \langle 3, -5 \rangle$
   b. $\langle x, y \rangle = \langle 0, 2 \rangle + \lambda \langle 4, 1 \rangle$
   c. $\langle x, y \rangle = \langle -2, 5 \rangle + \lambda \langle 8, 2 \rangle$
   d. $\langle x, y \rangle = \langle 7, 0 \rangle + \lambda \langle 0, -4 \rangle$
   e. $\langle x, y \rangle = \langle 6, 4 \rangle + \lambda \langle 3, -3 \rangle$
   f. $\langle x, y \rangle = \langle 0, 1 \rangle + \lambda \langle 9, -2 \rangle$

8. **Para cada ecuación cartesiana, determina una ecuación vectorial asociada a ella.**
   a. $x - y = 4$
   b. $x + 3y = 5$
   c. $4x - 2y = 7$
   d. $3x - 7y = 4$
   e. $8x - 3y = -6$
   f. $x + y = 0$

Marca la opción correcta en los ítems 9 a 17.

9. **¿Cuál es el módulo del vector $\overrightarrow{QP}$, si $P(15, 22)$ y $Q(-18, 19)$?**

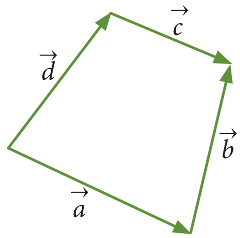
A. $3\sqrt{122}$
B. $3\sqrt{366}$
C. $\sqrt{366}$
D. $\sqrt{38}$
E. $\sqrt{50}$

10. **Si $\vec{v} = \langle 3, 4 \rangle$, ¿cuál es el vector tal que su módulo es igual al triple del módulo de $\vec{v}$?**

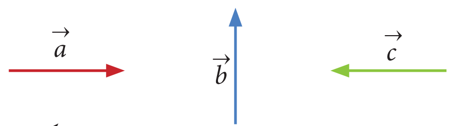
A. $\langle \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{4} \rangle$
B. $\langle -12, 9 \rangle$
C. $\langle 15, 15 \rangle$
D. $\langle 23, -3 \rangle$
E. $\langle 12, -12 \rangle$

11. **Los vectores de la figura forman un cuadrilátero. ¿Cuál de las siguientes relaciones entre ellos es correcta?**

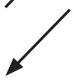
A. $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$
B. $\vec{a} - \vec{c} = \vec{a} - \vec{d}$
C. $\vec{a} + \vec{d} = \vec{c} - \vec{b}$
D. $\vec{a} + \vec{c} = \vec{d} - \vec{b}$
E. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$

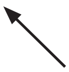


12. **Los vectores de la figura tienen la misma magnitud. Si $\vec{r} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, entonces el vector que mejor representa la dirección de $\vec{r}$ es:**



A. 

B. 

C. 

D. 

E. 

13. **La ponderación entre $\lambda = 5$ y $\vec{a} = \langle 1, 5 \rangle$ es:**

A. 5
B. 25
C. $\langle 1, 5 \rangle$
D. $\langle 5, 25 \rangle$
E. Ninguna de las anteriores.

14. **Si P es un punto de la recta MN y Q es un punto que no pertenece a ella, ¿cuál de las siguientes alternativas es falsa?**

A. Existe una recta paralela a MN que pasa por Q.
B. Existe una recta que pasa por P y Q.
C. P, Q y M son colineales.
D. P, M y N son colineales.
E. Existe una recta perpendicular a MN que pasa por P.

15. **¿Cuál es la ecuación cartesiana asociada a $\langle x, y \rangle = \langle -2, 4 \rangle + \lambda \langle 1, 7 \rangle$?**

A. $x + 7y = 0$
B. $-2x + 4y + 17 = 0$
C. $-7x + y - 18 = 0$
D. $7x - 2y + 18 = 0$
E. $-2x + 4y = 0$

16. **¿Cuál de las siguientes ecuaciones vectoriales corresponde a la ecuación $4x + 7y - 46 = 0$?**

A. $\langle x, y \rangle = \langle 2, -6 \rangle + \lambda \langle -4, -46 \rangle$
B. $\langle x, y \rangle = \langle 4, 2 \rangle + \lambda \langle 46, 4 \rangle$
C. $\langle x, y \rangle = \langle 2, -6 \rangle + \lambda \langle 4, 7 \rangle$
D. $\langle x, y \rangle = \langle -6, 10 \rangle + \lambda \langle 7, -4 \rangle$
E. $\langle x, y \rangle = \langle -8, 7 \rangle + \lambda \langle 4, -7 \rangle$

17. **¿Cuál de los siguientes puntos pertenece a la recta $\langle x, y \rangle = \langle 0, -3 \rangle + \lambda \langle 1, 5 \rangle$?**

A. (1, 5)
B. (–10, –15)
C. (24, 62)
D. (5, 22)
E. (3, 18)

Mi progreso

Verifica en el solucionario del Texto si tus respuestas son correctas. Si tienes respuestas incorrectas, marca en la tabla el criterio correspondiente y realiza las actividades de refuerzo indicadas.

Criterio	Ítems	¿Qué debo hacer?
Comprender que puntos, rectas y planos pueden ser representados en el sistema coordenado tridimensional y determinar la representación cartesiana y vectorial de la recta en el espacio.	1, 4, 6, 7, 8, 12, 15, 16 y 17	Si tuviste menos de 18 ítems correctos, realiza las actividades 1, 4, 5 y 6.
Deducir la distancia entre dos puntos ubicados en un sistema de coordenadas en tres dimensiones y aplicarla al cálculo del módulo de un vector.	2, 3 y 9	Si tuviste menos de 7 ítems correctos, realiza las actividades 2, 3, 8 y 11.
Identificar y describir puntos, rectas y planos en el espacio; deducir la ecuación vectorial de la recta y su relación con la ecuación cartesiana.	5, 11, 13 y 14	Si tuviste menos de 5 ítems correctos, realiza las actividades 7, 9, 10, 12, 13, 14 y 15.

Para reforzar

Según los resultados obtenidos en la evaluación de proceso, resuelve las actividades correspondientes para reforzar los contenidos en los que tuviste dificultades.

1. Determina el valor de k para el cual la igualdad es cierta, en cada caso.

a. $(3, k) = (3, 2)$

b. $(k, 1) = (2, 1)$

c. $(k, 2k) = (4, 8)$

d. $(k, 1 - k) = (3, -2)$

2. Calcula la distancia entre los puntos dados.

a. $P(2, 3, 4)$ y $Q(5, 3, 4)$

b. $P(1, 0, 2)$ y $Q(1, 5, 3)$

c. $P(2, 0, 4)$ y $Q(0, -3, -2)$

d. $P(1, 2, 1)$ y $Q(3, -4, 0)$

e. $P(-3, 4, 2)$ y $Q(1, -2, 5)$

f. $P(-5, -8, 0)$ y $Q(7, 4, 3)$

3. Calcula el módulo de cada vector.

a. $\langle -3, 0, 4\rangle$

b. $\langle 1, 3, 2\rangle$

c. $\langle 2, 5, 1\rangle$

d. $\langle -4, 3, -1\rangle$

e. $\langle 5, 12, 0\rangle$

f. $\langle 7, 7, 7\rangle$

4. Para los vectores $\vec{a} = \langle 4, 5\rangle$, $\vec{b} = \langle -3, 0\rangle$ y $\vec{c} = \langle 9, -7\rangle$, calcula:

a. $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

b. $\vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{c}$

c. $\vec{a} - 5\vec{b} - \vec{c} + 2\vec{b} - 2\vec{a}$

d. $\vec{c} - \vec{a} + \vec{a} - \vec{b}$

e. $4(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$

f. $\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$

5. Calcula el vector resultante, en cada caso.

a. $\langle 2, 0, 3\rangle + 3 \cdot \langle 1, 1, 0\rangle$

b. $\langle 1, -2, 3\rangle - 2 \cdot \langle 4, 3, 1\rangle$

c. $\langle 0, 10, 0\rangle - 10 \cdot \langle 1, -2, -1\rangle$

d. $\langle -3, 4, 5\rangle + 4 \cdot \langle 7, 0, 3\rangle$

e. $\langle 2, 7, 5\rangle + 3 \cdot \langle 0, 5, 1\rangle$

f. $\langle 6, -8, -4\rangle + 5 \cdot \langle 9, 1, 3\rangle$

6. **Determina el vector $\vec{v}$ que cumple la condición dada, en cada caso.**
   a. $2\vec{v} = \langle 4, 6, 2 \rangle$
   b. $\vec{v} - \langle 2, 1, 0 \rangle = \langle 3, 5, 4 \rangle$
   c. $2\vec{v} + \langle 5, -8, 3 \rangle = \langle 1, 0, 7 \rangle$
   d. $3\vec{v} + 7\vec{v} - 2 \cdot \langle 1, -3, 5 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle$

7. **Determina, en cada caso, si los tres puntos dados son colineales o no.**
   a. (2, 1), (1, 1), y (0, 1)
   b. (3, 2), (–5, 1), y (–5, 2)
   c. (6, –1), (7, 4), y (13, 3)
   d. (–15, –20), (3, 4), y (9, 12)
   e. $\left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(-1, \frac{2}{3}\right)$, y $\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{2}\right)$
   f. $\left(\frac{1}{2}, -2\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{16}{5}\right)$, y $\left(2, \frac{3}{5}\right)$

8. **¿Cuál es la distancia, en cada caso, entre los pares de puntos?**
   a. (1, 0, 2) y (0, 0, 1)
   b. (0, –2, 1) y (3, 0, 0)
   c. (1, 1, 1) y (2, 1, 0)
   d. (4, 0, –1) y (2, 0, –1)
   e. (0, 0, 2) y (3, 0, 0)
   f. (0, 0, 1) y (0, –1, 1)

9. **Determina si los tres puntos dados son colineales o si no lo son.**
   a. (2, 0, –1), (4, 1, –4), y (0, –1, 2)
   b. (3, –2, 1), (1, 1, 1), y (–1, 4, 2)
   c. (3, –12, 4), (3, 4, 6), y (3, –4, 5)
   d. (12, 10, –15), (4, 2, 1), y (0, 4, –3)
   e. $\left(\frac{1}{2}, -1, 3\right), \left(-2, \frac{31}{4}, -22\right)$, y $\left(0, \frac{3}{4}, -2\right)$
   f. $(7, -7, 7), \left(-\frac{13}{2}, \frac{13}{5}, -\frac{13}{2}\right)$, y $\left(\frac{5}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{2}\right)$

10. **¿Cuál es la ecuación vectorial de la recta que pasa por cada par de puntos?**
   a. $P(3, 2)$ y $Q(2, 5)$
   b. $P(5, -6)$ y $Q(0, 4)$
   c. $P(7, 0)$ y $Q\left(-2, \frac{1}{3}\right)$
   d. $P(2, 5)$ y $Q\left(\frac{2}{5}, -\frac{3}{2}\right)$
   e. $P\left(\frac{9}{5}, -5\right)$ y $Q\left(\frac{4}{3}, -2\right)$
   f. $P\left(\frac{7}{2}, 4\right)$ y $Q\left(2, -\frac{4}{3}\right)$

11. **¿Cuál es el módulo del vector $\overrightarrow{QP}$, si $P(8, 4)$ y $Q(4, 12)$?**
   A. $4\sqrt{5}$
   B. $16\sqrt{5}$
   C. $\sqrt{65}$
   D. $\sqrt{48}$
   E. $\sqrt{70}$

12. **¿Cuál de los siguientes puntos pertenece a la recta $\langle 1, -5 \rangle + \lambda \langle 3, 7 \rangle$?**
   A. (10, 6)
   B. (–10, –26)
   C. (–5, –19)
   D. (7, 19)
   E. (0, 7)

13. **¿Cuál es la ecuación cartesiana asociada a $\langle x, y \rangle = \langle -3, 3 \rangle + \lambda \langle 2, 5 \rangle$?**
   A. $2x + 5y = 0$
   B. $-x + 8y + 3 = 0$
   C. $-5x + 2y - 21 = 0$
   D. $2x - 5y + 9 = 0$
   E. $-3x + 3y = 0$

14. **¿Cuál de los siguientes puntos pertenece a la recta $\langle 2, 0, -4 \rangle + \lambda \langle 1, -5, 2 \rangle$?**
   A. (1, 0, 3)
   B. (0, –2, 4)
   C. (4, –10, 0)
   D. (1, 5, –2)
   E. (3, –5, –6)

15. **¿Cuál de las siguientes ecuaciones vectoriales corresponde a la ecuación $-3x + y - 4 = 0$?**
   A. $\langle x, y \rangle = \langle 2, -6 \rangle + \lambda \langle -3, 1 \rangle$
   B. $\langle x, y \rangle = \langle -4, 0 \rangle + \lambda \langle 1, -3 \rangle$
   C. $\langle x, y \rangle = \langle 2, 6 \rangle + \lambda \langle 3, 1 \rangle$
   D. $\langle x, y \rangle = \langle 0, 4 \rangle + \lambda \langle 1, 3 \rangle$
   E. $\langle x, y \rangle = \langle -7, 5 \rangle + \lambda \langle 4, 2 \rangle$

Rectas y planos en el espacio

Aprenderé a: identificar y describir rectas y planos en el espacio. Describir la posición relativa entre dos o más rectas, entre una recta y un plano, o entre dos planos.

Imagina una recta y un plano en el espacio. ¿Es posible que la recta esté contenida en el plano?, ¿qué otros casos son posibles?

- ¿Cuántos puntos se necesitan para determinar un plano que pase por ellos? Explica.

Repaso

1. ¿Cuántos puntos se necesitan para definir una única recta que pase por ellos?
2. ¿Cuándo se dice que tres o más puntos son colineales?

Tal como el punto y la recta, que se consideran entes geométricos fundamentales (esto es, que son conceptos primitivos, porque se definen uno en términos de los otros), podemos decir que un **plano** posee solo dos dimensiones, es ilimitado y contiene infinitos puntos y rectas.

En el caso de la recta, sabemos que dos puntos distintos definen una única recta que pasa por esos puntos, que por un solo punto pasan infinitas rectas y que cuando contamos con tres puntos distintos pueden suceder dos cosas: o son colineales, o bien podemos definir tres rectas distintas, que contengan solo dos de los puntos.

Atención

Los planos se simbolizan utilizando la letra Π.

De manera similar, podemos determinar el plano que contiene algunos puntos y/o rectas, cuando se cumplen ciertas condiciones:

- **Tres puntos no colineales**

  Existe un único plano que pasa por tres puntos no colineales dados. Cuando son solo dos puntos, pueden pasar infinitos planos por ellos. Si fueran cuatro puntos, aunque es posible que sean coplanarios, es más probable es que ningún plano los contenga a los cuatro.

- **Una recta y un punto exterior a ella**

  Existe un único plano que contiene una recta y un punto exterior a ella dados. el punto debe ser exterior, porque si estuviera contenido en la recta, pasan infinitos planos por la recta.

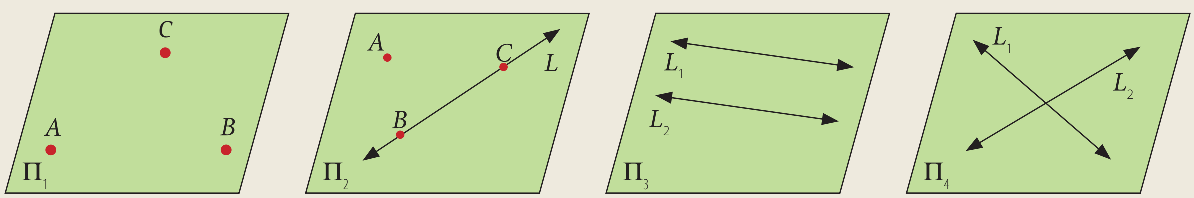
- **Dos rectas paralelas**

  Existe un único plano que contiene dos rectas paralelas dadas, siempre que sean distintas.

- **Dos rectas que se intersecan**

  Existe un único plano que contiene dos rectas secantes dadas.

Si dos rectas en el espacio no son paralelas ni secantes, se dice que son abaleadas, y no puede definirse un plano que las contenga.



Tomo nota

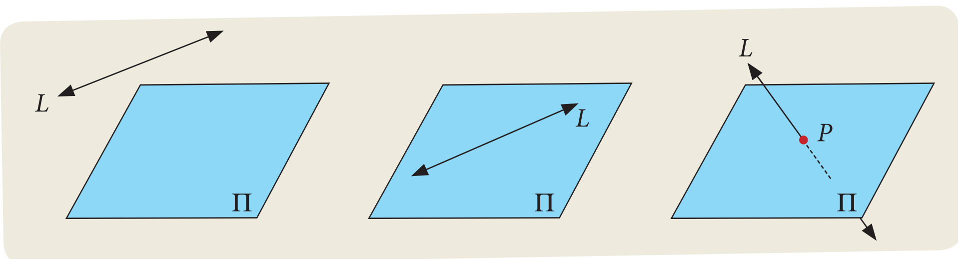
- Un plano posee solo dos dimensiones, es ilimitado y contiene infinitos puntos y rectas. Se le considera un concepto primitivo, que no puede definirse.
- Decimos que tres o más puntos, o bien, dos o más rectas, son **coplanarios** cuando pertenecen al mismo plano.
- Se puede determinar un único plano a partir, en cada caso, de:
  - tres puntos no colineales.
  - una recta y un punto exterior a ella.
  - dos rectas paralelas y distintas.
  - dos rectas secantes.
- Decimos que dos rectas son **alabeadas** cuando no son paralelas ni secantes. Es decir, no existe un plano al que pertenezcan ambas rectas.

Actividades

1. **Indica ejemplos de modelos físicos cotidianos en que se observen, en cada caso:**
   a. rectas secantes.
   b. puntos colineales.
   c. rectas paralelas y distintas.
   d. puntos coplanarios.
   e. puntos no colineales.
   f. rectas paralelas e iguales.
   g. puntos no coplanarios.
   h. rectas perpendiculares.

En años anteriores vimos que dos rectas paralelas y distintas no se intersecan y dos rectas secantes se intersecan en un solo punto. Como un plano contiene infinitas rectas, estas relaciones se pueden extender al analizar una recta y un plano.

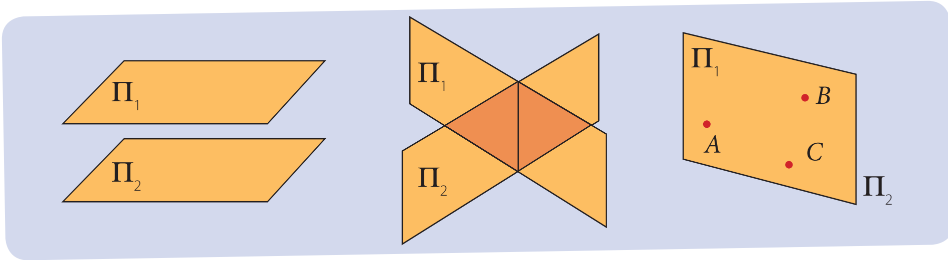
Observa las siguientes figuras, donde se representan las posibles posiciones relativas entre una recta y un plano en el espacio.



Si ningún punto de una recta dada pertenece a un plano dado, decimos que la recta y el plano son paralelos. En cambio, si todos los puntos de la recta pertenecen a un plano, decimos que la recta está contenida en el plano. Por último, cuando la recta no está contenida ni es paralela al plano, lo interseca en un solo punto. En este caso, decimos que son secantes.

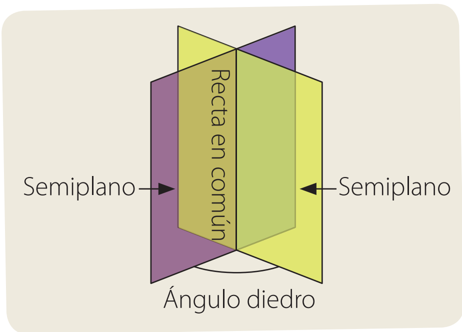
En las figuras anteriores se representaron las posibles posiciones relativas entre una recta y un plano en el espacio. Pero esto no solo se puede ver gráficamente. También se puede determinar analíticamente; es decir, a partir de sus respectivas ecuaciones, como veremos en las siguientes lecciones.

Observa ahora las siguientes figuras, donde se representan las posibles posiciones relativas entre dos planos en el espacio.



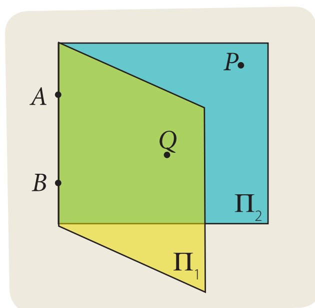
Las figuras presentadas nos muestran las posibles posiciones entre dos planos en el espacio, que se pueden describir como:

- planos paralelos: cuando no tienen puntos de intersección.
- planos secantes: cuando su intersección determina una recta y, por ende, posee infinitos puntos de intersección: todos los puntos que pertenecen a esa recta.
- planos coincidentes: cuando tienen todos sus puntos en común.



Observa que la intersección de dos planos da origen a distintos semiplanos que se intersecan. La porción de espacio comprendida entre dos semiplanos que tienen una recta común (y están situados en planos distintos) se denomina ángulo diedro.

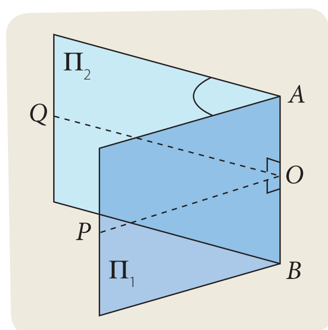
En la figura, observamos que P se ubica en un semiplano y Q en el otro. Mientras, los puntos A y B se ubican en la recta común a los dos semiplanos.



Los ángulos diedros se simbolizan como $\sphericalangle(P, AB, Q)$, donde P y Q representan puntos de cada semiplano, respectivamente, y AB representa la recta común a ambos semiplanos. Cuando se conoce el nombre de cada semiplano, un ángulo diedro también se puede representar por: $\sphericalangle(\Pi_1, AB, \Pi_2)$.

Ahora, ¿cómo podemos medir un ángulo diedro? Observa que si trazamos una recta en cada semiplano, de manera tal que ambas sean perpendiculares a la intersección de los semiplanos, AB, en un mismo punto de ella, se cumple que el ángulo diedro es igual al ángulo formado por estas rectas.

En la figura, la medida del ángulo diedro $\sphericalangle(\Pi_1, AB, \Pi_2)$ es igual a la medida de $\sphericalangle POQ$. Pero esto no significa que podamos medir este ángulo utilizando un transportador, ya que en la representación, en una hoja de papel, de planos y rectas en el espacio no se conservan las medidas de los ángulos involucrados.



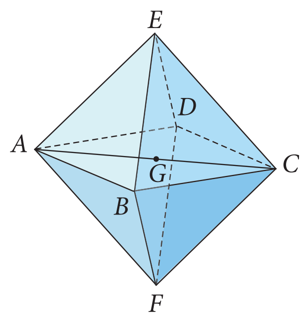
Tomo nota

- Las posibles posiciones relativas entre una recta y un plano son:
  - la recta está **contenida** en el plano, si todos los puntos de la recta pertenecen al plano.
  - **paralelos** (y distintos), si ningún punto de esta recta pertenece al plano.
  - **secantes**, si la recta interseca al plano en un solo punto.
- Las posibles posiciones relativas entre dos planos en el espacio son:
  - **coincidentes**, si tienen todos los puntos en común.
  - **paralelos** (y distintos), si no tienen ningún punto en común.
  - **secantes**, si los planos se intersecan en una sola recta.
- El **ángulo diedro** entre dos planos es la porción de espacio comprendida entre dos semiplanos que tienen una recta común y están situados en planos distintos.

Actividades

1. **Indica ejemplos de modelos físicos cotidianos en que se observen, en cada caso:**
   a. planos secantes.
   b. recta secante a un plano.
   c. planos paralelos.
   d. planos coincidentes.
   e. recta paralela a un plano.
   f. recta contenida en un plano.

2. **De acuerdo con la figura, $ABCDEF$ es un octaedro regular, en el cual además los puntos A, B, C, D y G son coplanarios. En cada caso indica si la afirmación es verdadera o falsa, según corresponda. Justifica las falsas.**



   a. Los puntos A, E y F son colineales.
   b. El segmento AC se interseca con BD.
   c. Los puntos B, C, E y F son coplanarios.
   d. El segmento AC se interseca con DF.
   e. Los puntos A, C y F son coplanarios.
   f. El segmento AB es paralelo a DC.
   g. Los puntos B, D, F y G son coplanarios.
   h. Los segmentos BC y DE son alabeados.
   i. Los segmentos AD y BC pertenecen a un mismo plano.
   j. Por los puntos A, G y C pasa un único plano.

3. **Representa gráficamente las siguientes situaciones:**
   a. El plano Π_1 tiene origen a partir de la recta L_1 y un punto Z exterior a ella.
   b. El plano Π_1 es secante con Π_2, dando origen a la recta L_1, que es perpendicular a la recta L_2, que pertenece a Π_2.

Antes de continuar

1. ¿En qué casos dos rectas en el espacio no determinan un plano? Explica.
2. ¿Qué debe cumplirse para que cuatro puntos en el espacio sean coplanarios?

Ecuación vectorial del plano en el espacio

Aprenderé a: comprender que puntos, rectas y planos pueden ser representados en el sistema coordenado tridimensional. Identificar y describir planos en el espacio.

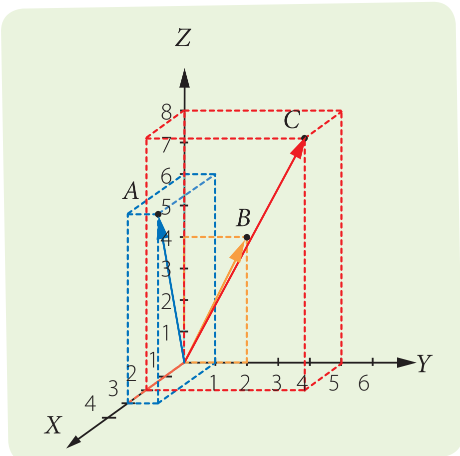
Repaso

1. **En la ecuación vectorial de la recta,**
   a. ¿qué indica el vector posición?
   b. ¿y el vector director?
2. **¿Cuántos puntos, como mínimo, se requieren para determinar un plano en el espacio?**

Sujeta un cuaderno apoyándolo en tus dedos pulgar, índice y medio. ¿Puedes mantenerlo horizontal?, ¿puedes ponerlo en otra dirección, moviendo un poco tus dedos?

Si pudiéramos representar la posición de los puntos en que el cuaderno se apoya en tus dedos, ¿cómo podríamos representar el plano en el espacio en el que tu cuaderno está contenido?, ¿basta con un vector posición y un vector director?, ¿por qué?

Considera los vectores $\overrightarrow{OA} = \langle 3, 1, 6\rangle$, $\overrightarrow{OB} = \langle 0, 2, 4\rangle$ y $\overrightarrow{OC} = \langle 2, 5, 8\rangle$, representados en la figura de la izquierda.



- ¿Los puntos A, B y C son colineales?, ¿son coplanarios? Justifica.

Si calculamos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ podemos decidir si son colineales o no. Si estos dos vectores fueran iguales, o bien uno ponderado del otro, serían colineales porque son paralelos y además comparten el punto A, luego, necesariamente serían colineales. En cambio, si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ fueran distintos, entonces A, B y C no serían colineales. Y en este caso, serían coplanarios, porque dados tres puntos no colineales siempre existe un único plano que los contiene.

$\overrightarrow{AB} = \langle 0, 2, 4\rangle - \langle 3, 1, 6\rangle = \langle -3, 1, -2\rangle$

$\overrightarrow{AC} = \langle 2, 5, 8\rangle - \langle 3, 1, 6\rangle = \langle -1, 4, 2\rangle$

Es decir, los puntos A, B y C no son colineales.

Observa cómo podemos representar el punto D a partir de los vectores $\overrightarrow{OB}$ $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

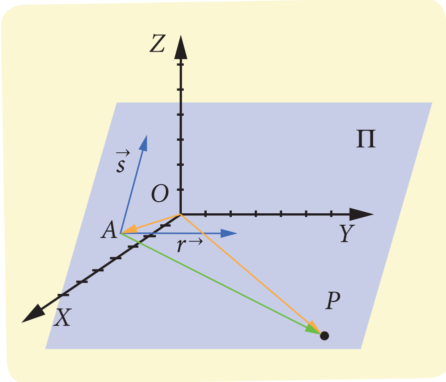
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{AC} = \langle 0, 2, 4\rangle + \langle -3, 1, -2\rangle + 2 \cdot \langle -1, 4, 2\rangle = \langle -5, 11, 6\rangle$

Según esto, podemos asegurar que el punto D pertenece al plano que contiene a los puntos A, B y C. Y esto nos permite conjeturar que la ecuación vectorial del plano que contiene a estos puntos es:

$\langle x, y, z\rangle = \langle 0, 2, 4\rangle + \lambda \langle -3, 1, -2\rangle + \mu \langle -1, 4, 2\rangle$

Recuerda que para determinar la ecuación de la recta en general, se puede calcular a partir de dos puntos dados, o bien de un punto y su dirección, ya sea que se indique vectorialmente o mediante la pendiente de la recta. De manera similar, para determinar la ecuación de un plano, se puede calcular a partir de tres puntos no colineales o de puntos y rectas que estén contenidas en él.

En general, un plano Π en el espacio puede quedar determinado por un vector posición $A\,\langle a_1, a_2, a_3\rangle$ y dos vectores directores no paralelos entre sí, $\vec{r} = \langle r_1, r_2, r_3\rangle$ y $\vec{s} = \langle s_1, s_2, s_3\rangle$.



A partir de la figura, observa que para un punto $P(x, y, z)$ cualquiera del plano Π, se cumple lo siguiente: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$.

Por lo que $\overrightarrow{AP}$ es un vector paralelo al plano Π, es decir, $\vec{r}$, $\vec{s}$ y $\lambda\vec{r} + \mu\vec{s}$ (con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$), son paralelos al mismo plano, luego

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{r} + \mu\vec{s}$.

Entonces, la ecuación vectorial del plano Π se escribe:

$\langle x, y, z\rangle = \langle a_1, a_2, a_3\rangle + \lambda\langle r_1, r_2, r_3\rangle + \mu\,\langle s_1, s_2, s_3\rangle$.

¿Cómo hacerlo?

Dado un plano Π que pasa por los puntos P (1, 1, 1), Q (2, 1, 2) y R (0, 2, –1), ¿cuál es la ecuación vectorial del plano?

Para obtener la ecuación vectorial pedida, escogemos cualquiera de los tres puntos para el vector posición y calculamos los vectores directores, escogiendo dos pares de puntos.

$\overrightarrow{QP} = \vec{p} - \vec{q} = \langle 1 - 2, 1 - 1, 1 - 2\rangle = \langle -1, 0, -1\rangle$

$\overrightarrow{RP} = \vec{p} - \vec{r} = \langle 1 - 0, 1 - 2, 1 + 1\rangle = \langle 1, -1, 2\rangle$

Luego, la ecuación vectorial del plano es:

$\Pi : \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 1, 1\rangle + \lambda\langle -1, 0, -1\rangle + \mu\langle 1, -1, 2\rangle$

¿Cómo hacerlo?

Verifica si el punto $P(-2, 5, 3)$ pertenece al plano cuya ecuación es $\Pi\,\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 2, 1\rangle + \lambda\,\langle 1, 0, 1\rangle + \mu\,\langle -2, 3, 0\rangle$.

Si el punto P pertenece al plano Π, deben existir valores para λ y μ tales que se cumpla $\langle -2, 5, 3\rangle = \langle 1, 2, 1\rangle + \lambda\,\langle 1, 0, 1\rangle + \mu\,\langle -2, 3, 0\rangle$.

Para determinar los valores de λ y μ, igualamos las ecuaciones componente a componente.

$-2 = 1 + \lambda - 2\mu$

$5 = 2 + 3\mu$

$3 = 1 + \lambda$

De la segunda ecuación, obtenemos $\mu = \frac{5 - 2}{3} = 1$, mientras que de la tercera ecuación, $\lambda = 3 - 1 = 2$.

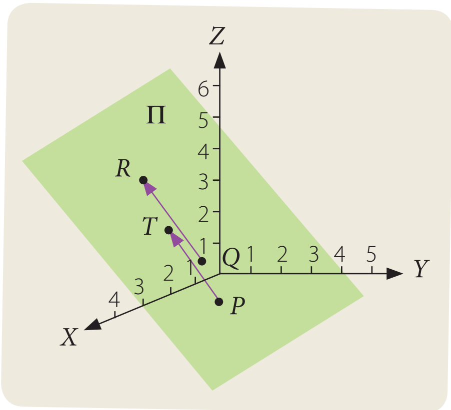
Si remplazamos estos valores para λ y μ, en la primera ecuación, tenemos que $1 + \lambda - 2\mu = 1 + 2 - 2 \cdot 1 = 1$, pero según la ecuación, debe ser igual que -2.

Como no existen valores de λ y μ que satisfagan la igualdad, necesariamente ocurre que el punto P no pertenece al plano Π.

¿Cómo hacerlo?

Dados tres puntos, P (0, 0, –1), Q (2, 1, 1) y R (4, 1, 4), no colineales, ¿cuál es la ecuación vectorial del plano Π que pasa por los puntos P, Q y R?

Determina un punto T, tal que el cuadrilátero $PQRT$ sea un paralelogramo. ¿El punto T pertenece al plano Π? Justifica.



Para obtener la ecuación vectorial pedida, escogemos cualquiera de los tres puntos para el vector posición y calculamos los vectores directores, escogiendo dos pares de puntos.

$\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p} = \langle 2 - 0, 1 - 0, 1 + 1\rangle = \langle 2, 1, 2\rangle$

$\overrightarrow{PR} = \vec{r} - \vec{p} = \langle 4 - 0, 1 - 0, 4 + 1\rangle = \langle 4, 1, 5\rangle$

Luego, la ecuación vectorial del plano que pasa por los puntos P, Q y R es:

$\langle x, y, z\rangle = \vec{p} + \lambda\overrightarrow{PQ} + \mu\,\overrightarrow{PR}$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$\langle x, y, z\rangle = \langle 0, 0, -1\rangle + \lambda\,\langle 2, 1, 2\rangle + \mu\,\langle 4, 1, 5\rangle$

Ahora, determinamos el punto T de la siguiente manera:

$\vec{t} = \vec{p} + \overrightarrow{QR} = \vec{p} + (\vec{r} - \vec{q}) = \vec{p} + \vec{r} - \vec{q}$

$\vec{t} = \langle 0 + 4 - 2, 0 + 1 - 1, -1 + 4 - 1\rangle = \langle 2, 0, 2\rangle$

Para comprobar que el punto $T(2, 0, 2)$ pertenece al plano, remplazamos el vector $\vec{t}$ en la ecuación vectorial y determinamos si existen valores de λ y μ que satisfagan esta ecuación. Observa.

$\langle 2, 0, 2\rangle = \langle 0, 0, -1\rangle + \lambda\,\langle 2, 1, 2\rangle + \mu\,\langle 4, 1, 5\rangle$

Esto equivale a resolver el siguiente sistema de ecuaciones, que se determina igualando componente a componente.

$$\begin{aligned} 2 &= 2\lambda + 4\mu \\ 0 &= \lambda + \mu \\ 2 &= -1 + 2\lambda + 5\mu \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 0 &= \lambda + \mu \\ 0 &= 1 - \mu \end{aligned} \qquad \lambda = -1, \mu = 1$$

Es decir,

$\langle 2, 0, 2\rangle = \langle 0, 0, -1\rangle - 1 \cdot \langle 2, 1, 2\rangle + 1 \cdot \langle 4, 1, 5\rangle$

Como este sistema tiene solución (los valores de λ y μ satisfacen las tres ecuaciones), el punto T pertenece al plano y, además, conforma un paralelogramo originado a partir de los puntos P, Q y R.

Tomo nota

- La ecuación vectorial del plano en el espacio está dada por:

  $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle x_0, y_0, z_0\rangle + \lambda\,\langle d_1, d_2, d_3\rangle + \mu\,\langle v_1, v_2, v_3\rangle$, con:

  - $\vec{d}$ y $\vec{v}$ vectores directores del plano, no paralelos entre sí,
  - $\vec{p}_0$ $\langle x_0, y_0, z_0\rangle$: vector posición,
  - λ, μ: parámetros.

Actividades

1. Verifica si cada punto P pertenece al plano Π:

a. $P(7, 4, 0)$, Π: $\langle x, y, z\rangle = \langle 2, 1, 3\rangle + \lambda\,\langle 2, -1, 0\rangle + \mu\,\langle 3, 4, 0\rangle$

b. $P(4, 3, -6)$, Π: $\langle x, y, z\rangle = \langle 6, 3, -5\rangle + \lambda\,\langle 0, 1, 3\rangle + \mu\,\langle 2, 0, 1\rangle$

c. $P(4, -1, 3)$, Π: $\langle x, y, z\rangle = \langle 3, 4, 1\rangle + \lambda\,\langle 1, 0, -1\rangle + \mu\,\langle 3, -1, 4\rangle$

2. Considera el plano Π que pasa por los puntos dados, ¿cuál es su ecuación vectorial?

a. $P(1, 2, 1)$, $Q(1, 4, 0)$, $R(2, 2, 2)$

b. $P(-1, 4, 3)$, $Q(0, 5, 5)$, $R(-1, 7, 4)$

c. $P(1, 0, 6)$, $Q(3, 3, 10)$, $R(0, 1, 8)$

d. $P(3, 7, 7)$, $Q(2, 5, 12)$ $R(2, 4, 8)$

e. $P(-4, 5, 0)$, $Q(1, 3, 1)$, $R(0, 0, 0)$

f. $P(3, 3, -7)$, $Q(5, 8, -2)$, $R(9, 18, 18)$

3. Determina, en cada caso, si el plano es paralelo a alguno de los ejes X, Y o Z.

a. Π: $\langle x, y, z\rangle = \langle 0, 0, 2\rangle + \lambda\,\langle 2, 4, 4\rangle + \mu\,\langle 2, 6, 7\rangle$.

b. Π: $\langle x, y, z\rangle = \langle 0, 3, -1\rangle + \lambda\,\langle 0, 1, -2\rangle + \mu\,\langle 1, 5, 4\rangle$.

c. Π: $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 4, 5\rangle + \lambda\,\langle 2, 0, 3\rangle + \mu\,\langle 0, 3, 1\rangle$.

d. Π: $\langle x, y, z\rangle = \langle 5, 4, 0\rangle + \lambda\,\langle 3, 1, 0\rangle + \mu\,\langle 2, -1, 0\rangle$.

4. Determina la ecuación vectorial del plano que contiene al punto P y los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

a. $P(2, 5, 0)$, $\vec{v} = \langle 1, -1, 0\rangle$ y $\vec{w} = \langle 0, 2, 3\rangle$

b. $P(1, 0, -3)$, $\vec{v} = \langle 2, 0, -1\rangle$ y $\vec{w} = \langle 1, 3, -2\rangle$

c. $P(2, -2, 1)$, $\vec{v} = \langle 1, 0, -1\rangle$ y $\vec{w} = \langle -2, 3, 2\rangle$

d. $P(8, 0, 5)$, $\vec{v} = \langle -3, 2, -5\rangle$ y $\vec{w} = \left\langle \frac{1}{2}, 2, 0\right\rangle$

e. $P\left(\frac{3}{4}, -6, 7\right)$, $\vec{v} = \langle 0, 1, 3\rangle$ y $\vec{w} = \langle 7, 2, -12\rangle$

f. $P(0, 0, 0)$, $\vec{v} = \langle 2, 7, -11\rangle$ y $\vec{w} = \langle 5, -7, 1\rangle$

Desafío

Analiza la suma $\lambda\vec{v} + \mu\,\langle 0, 0, 1\rangle$ para cualquier valor de los parámetros λ y μ, con $\vec{v}$ un vector en el espacio. ¿Qué se obtiene?

Proyecto

EN PAREJAS **Realicen la etapa 2 del proyecto de la unidad de las páginas 160 y 161.**

Antes de continuar

1. ¿Por qué la ecuación vectorial del plano tiene dos parámetros? Explica.
2. ¿Puede ocurrir que, dadas dos rectas en el espacio, no exista un único plano que las contenga?, ¿qué puedes decir de estas rectas?

Ecuación paramétrica y cartesiana del plano en el espacio

Aprenderé a: identificar y describir planos en el espacio. Determinar la representación cartesiana de un plano en el espacio.

Repaso

1. ¿Cómo se obtiene la ecuación cartesiana de una recta en el plano, si se conoce su ecuación vectorial? Explica.

Antes de comenzar la lección, observa el siguiente cuadro resumen.

	Recta en el plano	Recta en el espacio
Ecuación cartesiana	$y = mx + n,\ ax + by + c = 0$	
Ecuación vectorial	$\langle x, y\rangle = \langle x_0, y_0\rangle + \lambda\,\langle p_1, p_2\rangle$	$\langle x, y, z\rangle = \langle x_0, y_0, z_0\rangle + \lambda\langle p_1, p_2, p_3\rangle$
Ecuación paramétrica	$f(\lambda) = (x_0 + \lambda p_1, y_0 + \lambda p_2)$	$f(\lambda) = (x_0 + \lambda p_1, y_0 + \lambda p_2, z_0 + \lambda p_3)$
Intersecciones	Si dos rectas son paralelas no hay intersección. Si no son paralelas, se intersecan en un único punto.	Si dos rectas son paralelas, no se intersecan, pero existe un único plano que las contiene. Si no son paralelas, pueden ser secantes o abaleadas. Si son secantes, existe un único punto de intersección. Además, existe un plano que las contiene. Si son abaleadas, no hay un punto en común y tampoco hay un plano que las contiene a ambas.

	Planos en el espacio
Ecuación cartesiana	
Ecuación vectorial	$\langle x, y, z\rangle = \langle x_0, y_0, z_0\rangle + \lambda\langle p_1, p_2, p_3\rangle + \mu\,\langle q_1, q_2, q_3\rangle$.
Ecuación paramétrica	
Intersecciones	Dos planos en el espacio, o son paralelos, o bien se intersecan en una recta. Si además se observa la intersección con un tercer plano, puede ocurrir que: Cuando los dos primeros planos son paralelos, al intersecarlos con otro, los tres son paralelos, en cuyo caso la intersección es vacía o bien, la intersección son dos rectas paralelas. Cuando no son paralelos, la intersección es un punto que pertenece a los tres planos o bien, la recta resultante de los dos primeros es paralela al tercer plano y entonces la intersección de los tres planos es vacía.

¿Lo entiendes?

Observa que en las tablas anteriores hay tres ecuaciones que nos falta conocer, la ecuación cartesiana para la recta en el espacio y las ecuaciones cartesiana y paramétrica del plano en el espacio.

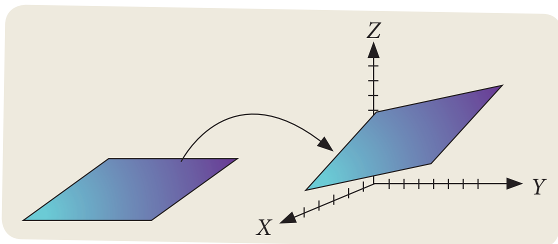
Considera, por ejemplo, la siguiente ecuación vectorial del plano en el espacio

$\langle x, y, z\rangle = \langle 2, 1, -2\rangle + \lambda\langle 1, 3, 1\rangle + \mu\langle 4, 0, 1\rangle$

Para cada par de valores λ y μ que remplacemos en la ecuación, obtendremos un punto en el espacio y (de forma similar a lo que sucede con la ecuación de la recta) el conjunto de todos esos puntos obtenidos corresponde a un plano en el espacio.

Dicho de otra manera, así como la ecuación paramétrica de la recta en el espacio correspondía a una función que asociaba un punto en la recta a cada valor del parámetro en la recta numérica, en este caso, la función asigna a cada punto del plano cartesiano, un punto en el espacio. Esto ocurre porque la ecuación tiene dos parámetros libres, λ y μ, a los cuales les podemos asignar cualquier valor y, remplazando en la ecuación, obtenemos las coordenadas del punto en el espacio correspondiente.

La ecuación $\langle x, y, z\rangle = \langle x_0 + \lambda \cdot p_1 + \mu \cdot q_1, y_0 + \lambda \cdot p_2 + \mu \cdot q_2, z_0 + \lambda \cdot p_3 + \mu \cdot q_3\rangle$ se llama ecuación paramétrica del plano en el espacio.



Tomo nota

- La función cuyo dominio es el plano cartesiano y recorrido el espacio dada por $f(\lambda, \mu) = (x_0 + \lambda\, p_1 + \mu\, q_1, y_0 + \lambda\, p_2 + \mu\, q_2, z_0 + \lambda\, p_3 + \mu\, q_3)$ tiene como imagen un plano en el espacio. La función $f(\lambda, \mu)$ se llama **función paramétrica del plano.**
- La ecuación $\langle x, y, z\rangle = \langle x_0 + \lambda\, p_1 + \mu\, q_1, y_0 + \lambda\, p_2 + \mu\, q_2, z_0 + \lambda\, p_3 + \mu\, q_3\rangle$ se llama ecuación paramétrica del plano en el espacio.
- El mismo plano dado por la imagen de f puede representarse por la ecuación vectorial $\langle x, y, z\rangle = \langle x_0, y_0, z_0\rangle + \lambda\langle p_1, p_2, p_3\rangle + \mu\langle q_1, q_2, q_3\rangle$.

Actividades

1. **Considera la ecuación: $\langle x, y, z\rangle = \langle 2, 1, -2\rangle + \lambda\langle 1, 3, 1\rangle + \mu\langle 4, 0, 1\rangle$. Para los siguientes valores de λ y μ determina los puntos en el espacio que corresponden en el plano.**
   a. $\lambda = 1, \mu = 2$.
   b. $\lambda = 2, \mu = 1$.
   c. $\lambda = 0, \mu = 0$.
   d. $\lambda = 0, \mu = 1$.
   e. $\lambda = 2\ \mu = 2$.
   f. $\lambda = -3, \mu = 4$.

2. **Considera el plano $\Pi\ \langle x, y, z\rangle = \langle 2, 1, -2\rangle + \lambda\langle 1, 3, 1\rangle + \mu\langle 4, 0, 1\rangle$.**
   a. Los puntos (10, 7, 2) y (–1, 4, –2), ¿pertenecen al plano? Justifica.
   b. ¿Y los puntos (1, 2, 3) y (2, 0, 1)? Explica.

Proyecto

EN PAREJAS **Realicen la etapa 3 del proyecto de la unidad de las páginas 160 y 161.**

A partir de la ecuación vectorial del plano $\Pi\ \langle x, y, z\rangle = \langle a_1, a_2, a_3\rangle + \lambda\langle r_1, r_2, r_3\rangle + \mu\langle s_1, s_2, s_3\rangle$, podemos igualar las coordenadas, componente a componente, para determinar las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + \lambda r_1 + \mu s_1 \\ y &= a_2 + \lambda r_2 + \mu s_2 \\ z &= a_3 + \lambda r_3 + \mu s_3 \end{aligned}$$

Luego, las podemos escribir como un sistema de ecuaciones, y resolverlo de modo de eliminar los parámetros λ y μ, y así obtener la **ecuación cartesiana de un plano**, cuya forma general es: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Conocemos tres formas de representar un plano de manera algebraica, la forma vectorial, la paramétrica y la cartesiana. Ya sabemos cómo transformar las ecuaciones paramétricas a vectoriales y viceversa. Ahora, vamos a establecer la relación entre las ecuaciones vectoriales y paramétricas y la ecuación cartesiana. Observa.

¿Cómo hacerlo?

Dado el plano de ecuación vectorial $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 2, 2\rangle + \lambda\langle 1, 1, 0\rangle + \mu\langle 1, 2, 5\rangle$, determina su ecuación cartesiana.

Al escribir la representación paramétrica del plano, los puntos que pertenecen al plano son de la forma $\langle x, y, z\rangle = \langle 1 + \lambda + \mu, 2 + \lambda + 2\mu, 2 + 5\mu\rangle$, es decir, al igualar sus coordenadas, los puntos (x, y, z) satisfacen las siguientes ecuaciones.

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 + \lambda + \mu \\ y &= 2 + \lambda + 2\mu \\ z &= 2 + 5\mu \end{aligned}\right|$$

Luego, resolvemos este sistema de ecuaciones, para eliminar los parámetros λ y μ y así determinar la relación entre x, y, y z. En este caso, es conveniente resolver por reducción las dos primeras ecuaciones para eliminar la variable λ,

$$\begin{aligned} y &= 2 + \lambda + 2\mu \\ x &= 1 + \lambda + \mu \\ \hline y - x &= 1 + \mu \end{aligned}$$

Restando a la segunda ecuación la primera.
$y - x = 2 - 1 + \lambda - \lambda + 2\mu - \mu$

Es decir, el sistema se reduce a:

$$\left.\begin{aligned} y - x &= 1 + \mu \\ z &= 2 + 5\mu \end{aligned}\right|$$

Multiplicando la primera ecuación por –5 para reducir y eliminar μ

$$\begin{aligned} 5x - 5y &= -5 - 5\mu \\ z &= 2 + 5\mu \\ \hline 5x - 5y + z &= -3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación cartesiana del plano es $5x - 5y + z = -3$.

Esto quiere decir que el conjunto de puntos (x, y, z) que satisfacen la ecuación $5x - 5y + z = -3$ son exactamente los puntos del plano. Recíprocamente, todos los puntos del plano satisfacen esa ecuación.

¿Cómo hacerlo?

Para el plano Π de ecuación $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 1, 1\rangle + \lambda\langle -1, 0, -1\rangle + \mu\langle 1, -1, 2\rangle$, ¿cuál es su ecuación cartesiana?

Igualando componente a componente, obtenemos las ecuaciones y resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{aligned} x &= 1-\lambda+\mu \\ y &= 1-\mu \\ z &= 1-\lambda+2\mu \end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 1-\lambda+\mu \\ z &= 1-\lambda+2\mu \end{aligned}\right| \qquad x-z=-\mu$$

Restamos la primera y tercera ecuación

$$\left.\begin{aligned} x-z &= -\mu \\ y &= 1-\mu \end{aligned}\right| \qquad x-y-z=-1$$

Ahora restamos la segunda ecuación con la resultante del sistema anterior

Por lo tanto, la correspondiente ecuación cartesiana es: $x-y-z=-1$.

Tomo nota

- La ecuación **vectorial** del plano en el espacio está dada por:
  $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle x_0, y_0, z_0\rangle + \lambda\langle d_1, d_2, d_3\rangle + \mu\langle v_1, v_2, v_3\rangle$,
  - con $\vec{d}$ y $\vec{v}$ vectores directores del plano, no paralelos entre sí;
  - $\overrightarrow{P_0}\ \langle x_0, y_0, z_0\rangle$: vector posición,
  - λ, μ: parámetros.
- La ecuación general o **cartesiana** de un plano en el espacio está dada por: $Ax+By+Cz+D=0$. Es decir, los puntos del espacio (x, y, z) que satisfacen la ecuación $Ax+By+Cz+D=0$ forman un plano y, recíprocamente, para cada plano Π en el espacio existen números reales A, B, C y D tales que Π se puede representar algebraicamente como el conjunto solución de la ecuación $Ax+By+Cz+D=0$.
- Para encontrar la ecuación cartesiana de un plano, cuando está escrita en ecuación paramétrica:
  - se igualan las coordenadas;
  - se escribe como un sistema de ecuaciones correspondiente;
  - se eliminan los parámetros para encontrar una única ecuación lineal en variables x, y, z.

Actividades

1. **Considera el plano Π en el espacio de ecuación $x-y+3z=1$.**
   a. Encuentra 3 puntos que pertenezcan al plano Π.
   b. Si el punto $(1, 2, t)$ pertenece a Π, ¿cuál es el valor de t?
   c. Determina si los puntos $(1, 2, 1)$, $(0, 0, 0)$ y $(0, 2, 1)$ pertenecen a Π.
2. **Dada la ecuación vectorial del plano, determina su ecuación cartesiana, en cada caso.**
   a. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle 3, 2, 1\rangle + \lambda\langle 2, 1, 1\rangle + \mu\langle -1, 2, 0\rangle$
   b. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle 5, -1, 2\rangle + \lambda\langle 0, -1, 4\rangle + \mu\langle -3, 1, 0\rangle$
   c. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle -3, 12, 0\rangle + \lambda\langle 4, 1, 3\rangle + \mu\langle 5, 3, 0\rangle$

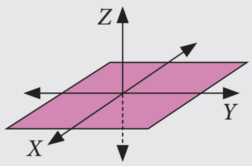
Desafío

Considera los puntos $P(1, 1, 3)$, $Q(1, 3, 2)$, $R(2, 1, 4)$.
a. ¿Son colineales?
b. Si no lo son, ¿cuál es la ecuación cartesiana del plano que pasa por ellos?

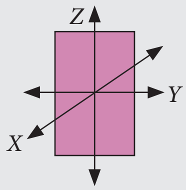
Atención

Planos destacados en el espacio tridimensional:

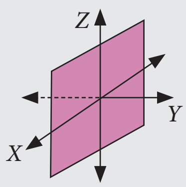
- Plano horizontal XY ecuación $z = 0$.



- Plano vertical YZ ecuación $x = 0$.



- Plano vertical XZ ecuación $y = 0$.



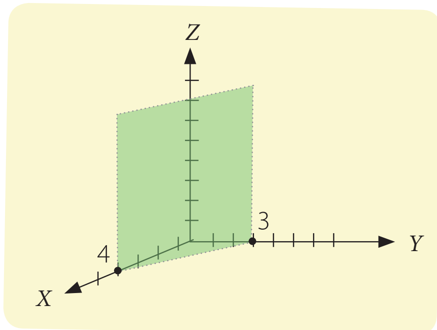
¿Cómo hacerlo?

Grafica el plano Π cuya ecuación cartesiana es $3x + 4y = 12$.

Primer paso: Tal como al graficar una recta en el plano cartesiano, una posibilidad es determinar los puntos de intersección con los ejes coordenados.

- Intersección con el eje X: remplazamos en la ecuación $y = 0$ y $z = 0$, entonces $3x = 12 \rightarrow x = 4$. Obtenemos el punto (4, 0, 0).
- Intersección con el eje Y: remplazamos en la ecuación $x = 0$ y $z = 0$, entonces $4y = 12 \rightarrow y = 3$. Obtenemos el punto (0, 3, 0).
- Intersección con el eje Z: remplazamos en la ecuación $x = 0$ e $y = 0$, entonces $0 = 12$. Pero esto es falso. Por lo tanto, significa que no existe un punto de intersección del plano Π con el eje Z.

Segundo paso: como no hay un punto común al eje Z, graficamos el plano Π paralelo a ese eje, y tal que pasa por los puntos (4, 0, 0) y (0, 3, 0), quedando visible la porción del plano que se encuentra en el primer octante.



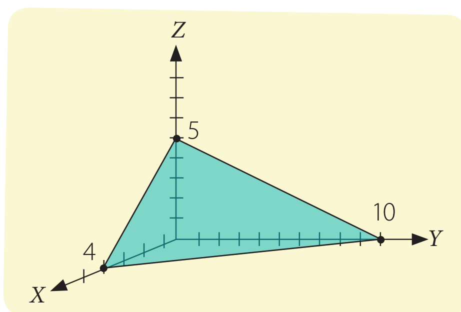
¿Cómo hacerlo?

Grafica el plano Π: $5x + 2y + 4z = 20$

Primer paso: determinamos los puntos de intersección del plano con los ejes coordenados.

- Intersección con el eje X: remplazamos en la ecuación $y = 0$ y $z = 0$, entonces $5x = 20 \rightarrow x = 4$. Obtenemos el punto (4, 0, 0).
- Intersección con el eje Y: remplazamos $x = 0$ y $z = 0$, entonces $2y = 20 \rightarrow y = 10$. Obtenemos (0, 10, 0).
- Intersección con el eje Z: remplazamos $x = 0$ e $y = 0$, entonces $4z = 20 \rightarrow z = 5$. Obtenemos (0, 0, 5).

Segundo paso: ubicamos estos puntos en los ejes coordenados y, luego, trazamos los segmentos que los unen para graficar la región comprendida entre el primer octante y el plano $5x + 2y + 4z = 20$.



¿Cómo hacerlo?

¿Cuál es la intersección de la recta L: $\langle x, y, z\rangle = \langle 4, 6, -2\rangle + \lambda\langle 2, 3, 0\rangle$ y el plano Π: $4x + 3y - z = 2$?

Sea $\langle x_0, y_0, z_0\rangle$ el punto que pertenece al plano y a la recta.

Entonces, se tiene:

$$4x_0 + 3y_0 - z_0 = 2$$

$\langle x_0, y_0, z_0\rangle = \langle 4 + 2\lambda_0, 6 + 3\lambda_0, -2\rangle$, para algún valor λ_0.

Para resolverlo se pueden remplazar las ecuaciones de cada coordenada en la ecuación del plano y, luego, obtener el valor de λ_0.

$$4(4 + 2\lambda_0) + 3(6 + 3\lambda_0) - (-2) = 2$$

$$16 + 8\lambda_0 + 18 + 9\lambda_0 + 2 = 2$$

$$\lambda_0 = -2$$

Por lo tanto, al remplazar $\lambda_0 = -2$ en la ecuación de la recta:

$x_0 = 4 + 2 \cdot -2 = 0$

$y_0 = 6 + 3 \cdot -2 = 0$

$z_0 = -2.$

El punto obtenido es (0, 0, –2). Este único punto satisface la ecuación del plano y la de la recta; por lo tanto, en este caso, la recta es secante al plano.

Tomo nota

- Para esbozar el gráfico de un plano en el espacio:
  - determinamos los puntos de intersección del plano con los tres ejes coordenados;
  - trazamos los tres ejes coordenados y marcamos las unidades necesarias en cada uno;
  - ubicamos los puntos de intersección en el gráfico;
  - trazamos los segmentos que unen los puntos y pintamos para esbozar el plano.

Actividades

1. **Caracteriza el plano formado por los puntos de la forma $\lambda\langle 2, 2, 0\rangle + \mu\langle 0, 0, 1\rangle$, con λ y $\mu \in \mathbb{R}$.**
2. **Grafica el plano que pasa por el punto (1, 6, 1) y es paralelo al plano XZ.**
3. **Dada su ecuación cartesiana, grafica cada plano.**
   a. Π: $x - y + z = 0$
   b. Π: $2x + 4y - z = 0$
   c. Π: $3x - y + 2 = 0$
   d. Π: $x - 3z - 1 = 0$
5. **¿Cuál es la intersección entre el plano Π y la recta L?**
   a. Π: $x + y - z = 0$, L: $\langle x, y, z\rangle = \lambda\langle 4, 5, -1\rangle$
   b. Π: $x - 4y + z = 0$, L: $\langle x, y, z\rangle = \lambda\langle 2, 1, 2\rangle$
   c. Π: $2x - 3y + 2z - 18 = 0$, L: $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 3, 2\rangle + \lambda\langle 1, -1, 1\rangle$
   d. Π: $3x + y - 4z = 0$, L: $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 1, 1\rangle + \lambda\langle 0, 4, 1\rangle$

Antes de continuar

1. Al observar la ecuación cartesiana de un plano en el espacio, ¿cómo puedes reconocer si el plano es paralelo a alguno de los ejes coordenados?

Ecuaciones cartesianas de la recta en el espacio

Aprenderé a: deducir la relación de la ecuación vectorial y paramétrica de la recta en el espacio con las ecuaciones cartesianas de la recta. Identificar y construir las ecuaciones cartesianas de la recta.

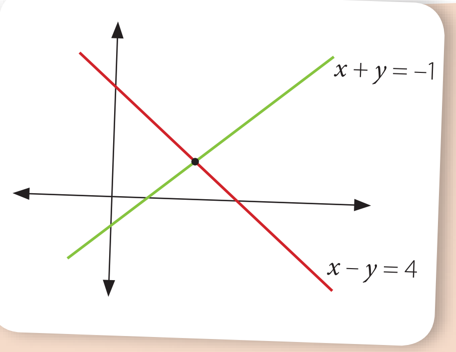
Repaso

1. **Dados dos planos en el espacio que se intersecan,**
   a. ¿a qué corresponde la intersección entre los dos planos?
   b. ¿hay más de una posibilidad?
   c. ¿De qué depende que se obtenga una u otra cosa? Explica.

Observa la intersección de dos rectas en el plano. ¿Cuál es el punto de intersección?

Si quisieras definir ese punto como la intersección de dos rectas, ¿puedes definir otras rectas diferentes de las dibujadas?

- ¿Cómo puedes relacionar esta situación con la intersección de planos en el espacio?



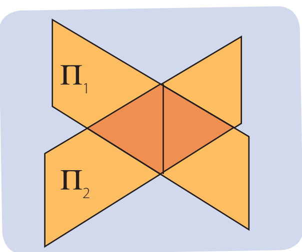
En la lección 5 vimos que dados dos planos en el espacio, estos pueden ser paralelos (cuando no se intersecan), coincidentes, en cuyo caso la intersección es el plano completo, o secantes, cuando se intersecan en una recta. Esta recta es única, es decir, no existen dos rectas distintas que correspondan a la intersección de dos planos dados. Utilizando esta idea, podemos definir las **ecuaciones cartesianas de una recta** en el espacio como el sistema de dos ecuaciones, de dos planos en el espacio (cuya intersección es la recta que necesitamos representar).

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

Luego, el objetivo en esta lección será: dados dos planos secantes, determinar la ecuación paramétrica (y vectorial) de la recta en que se intersecan, y viceversa, esto es, dada la ecuación paramétrica (o vectorial) de una recta, calcular los dos planos correspondientes, tales que su intersección sea esa recta.

¿Lo entiendes?

Aunque se trata de una recta en el espacio, su representación cartesiana son las dos ecuaciones, juntas.



- Dados dos planos secantes, ¿existe una única ecuación paramétrica para la recta de intersección?

  Si conoces la ecuación vectorial de una recta en el espacio, ¿existen solo dos planos cuya intersección es esa recta?, ¿por qué?

Tomo nota

- Si tienes los planos Π_1 y Π_2, de ecuaciones cartesianas, $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ y $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ respectivamente, que intersectan en una recta, estas dos ecuaciones se utilizan para definir la recta, ambas se llaman **ecuaciones cartesianas de la recta**.

Antes de continuar, nota que generalmente hablamos de dos planos "que se intersecan en una recta". Ahora, sabemos que dados dos planos en el espacio, no siempre es cierto que se intersequen. Si los planos Π_1 y Π_2 están dados por las ecuaciones $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ y $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ respectivamente, ¿cómo podemos decidir si estas dos ecuaciones corresponden al mismo plano?, ¿o si son paralelos?

Considera los planos Π_1, de ecuación $2x + y - z = 1$ y Π_2, de ecuación $4x + 2y - 2z = 2$. Si te fijas, los puntos que satisfacen la primera ecuación también satisfacen la segunda, ya que se trata de ecuaciones equivalentes. Dicho de otra manera, $2x + y - z = 1$ y $4x + 2y - 2z = 2$ son ecuaciones diferentes, pero que representan el mismo plano.

¿Cómo hacerlo?

Muestra que los siguientes planos no son paralelos:

$\Pi_1 : 2x + 3y - 2z + 1 = 0, \Pi_2 : 2x - 3y + z + 1 = 0$

Los planos Π_1 y Π_2 serían paralelos si sus ecuaciones cartesianas fueran equivalentes.

Es decir, debe existir k tal que $k \cdot (2x + 3y - 3z) = 2x - 3y + z$

Pero este valor no existe en este caso, ya que para igualar los términos con x, tendría que ser $k = 1$, para igualar los valores con y, necesitamos que $k = -1$ y para igualar los valores de z, debe cumplirse que $k = -\frac{1}{3}$.

Las ecuaciones no son equivalentes y, por lo tanto, los planos no son paralelos.

Tomo nota

- Las ecuaciones $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ y $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$
  - representan el mismo plano, si y solo si existe un número real k, $k \neq 0$ tal que $k \cdot (a_1x + b_1y + c_1z + d_1) = a_2x + b_2y + c_2z + d_2$.
  - representan planos paralelos si y solo si existe un número real k tal que $k \cdot \langle a_1, b_1, c_1\rangle = \langle a_2, b_2, c_2\rangle$ pero $k \cdot d_1 \neq d_2$.

Actividades

1. **Indica si los siguientes pares de ecuaciones definen o no al mismo plano.**
   a. $\Pi_1: x + y + z = 9, \Pi_2: x + y + z = 6$
   b. $\Pi_1: x - 2y + z = 0, \Pi_2: 3x - 6y + 3z = 0$
   c. $\Pi_1: x - y + z = 2, \Pi_2: -x + y - z = -2$

Desafío

Dada la ecuación del plano $\Pi_1: x - 2y + 3z - 7 = 0$, determina:

a. dos ecuaciones distintas que representen el mismo plano.
b. dos ecuaciones de planos que sean paralelos a Π_1.

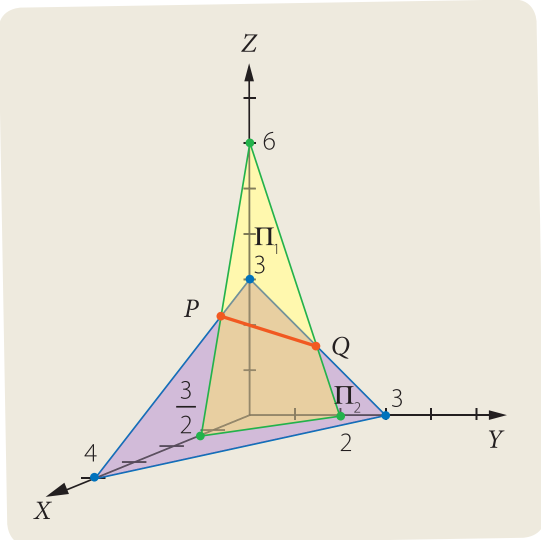
Proyecto

EN PAREJAS ▶ **Realicen la etapa 4 del proyecto de la unidad de las páginas 160 y 161.**

¿Cómo hacerlo?

Dados los planos Π_1: $4x + 3y + z = 6$ y Π_2: $3x + 4y + 4z = 12$, determina a qué corresponde la intersección entre los planos y escribe su ecuación vectorial.

Si observamos las ecuaciones, podemos determinar que no son ecuaciones equivalentes, porque no existe un único valor de k de modo que sea posible expresar una de las ecuaciones como producto de k con la otra ecuación. Por lo tanto, los planos Π_1 y Π_2 no son paralelos, ni corresponden al mismo plano. Luego, su intersección es una recta.



Podemos graficar los planos, remplazando por 0 las coordenadas correspondientes para determinar los puntos de intersección en cada eje. Observa.

Las intersecciones del plano Π_1 con los ejes coordenados están en $\left(\frac{3}{2}, 0, 0\right)$, (0, 2, 0) y (0, 0, 6), y las de plano Π_2 están en (4, 0, 0), (0, 3, 0) y (0, 0 3).

Si ubicamos estos puntos en el sistema de coordenadas y, luego, trazamos los segmentos que unen los puntos para cada plano, podemos visualizar la recta de intersección. Observa en la gráfica que P y Q son puntos de intersección de ambos planos. Luego, para determinar la recta de intersección, podemos escribir la recta que pasa por los puntos P y Q.

Como el punto P se ubica en el plano XZ, entonces su segunda coordenada es cero. Remplazando $y = 0$ en las ecuaciones de los planos, podemos calcular las coordenadas de P.

$$y = 0 \rightarrow \begin{array}{c} 4x + z = 6 \\ 3x + 4z = 12 \end{array} \rightarrow x = \frac{12}{13}, z = \frac{30}{13}.$$ Luego, P tiene coordenadas $\left(\frac{12}{13}, 0, \frac{30}{13}\right)$.

Ahora, el punto Q se ubica en el plano YZ, luego, su primera coordenada es cero. Remplazando $x = 0$ en las ecuaciones, podemos calcular las coordenadas de Q.

$$x = 0 \rightarrow \begin{array}{c} 3y + z = 6 \\ 4y + 4z = 12 \end{array} \rightarrow x = z = \frac{3}{2}.$$ Entonces, Q tiene coordenadas $\left(0, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Para determinar la ecuación de la recta de intersección, calculamos el vector director $\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p} = \left\langle 0, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle - \left\langle \frac{12}{13}, 0, \frac{30}{13} \right\rangle = \left\langle -\frac{12}{13}, \frac{3}{2}, -\frac{21}{26} \right\rangle$.

La ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto P y tiene dirección $\overrightarrow{PQ}$, es:

$$\langle x, y, z \rangle = \left\langle \frac{12}{13}, 0, \frac{30}{13} \right\rangle + \lambda \left\langle -\frac{12}{13}, \frac{3}{2}, -\frac{21}{26} \right\rangle.$$

Si quisiéramos escribir su ecuación cartesiana, recuerda que la recta en el espacio se representa como la intersección de dos planos que la contienen. Es decir, las **ecuaciones cartesianas de la recta**, que se consideran simultáneamente, son:

$$4x + 3y + z = 6$$
$$3x + 4y + 4z = 12$$

Porque corresponden a los planos Π_1 y Π_2 que contienen a la recta.

¿Cómo hacerlo?

Considera los planos Π_1: $x + y + z = 1$, Π_2: $2x - 2y + z = 3$. Determina si los planos se intersecan en una recta y, en ese caso, encuentra las ecuaciones paramétrica y vectorial de esa recta.

Primero determinamos que los planos no son iguales ni paralelos, ya que no existe un número real k tal que se pueda escribir una de las ecuaciones cartesianas como ponderación de la otra, ni siquiera al obviar el término libre, entonces estos planos se intersecan en una recta.

Luego, identificamos qué puntos corresponden a la intersección de los planos. Estos puntos serán los que resuelvan el sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2x - 2y + z = 3 \end{array}\right|$$

Cuando un sistema tiene menos ecuaciones que incógnitas y tiene al menos una solución, tiene infinitas soluciones. Para representarlas, buscamos eliminar alguna de las variables en las ecuaciones y escribir un sistema equivalente en términos de la variable que quede en común.

En este caso vamos a eliminar la variable x y mantener la primera ecuación.

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2x - 2y + z = 3 \end{array}\right| \; / \cdot -2 \qquad \begin{array}{r} -2x - 2y - 2z = -2 \\ 2x - 2y + z = 3 \\ \hline -4y - z = 1 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ -4y - z = 1 \end{array}\right|$$

A continuación, en el nuevo sistema eliminamos una variable distinta en la primera ecuación para que queden dos ecuaciones, con dos variables, pero con variables distintas. En este caso, eliminaremos la variable z de la primera ecuación.

$$\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ -4y - z = 1 \\ \hline x - 3y = 2 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} x - 3y = 2 \\ -4y - z = 1 \end{array}\right|$$

Observa que obtuvimos un sistema equivalente, es decir, que tiene las mismas soluciones que el sistema original.

Si escribimos cada coordenada en términos de la variable en común, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 + 3y \\ z = -1 - 4y \end{array}\right|$$

Y el conjunto solución del sistema son los puntos (x, y, z) que cumplen $x = 2 + 3y$, y además cumplen, $z = -1 - 4y$, es decir, puntos de la forma $(2 + 3y, y, -1 - 4y)$.

Podemos escribir la ecuación paramétrica de la recta, en este caso el parámetro es y pero lo podemos remplazar por λ.

$(x, y, z) = (2 + 3\lambda, \lambda, -1 - 4\lambda)$

La función paramétrica es $f(\lambda) = (2 + 3\lambda, \lambda, -1 - 4\lambda)$

Su correspondiente ecuación vectorial es $(x, y, z) = (2, 0, -1) + \lambda (3, 1, -4)$.

Tomo nota

- Si conocemos las ecuaciones cartesianas de una recta en el espacio, para determinar su correspondiente ecuación paramétrica (o vectorial), podemos:
  - escribir las ecuaciones cartesianas como un sistema de dos ecuaciones lineales, y reducirlo a un sistema equivalente, de modo que cada ecuación tenga solo dos incógnitas;
  - escoger una de las variables como variable libre y las otras dos serán las variables dependientes;
  - finalmente, escribir cada variable dependiente en términos de la variable libre, que se convierte en el parámetro.

Actividades

1. **Determina si los planos Π_1 y Π_2 son coincidentes, paralelos o secantes. Si son secantes, encuentra la ecuación paramétrica y vectorial de las rectas correspondientes la intersección de Π_1 y Π_2.**

   a. Π_1: $3x - y + z - 11 = 0$
   Π_2: $4x + y + z - 10 = 0$

   b. Π_1 : $x + y - z = 3$
   Π_2 : $x - y - z = 2$

   c. Π_1: $3x - y + 5z - 11 = 0$
   Π_2: $-6x + 2y - 10z + 22 = 0$

   d. Π_1 : $2x - z = 3$
   Π_2 : $x - y = 1$

   e. Π_1: $x + y + z = 0$
   Π_2: $x + y + z = 1$

   f. Π_1 : $x + y - z = 3$
   Π_2 : $-x - y + z = 2$

   g. Π_1: $2x + y + z = 1$
   Π_2: $x + y - z = 0$

   h. Π_1: $4x - 2y + 6z = 0$
   Π_2: $-2x + y - 3z = 0$

¿Lo entiendes?

Observa que si tienes un punto fijo, existen infinitos planos que pasan por ese punto.

¿Qué ocurre si ahora, en vez de un punto, consideras dos puntos? ¿Cuántos planos pasan por esos dos puntos?

Ya sabemos determinar la ecuación vectorial de una recta si conocemos sus ecuaciones cartesianas; ahora realizaremos el camino inverso: determinar las ecuaciones cartesianas de una recta en el espacio a partir de su ecuación paramétrica o vectorial.

La ecuación de un plano, en el espacio, es de la forma $ax + by + cz + d = 0$, por lo tanto, cualquier plano en el espacio queda completamente determinado por los valores a, b, c y d. Si queremos que ese plano pase por un punto dado, por ejemplo, el punto (2, –1, 3) debe cumplirse que $2a - b + 3c + d = 0$. Esta ecuación tiene 4 incógnitas, por lo tanto, tiene infinitas soluciones.

¿Cómo hacerlo?

Encuentra las ecuaciones cartesianas de la recta cuya ecuación paramétrica es L: $(x, y, z) = (8 + \lambda, 1 + \lambda, 2 + 3\lambda)$.

Primero determinamos dos puntos distintos que pertenezcan a la recta. Para esto remplazamos algún valor de λ, por ejemplo con $\lambda = 0$ obtenemos el punto $A(8, 1, 2)$ y con $\lambda = 1$ obtenemos el punto $B(9, 2, 5)$.

A continuación, determinamos las ecuaciones de dos planos distintos que pasen por esos dos puntos, que conformarán las ecuaciones cartesianas de la recta pedida. Los planos tienen la forma $ax + by + cz + d = 0$, pero debemos determinar cuáles son los valores de a, b, c y d.

Para esto, remplazamos las coordenadas de cada punto en la ecuación. Entonces, al remplazar (8, 1, 2) obtenemos la ecuación $8a + b + 2c + d = 0$, mientras que al remplazar (9, 2, 5), obtenemos $9a + 2b + 5c + d = 0$.

Es decir, debemos resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 8a + b + 2c + d = 0 \\ 9a + 2b + 5c + d = 0 \end{array}\right|$$

Como son dos ecuaciones y cuatro incógnitas, este sistema tiene infinitas soluciones. Luego, podemos asignar valores a dos de las incógnitas para calcular el valor de las otras dos, por ejemplo, si $a = -1$, $b = 0$, obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2c + d = 8 \\ 5c + d = 9 \end{array}\right|$$

$-3c = -1$ entonces, $c = \frac{1}{3}$, y remplazando, $d = \frac{22}{3}$.

Remplazamos estos valores de a, b, c y d, en la ecuación del plano, tenemos: $-x + \frac{1}{3}z + \frac{22}{3} = 0$, o bien, $-3x + z + 22 = 0$, ya que es equivalente.

Por otra parte, si asignamos $a = 0$, $b = -2$, tenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2c + d = 2 \\ 5c + d = 4 \end{array}\right|$$

$-3c = -2$ entonces, $c = \frac{2}{3}$, y remplazando, $d = \frac{2}{3}$.

Remplazamos, estos nuevos valores de a, b, c y d, en la ecuación del plano, tenemos: $-2y + \frac{2}{3}z + \frac{2}{3} = 0$, o bien, $-6y + 2z + 2 = 0$, ya que es equivalente.

Por lo tanto, las ecuaciones cartesianas de la recta son:

$$-3x + z + 22 = 0$$
$$-6y + 2z + 2 = 0$$

Tomo nota

- Si tienes dos puntos distintos en el espacio, existen infinitos planos que pasan por ambos puntos. Para determinar la ecuación de alguno de esos planos, podemos escribir la ecuación general de un plano $ax + by + cz + d = 0$, remplazar los puntos en el plano y resolver el sistema, considerando que ahora las incógnitas son a, b, c y d.

Actividades

1. **Determina a qué corresponde la intersección de Π_1: $3x - 2y + 4z = 9$ y Π_2: $x + y - 2z = -5$ y escribe su ecuación vectorial.**
2. **Obtén el punto de intersección de la recta $\langle x, y, z\rangle = \langle 0, 1, 0\rangle + \lambda\langle 2, 3, 1\rangle$, con el plano $3x + 2y - 11z - 5 = 0$.**
3. **¿Cuál es la posición relativa del plano $x + y + z + 1 = 0$ y la recta de ecuación $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 2, 0\rangle + \lambda\langle 1, -1, 3\rangle$?**

Antes de continuar

1. ¿Cómo tendrían que ser las ecuaciones del plano y de la recta, para que su intersección sea vacía?, ¿y para que sea una recta?

Practico

Resuelve las siguientes actividades, para consolidar los conceptos y los procedimientos que has aprendido.

1. **Para cada trío de puntos, ¿existe un único plano que los contiene?**
   a. $P(1, 0, 1)$, $Q(0, -1, 2)$ y $R(2, 1, 0)$
   b. $P(1, 3, -1)$, $Q(-1, -1, 3)$ y $R(0, 1, 1)$
   c. $P(11, 8, -11)$, $Q(-2, 0, 1)$ y $R(3, 4, -5)$
   d. $P(2, 6, -5)$, $Q(-2, 4, 1)$ y $R(0, 5, -2)$

2. **Considera cada punto y recta, ¿existe un único un plano que los contiene?**
   a. $P = (1, 2, 1)$ y $L: \langle 1, 0, 1\rangle + \lambda \langle 0, 1, 0\rangle$
   b. $P = (-3, 6, 2)$ y $L: \langle 0, 1, 2\rangle + \lambda \langle 1, -1, 0\rangle$
   c. $P = (2, -4, 2)$ y $L: \langle 4, 0, 5\rangle + \lambda \langle 1, 2, 3\rangle$
   d. $P = (4, -1, 9)$ y $L: \langle 6, -3, 5\rangle + \lambda \langle 1, -1, -2\rangle$
   e. $P = (10, -4, 1)$ y $L: \langle 2, 10, 3\rangle + \lambda \langle -4, 7, 1\rangle$
   f. $P = (4, -1, 0)$ y $L: \langle 1, 1, 1\rangle + \lambda \langle -3, 5, 1\rangle$

3. **Los siguientes pares de rectas, ¿determinan un único plano?**
   a. $L_1: \langle 1, 2, 3\rangle + \lambda \langle 1, 0, 2\rangle$
   $L_2: \langle -1, 2, -1\rangle + \mu \langle 2, 0, 1\rangle$
   b. $L_1: \langle 2, -1, 4\rangle + \lambda \langle 3, -2, 7\rangle$
   $L_2: \langle -5, 0, 6\rangle + \mu \langle -3, 1, 5\rangle$
   c. $L_1: \langle 1, -1, 4\rangle + \lambda \langle 6, -4, 0\rangle$
   $L_2: \langle -1, 3, 2\rangle + \mu \langle -3, 2, 0\rangle$
   d. $L_1: \left\langle \frac{1}{2}, \frac{5}{3}, 1\right\rangle + \lambda \langle 3, 5, -2\rangle$
   $L_2: \left\langle -\frac{11}{2}, -\frac{25}{3}, 5\right\rangle + \mu \left\langle \frac{9}{4}, \frac{15}{4}, -\frac{3}{2}\right\rangle$

4. **¿Cuál es la posición relativa entre los siguientes pares de rectas?**
   a. $L_1: \langle 1, 2, 1\rangle + \lambda \langle 2, 0, 1\rangle$
   $L_2: \langle 5, 0, 3\rangle + \mu \langle 2, 0, 1\rangle$
   b. $L_1: \langle 6, 0, -1\rangle + \lambda \langle 1, 0, 3\rangle$
   $L_2: \langle 4, 0, -9\rangle + \mu\langle 2, 0, 6\rangle$
   c. $L_1: \langle 1, 1, 1\rangle + \lambda \langle 3, -4, 6\rangle$
   $L_2: \langle 7, -7, 13\rangle + \mu\langle 2, 1, 3\rangle$
   d. $L_1: \langle 5, 0, 1\rangle + \lambda \langle 3, -4, 7\rangle$
   $L_2: \langle 1, 5, -8\rangle + \mu\langle -3, 4, -7\rangle$
   e. $L_1: \langle 2, 3, 1\rangle + \lambda \langle 3, -4, 6\rangle$
   $L_2: \langle 4, -5, 13\rangle + \mu\langle 2, 1, 3\rangle$

5. **Determina la ecuación vectorial del plano determinado por cada trío de puntos.**
   a. $P(1, 0, 1)$, $Q(1, -1, 1)$, $R(-1, 3, 1)$
   b. $P(0, 2, 1)$, $Q(-2, 8, 5)$, $R(2, 0, -1)$
   c. $P(3, 4, 6)$, $Q(5, 4, 1)$, $R(2, 7, 13)$
   d. $P(9, -4, 2)$, $Q(7, -4, 4)$, $R(11, -5, -1)$
   e. $P(1, 0, 3)$, $Q(-3, 13, -3)$, $R(9, -20, 13)$
   f. $P(6, 1, 10)$, $Q(5, -5, 13)$, $R(0, -5, 4)$

6. **Determina la ecuación vectorial del plano que contiene al punto P y los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.**
   a. $P(3, 1, 0)$, $\vec{v} = \langle 1, 1, 0\rangle$ y $\vec{w} = \langle 0, 1, 2\rangle$
   b. $P(2, 0, 3)$, $\vec{v} = \langle 1, 0, -4\rangle$ y $\vec{w} = \langle 3, 1, -2\rangle$
   c. $P(5, -6, 0)$, $\vec{v} = \langle 3, 5, -1\rangle$ y $\vec{w} = \langle 2, 9, 1\rangle$
   d. $P(12, 0, 4)$, $\vec{v} = \langle -3, 5, -7\rangle$ y $\vec{w} = \left\langle \frac{1}{2}, 1, 0\right\rangle$
   e. $P\left(\frac{3}{4}, -8, 10\right)$, $\vec{v} = \langle 0, 1, 2\rangle$ y $\vec{w} = \langle 13, 5, -21\rangle$
   f. $P(0, 0, 0)$, $\vec{v} = \langle 3, 4, -11\rangle$ y $\vec{w} = \langle 9, -6, 1\rangle$

7. **¿El punto P pertenece a la recta L? Si no es así, determina la ecuación vectorial del plano que los contiene.**
   a. $P(1, 1, 0)$, $L: \langle 3, 0, 1\rangle + \lambda \langle 2, 0, -1\rangle$
   b. $P(1, -1, 6)$, $L: \langle 4, 0, -3\rangle + \lambda \langle 5, -1, 3\rangle$
   c. $P(0, -8, 6)$, $L: \langle 4, 9, -7\rangle + \lambda \langle 3, 5, 11\rangle$
   d. $P\left(\frac{3}{4}, 0, -\frac{5}{2}\right)$, $L: \langle 1, 1, -1\rangle + \lambda \langle 4, 5, 8\rangle$
   e. $P(2, 2, 2)$, $L: \langle 3, -3, 3\rangle + \lambda \langle 5, -1, -2\rangle$
   f. $P(3, 4, 5)$, $L: \lambda \langle 1, 1, -1\rangle$

8. **Considera los siguientes tríos de puntos no colineales. ¿Cuál es la ecuación cartesiana del plano que pasa por ellos?**
   a. $P(1, 2, 1)$, $Q(1, 4, 0)$, $R(2, 2, 2)$
   b. $P(3, 7, 7)$, $Q(2, 5, 12)$ $R(2, 4, 8)$
   c. $P(-1, 4, 3)$, $Q(0, 5, 5)$, $R(-1, 7, 4)$
   d. $P(1, 0, 6)$, $Q(3, 3, 10)$, $R(0, 1, 8)$
   e. $P(-4, 5, 0)$, $Q(1, 3, 1)$, $R(0, 0, 0)$
   f. $P(3, 3, -7)$, $Q(5, 8, -2)$, $R(9, 18, 18)$

9. Determina la ecuación cartesiana del plano que contiene al punto P y a la recta L.

a. $P(1, 3, 0)$, $L: \langle 0, 1, -1\rangle + \lambda\langle 1, 2, 0\rangle$
b. $P(-2, 1, -10)$, $L: \langle 4, 3, -1\rangle + \lambda\langle 2, 1, 3\rangle$
c. $P(12, 2, 1)$, $L: \langle 1, 2, -3\rangle + \lambda\langle 5, 0, 2\rangle$
d. $P(5, 6, -2)$, $L: \langle 3, 2, -4\rangle + \lambda\langle 1, 1, 1\rangle$
e. $P(9, -13, -3)$, $L: \langle 0, 1, 0\rangle + \lambda\langle -3, 5, 1\rangle$
f. $P\left(7, -\frac{1}{2}, 2\right)$, $L: \langle 7, -1, 2\rangle + \lambda\langle -2, 6, 3\rangle$

10. Dada la ecuación vectorial del plano, determina su ecuación cartesiana, en cada caso.

a. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 2, 3\rangle + \lambda\langle 1, 1, 2\rangle + \mu\langle 0, 2, -1\rangle$
b. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle 2, -1, 5\rangle + \lambda\langle 4, -1, 0\rangle + \mu\langle 0, 1, -3\rangle$
c. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle 0, 12, -3\rangle + \lambda\langle 1, 1, 4\rangle + \mu\langle 0, 3, 5\rangle$
d. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle 8, 0, -3\rangle + \lambda\left\langle 1, 4, \frac{1}{2}\right\rangle + \mu\left\langle \frac{3}{4}, 1, 0\right\rangle$
e. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle 0, 1, 0\rangle + \lambda\langle 0, 2, 0\rangle + \mu\langle 3, 5, 9\rangle$
f. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle 3, -7, 12\rangle + \lambda\langle 1, 1, 1\rangle + \mu\langle 0, 4, 5\rangle$

11. Dada la ecuación cartesiana del plano, determina su ecuación vectorial, en cada caso.

a. $\Pi: x + y + z = 0$
b. $\Pi: 2x + 3y + z = 0$
c. $\Pi: 3x - y + z + 2 = 0$
d. $\Pi: 4x - 5y + 2z - 10 = 0$
e. $\Pi: 12x - 7y + 13z - 24 = 0$
f. $\Pi: \frac{3x}{4} - 5y + \frac{z}{3} - 1 = 0$

12. Para los siguientes planos, ¿cuál es la ecuación vectorial de la recta de intersección de los planos, en cada caso?

a. $\Pi_1: x + y + z = 0$, $\Pi_2: 2x + y + 3z = 0$
b. $\Pi_1: x - 3y + 2z = 0$, $\Pi_2: x - 2z = 0$
c. $\Pi_1: x - y = 0$, $\Pi_2: -x + z = 0$
d. $\Pi_1: x - 2y + 3z - 7 = 0$, $\Pi_2: 2y - z + 2 = 0$
e. $\Pi_1: 5y - 2z - 13 = 0$, $\Pi_2: x + 4y - 2z - 10 = 0$
f. $\Pi_1: x - 2z - 3 = 0$, $\Pi_2: 2x + 10y + z - 76 = 0$

13. Considera los siguientes pares de planos, ¿cuál es su posición relativa?

a. $\Pi_1: x - 3y + 2z = 0$, $\Pi_2: x - y - z + 2 = 0$
b. $\Pi_1: 5x - y + 4z - 13 = 0$, $\Pi_2: 5x - y + 4z + 7 = 0$
c. $\Pi_1: 5x + 15y - 10z + 20 = 0$, $\Pi_2: x + 3y - 2z + 4 = 0$

14. Considera los siguientes pares de planos, ¿cuál es su posición relativa?

a. $\Pi_1: \langle x, y, z\rangle = \langle 3, 2, 1\rangle + \lambda\langle 1, 1, 1\rangle + \mu\langle 0, 3, 4\rangle$,
$\Pi_2: \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 5, 6\rangle + \lambda\langle -4, 6, 2\rangle + \mu\langle 7, -4, 8\rangle$
b. $\Pi_1: \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 2, 3\rangle + \lambda\langle 1, 0, 1\rangle$,
$\Pi_2: \langle x, y, z\rangle = \langle 2, 3, 4\rangle + \lambda\langle 1, 2, 3\rangle + \mu\langle -2, 0, -2\rangle$
c. $\Pi_1: \langle x, y, z\rangle = \langle 0, 3, -5\rangle + \lambda\langle 5, 4, 1\rangle + \mu\langle 1, 2, 1\rangle$,
$\Pi_2: \langle x, y, z\rangle = \langle 4, 5, -5\rangle + \lambda\langle 4, 2, 0\rangle + \mu\langle 1, 2, 1\rangle$

15. ¿Cuál es el punto de intersección del plano Π y la recta L?

a. $\Pi: x + y + z = 0$, $L: \langle x, y, z\rangle = \lambda\langle 1, 2, 3\rangle$
b. $\Pi: x + 2y + z = 0$, $L: \langle x, y, z\rangle = \lambda\langle 2, 0, 3\rangle$
c. $\Pi: x - y + 2z + 3 = 0$, $L: \langle x, y, z\rangle = \lambda\langle 1, 1, 1\rangle$
d. $\Pi: 2x + 3y - 6z + 8 = 0$, $L: \langle x, y, z\rangle = \lambda\langle 1, 0, 2\rangle$
e. $\Pi: 5x - y + 2z - 12 = 0$,
$L: \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 2, 3\rangle + \lambda\langle 2, 1, -3\rangle$
f. $\Pi: 10x + 4y - 7z - 14 = 0$,
$L: \langle x, y, z\rangle = \langle 0, 1, 0\rangle + \lambda\langle 2, 0, 3\rangle$

16. Determina, en cada caso, la posición relativa entre el plano Π y la recta L.

a. $\Pi: x + y - z = 0$, $L: \langle x, y, z\rangle = \lambda\langle 3, 2, 1\rangle$
b. $\Pi: x - 4y + z = 0$, $L: \langle x, y, z\rangle = \lambda\langle 2, 1, 2\rangle$
c. $\Pi: 2x - 3y + 2z = 0$,
$L: \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 2, 2\rangle + \lambda\langle 1, 1, 1\rangle$
d. $\Pi: 3x + y - 4z = 0$,
$L: \langle x, y, z\rangle = \langle 2, 2, 2\rangle + \lambda\langle 0, 4, 1\rangle$
e. $\Pi: 5x - y + z - 6 = 0$,
$L: \langle x, y, z\rangle = \langle 3, 4, 5\rangle + \lambda\langle 5, -1, 1\rangle$
f. $\Pi: 2x - 5y + 7z + 12 = 0$,
$L: \langle x, y, z\rangle = \langle -1, 2, 0\rangle + \lambda\langle -1, 1, 1\rangle$

17. Determina si cada vector es paralelo, perpendicular (o ninguno de ellos) a uno de los ejes coordenados.

a. $\vec{v}\,\langle 1, 0, 0\rangle$
b. $\vec{v}\,\langle 0, -4, 0\rangle$
c. $\vec{v}\,\langle 1, 1, 1\rangle$
d. $\vec{v}\,\langle 0, 1, 1\rangle$
e. $\vec{v}\,\langle 3, 6, 0\rangle$
f. $\vec{v}\,\langle -12, 0, 37\rangle$

18. **Determina si cada recta es paralela o perpendicular a algún eje coordenado.**
   a. $L: \langle 2, 2, -1\rangle + \lambda\langle 4, 0, 0\rangle$
   b. $L: \langle 1, 0, 1\rangle + \lambda\langle 0, 1, -2\rangle$
   c. $L: \langle 0, 1, 0\rangle + \lambda\langle 3, 0, -1\rangle$
   d. $L: \langle 12, 0, 0\rangle + \lambda\langle 0, 23, 0\rangle$
   e. $L: \langle -3, 5, 1\rangle + \lambda\langle 1, -2, 4\rangle$
   f. $L: \langle 0, -45, 8\rangle + \lambda\langle 24, -47, 0\rangle$

19. **Determina si cada plano es paralelo o perpendicular a algún eje coordenado y si además es paralelo a algún plano coordenado.**
   a. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \lambda\langle 1, 1, 0\rangle + \mu\langle 3, 2, 0\rangle$
   b. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 2, 1\rangle + \lambda\langle 4, -2, 0\rangle + \mu\langle 5, 6, 0\rangle$
   c. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle 5, 0, -2\rangle + \lambda\langle 0, 1, 2\rangle + \mu\langle 1, 0, 1\rangle$
   d. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 2, 3\rangle + \lambda\langle 1, 0, 1\rangle + \mu\langle 2, 0, 4\rangle$
   e. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 0, 1\rangle + \lambda\langle 3, 1, 2\rangle + \mu\langle 1, 0, 0\rangle$
   f. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \lambda\langle 0, 1, 0\rangle + \mu\langle 0, 12, 1\rangle$

20. **Determina si cada plano es paralelo o perpendicular a algún eje coordenado y si además es paralelo a algún plano coordenado.**
   a. $\Pi: z = 0$
   b. $\Pi: y = 3$
   c. $\Pi: 4x = 7$
   d. $\Pi: x + y = 0$
   e. $\Pi: 2y + 3z + 6 = 0$
   f. $\Pi: x - 4y + 2z + 7 = 0$

21. **Determina si cada la recta es paralela o no al plano dado.**
   a. $L: \langle x, y, z\rangle = \langle -1, 3, 7\rangle + \lambda\langle 0, 4, 0\rangle$,
   $\Pi: 4x - z + 2 = 0$
   b. $L: \langle x, y, z\rangle = \langle 5, -4, 3\rangle + \lambda\langle 2, 0, 7\rangle$,
   $\Pi: 3x - 2z + 12 = 0$
   c. $L: \langle x, y, z\rangle = \langle 7, 5, -9\rangle + \lambda\langle 2, 1, 4\rangle$,
   $\Pi: x + y + z + 2 = 0$

22. **Determina si cada recta es perpendicular o no al plano dado.**
   a. $L: \langle x, y, z\rangle = \langle 0, 2, 4\rangle + \lambda\langle 1, -1, 0\rangle$,
   $\Pi: x - y + 4 = 0$
   b. $L: \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 0, 4\rangle + \lambda\langle 0, -2, 1\rangle$,
   $\Pi: -2y + z - 5 = 0$
   c. $L: \langle x, y, z\rangle = \langle 3, 4, 2\rangle + \lambda\langle 1, 0, 0\rangle$,
   $\Pi: x = 3$
   d. $L: \langle x, y, z\rangle = \langle 0, -5, 1\rangle + \lambda\langle 0, 2, 0\rangle$,
   $\Pi: x + z - 2 = 0$
   e. $L: \langle x, y, z\rangle = \langle 7, -2, 6\rangle + \lambda\langle 0, 0, 1\rangle$,
   $\Pi: 2x - y + 3 = 0$
   f. $L: \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 1, 0\rangle + \lambda\langle 5, 0, 6\rangle$,
   $\Pi: 5x + y + 6z + 1 = 0$

23. **Observa las siguientes ecuaciones, ¿cuáles de ellas corresponden a planos y cuáles a rectas?**
   a. $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 2, 3\rangle + \lambda\langle 1, 3, 0\rangle + \mu\langle 0, 2, 1\rangle$
   b. $\langle x, y, z\rangle = \langle 0, 3, -2\rangle + \lambda\langle 2, -1, 0\rangle + \mu\langle 4, -2, 0\rangle$
   c. $\langle x, y, z\rangle = \langle 0, 1, 4\rangle + \lambda\langle 0, 1, -1\rangle + \mu\langle 1, -1, 0\rangle$
   d. $\langle x, y, z\rangle = \langle 5, -3, 1\rangle + \lambda\langle 12, 18, 0\rangle + \mu\langle 2, 3, 0\rangle$
   e. $\langle x, y, z\rangle = \langle 6, 7, -4\rangle + \lambda\left\langle \frac{1}{2}, 1, 4\right\rangle + \mu\langle 1, 2, 8\rangle$
   f. $\langle x, y, z\rangle = \lambda\langle 1, 1, 1\rangle + \mu\langle 2, 2, -2\rangle$

24. **Para cada plano, determina todos los puntos del plano que tengan segunda coordenada igual a 3.**
   a. $\Pi: x + y + z = 0$
   b. $\Pi: x - y + 2z + 1 = 0$
   c. $\Pi: x + 3y - 4z - 6 = 0$
   d. $\Pi: x - z - 4 = 0$
   e. $\Pi: y - 3z + 6 = 0$
   f. $\Pi: 2y + 5z + 1 = 0$

25. **Para cada plano, determina todos los puntos del plano que cumplan que la suma de sus dos primeras coordenadas es 0.**
   a. $\Pi: x - y + z = 0$
   b. $\Pi: 2x - y - z + 1 = 0$
   c. $\Pi: y - z + 5 = 0$
   d. $\Pi: x + 2z - 4 = 0$
   e. $\Pi: 3x + y + 2z - 7 = 0$
   f. $\Pi: 4x - 5y + z - 8 = 0$

Marca la opción correcta en los ítems 26 a 34.

26. **¿Cuál de los siguientes planos contiene al punto (1, 2, 3)?**

A. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle 0, 1, 0\rangle + \lambda\langle 0, 2, 3\rangle + \mu\langle 0, 4, -5\rangle$
B. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle 3, -1, 13\rangle + \lambda\langle -2, 3, 1\rangle + \mu\langle 4, -6, 9\rangle$
C. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 2, 1\rangle + \lambda\langle 0, 1, 0\rangle + \mu\langle 2, -3, 0\rangle$
D. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 1, 1\rangle + \lambda\langle 2, 0, 3\rangle + \mu\langle -1, 0, 1\rangle$
E. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle 3, 2, 1\rangle + \lambda\langle 0, 0, 1\rangle + \mu\langle 0, 12, 8\rangle$

27. **¿Cuál de los siguientes planos contiene a la recta que pasa por (2, 5, 3) y (3, 4, 5)?**

A. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle 2, 5, 0\rangle + \lambda\langle 1, 1, 0\rangle + \mu\langle 3, -1, 0\rangle$
B. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 1, 1\rangle + \lambda\langle 0, 2, -1\rangle + \mu\langle 0, 5, 4\rangle$
C. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle 7, -9, 1\rangle + \lambda\langle 3, 0, 1\rangle + \mu\langle 2, 0, -4\rangle$
D. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle 0, 1, 0\rangle + \lambda\langle 1, 1, 1\rangle + \mu\langle 2, 0, 2\rangle$
E. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle 2, 3, 4\rangle + \lambda\langle 0, 2, -1\rangle + \mu\langle 1, 1, 1\rangle$

28. **¿Cuál de las siguientes ecuaciones es la ecuación cartesiana asociada a la ecuación vectorial $\langle 1, 2, 4\rangle + \lambda\langle 0, 3, 2\rangle + \mu\langle 4, 2, 1\rangle$?**

A. $5x + 8y - 12z + 27 = 0$
B. $x - 8y + 12z - 33 = 0$
C. $x + y + z - 7 = 0$
D. $4x + 2y + z - 12 = 0$
E. $3y + 2z - 14 = 0$

29. **¿Cuál de las siguientes rectas es paralela al plano $3x - 2y + z - 2 = 0$?**

A. $L: \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 1, 0\rangle + \lambda\langle 2, 4, 5\rangle$
B. $L: \langle x, y, z\rangle = \langle 0, 2, 3\rangle + \lambda\langle 1, -1, 1\rangle$
C. $L: \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 1, -7\rangle + \lambda\langle -1, 2, 6\rangle$
D. $L: \langle x, y, z\rangle = \langle 3, -7, 0\rangle + \lambda\langle 3, -2, 1\rangle$
E. $L: \langle x, y, z\rangle = \langle 3, 0, -1\rangle + \lambda\langle 2, 1, -4\rangle$

30. **¿Cuál de los siguientes planos pasa por el punto (3, –1, 2) y es paralelo al plano $\Pi: 2x - 3y - 6 = 0$?**

A. $\Pi: 2x - 3y - 9 = 0$
B. $\Pi: 3x + 2y - 6 = 0$
C. $\Pi: 2x + 5y - z = 0$
D. $\Pi: 3x - y + 2z - 6 = 0$
E. $\Pi: 2x - 3y - 4 = 0$

31. **¿Cuál de los planos es paralelo al eje Y y perpendicular al eje Z?**

A. $\Pi: 3x - y - 4 = 0$
B. $\Pi: y - z = 0$
C. $\Pi: z - 5 = 0$
D. $\Pi: 2x - 3y + z - 4 = 0$
E. $\Pi: 2x = 0$

32. **¿Cuál de los siguientes planos no contiene al punto (0, 0, 0)?**

A. $\Pi: x - 3y + 2z = 0$
B. $\Pi: x - y + 2z = 0$
C. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 2, 3\rangle + \lambda\langle 1, 2, 3\rangle + \mu\langle 4, -2, 5\rangle$
D. $\Pi: x - 3y + z + 2 = 0$
E. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle 16, -6, 8\rangle + \lambda\langle 4, 5, 6\rangle + \mu\langle -4, 8, 2\rangle$

33. **¿En qué caso el plano y la recta dados no se intersecan?**

A. $\Pi: 2x + 3y - z + 1 = 0$,
$L: \langle x, y, z\rangle = \lambda\langle -1, 1, 1\rangle$
B. $\Pi: 3x + 4y - z - 4 = 0$,
$L: \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 0, 2\rangle + \lambda\langle 2, 5, 6\rangle$
C. $\Pi: 4x - 7y = 0$,
$L: \langle x, y, z\rangle = \langle 2, 0, 1\rangle + \lambda\langle 2, 4, 6\rangle$
D. $\Pi: x - 5z - 7 = 0$,
$L: \langle x, y, z\rangle = \lambda\langle 2, 4, 1\rangle$
E. $\Pi: x = 4$,
$L: \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 2, 3\rangle + \lambda\langle 3, 0, 0\rangle$

34. **¿Cuál de los siguientes pares de rectas son paralelas?**

A. $L_1: \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 2, 3\rangle + \lambda\langle 5, 3, -1\rangle$,
$L_2: \langle x, y, z\rangle = \langle 4, 0, 1\rangle + \mu\langle 3, 5, -1\rangle$
B. $L_1: \langle x, y, z\rangle = \langle 9, 0, 0\rangle + \lambda\langle 12, 9, 6\rangle$,
$L_2: \langle x, y, z\rangle = \langle 9, 0, 0\rangle + \mu\langle 1, 2, 3\rangle$
C. $L_1: \langle x, y, z\rangle = \langle 5, 1, -2\rangle + \lambda\langle 6, -2, 0\rangle$,
$L_2: \langle x, y, z\rangle = \langle 0, 4, 2\rangle + \mu\left\langle 4, -\frac{4}{3}, 0\right\rangle$
D. $L_1: \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 0, 8\rangle + \lambda\langle 3, 4, 7\rangle$,
$L_2: \langle x, y, z\rangle = \langle 6, -7, 1\rangle + \mu\langle -3, 4, -7\rangle$
E. $L_1: \langle x, y, z\rangle = \langle 5, -2, 12\rangle + \lambda\langle 5, -2, 12\rangle$,
$L_2: \langle x, y, z\rangle = \mu\langle 1, 1, 1\rangle$

Evaluación de proceso

Aplica lo aprendido hasta este momento en la unidad para desarrollar las siguientes actividades.

1. **Para cada trío de puntos, ¿existe un único plano que los contiene?**
   a. $P(0, 1, 1)$, $Q(0, 4, 1)$ y $R(0, 0, 1)$
   b. $P(1, 2, 1)$, $Q(1, 5, 1)$ y $R(1, -1, 0)$
   c. $P(2, -4, -7)$, $Q(0, 3, 0)$ y $R(0, 5, -6)$

2. **Considera cada punto y recta, ¿existe un único plano que los contiene?**
   a. $P = (2, -4, 2)$ y $L: \langle 4, 0, 5\rangle + \lambda \langle 1, 2, 3\rangle$
   b. $P = (4, -1, 9)$ y $L: \langle 6, -3, 5\rangle + \lambda \langle 1, -1, -2\rangle$
   c. $P = (2, 6, 0)$ y $L: \langle 2, 0, 3\rangle + \lambda \langle 3, -5, -1\rangle$

3. **Los siguientes pares de rectas, ¿determinan un único plano?**
   a. $L_1: \langle 2, 1, 0\rangle + \lambda \langle 1, 0, 1\rangle$
   $L_2: \langle 5, 1, 4\rangle + \mu \langle 1, 0, 1\rangle$
   b. $L_1: \langle 1, -1, 2\rangle + \lambda \langle 1, 2, 1\rangle$
   $L_2: \langle 3, 3, 4\rangle + \mu \langle 2, 4, 2\rangle$
   c. $L_1: \langle 1, -1, 1\rangle + \lambda \langle -3, 2, 0\rangle$
   $L_2: \langle -1, 3, 1\rangle + \mu \langle 9, -6, 0\rangle$

4. **¿Cuál es la posición relativa entre los siguientes pares de rectas?**
   a. $L_1: \langle 0, 1, 1\rangle + \lambda \langle 1, 1, 0\rangle$
   $L_2: \langle 2, 3, 1\rangle + \mu \langle 1, 1, 0\rangle$
   b. $L_1: \langle 3, 4, 0\rangle + \lambda \langle 2, 0, -1\rangle$
   $L_2: \langle 9, 4, -3\rangle + \mu \langle -2, 0, 1\rangle$
   c. $L_1: \langle 3, 0, 2\rangle + \lambda \langle 1, 2, 1\rangle$
   $L_2: \langle 1, -4, 0\rangle + \mu \langle 3, 0, 9\rangle$

5. **Determina si los siguientes puntos son colineales. Si así fuera, escribe la ecuación vectorial de la recta correspondiente.**
   a. $P(1, 0, 2)$, $Q(-1, 1, 1)$ y $R(3, -1, 1)$
   b. $P(-1, -1, -1)$, $Q(-1, 0, 1)$ y $R(-1, -2, -3)$
   c. $P(2, 5, 1)$, $Q(-6, -15, -3)$ y $R(4, 20, 2)$
   d. $P(1, 2, 1)$, $Q(4, 5, 4)$ y $R(-2, -1, -2)$
   e. $P(3, 4, 7)$, $Q(1, 4, 1)$ y $R(2, -5, 13)$
   f. $P(-4, 1, 10)$, $Q(5, 3, 12)$ y $R(4, -1, 0)$

6. **¿El punto P pertenece a la recta L? Si no es así, determina la ecuación vectorial del plano que los contiene.**
   a. $P(7, 0, -1)$, $L: \langle 3, 0, 1\rangle + \lambda \langle 4, 0, -2\rangle$
   b. $P(0, 1, 5)$, $L: \langle 4, 3, -1\rangle + \lambda \langle 2, -1, 3\rangle$
   c. $P(1, 2, -5)$, $L: \langle 5, -5, 5\rangle + \lambda \langle -5, -1, 2\rangle$
   d. $P(3, 4, 2)$, $L: \lambda \langle 3, 5, -1\rangle$

7. **Grafica el plano $6x + 4z = 24$. ¿Con qué eje es paralelo?**

8. **Determina la ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto $A(1, 3, 2)$ y es paralelo a los vectores $\vec{v} = \langle 2, 5, 1\rangle$ y $\vec{u} = \langle -3, 4, -1\rangle$.**

9. **Dada la ecuación vectorial del plano, determina su ecuación cartesiana, en cada caso.**
   a. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 0, 3\rangle + \lambda \langle 2, 2, -4\rangle + \mu \langle 0, -2, 1\rangle$
   b. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle 3, 1, -5\rangle + \lambda \langle 3, -1, 0\rangle + \mu \langle 0, 1, -5\rangle$
   c. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle 0, 1, -2\rangle + \lambda \langle 1, -3, 2\rangle + \mu \langle 0, 2, 6\rangle$
   d. $\Pi: \langle x, y, z\rangle = \langle 0, 4, 0\rangle + \lambda \langle 0, -3, 0\rangle + \mu \langle 2, 3, -7\rangle$

10. **Considera los siguientes pares de planos, ¿cuál es su posición relativa?**
    a. $\Pi_1: x + y - z = 0$, $\Pi_2: 2x - y + z = 0$
    b. $\Pi_1: x + 2y + 3z = 0$, $\Pi_2: x + 2y + 3z + 5 = 0$
    c. $\Pi_1: x - y + 3z - 7 = 0$, $\Pi_2: 2x - 2y + 6z + 3 = 0$

11. **Considera los siguientes pares de planos, ¿cuál es su posición relativa?**
    a. $\Pi_1: \langle x, y, z\rangle = \lambda \langle 1, 5, 0\rangle + \mu \langle 3, 2, 1\rangle$,
    $\Pi_2: \langle x, y, z\rangle = \lambda \langle 1, 5, 0\rangle + \mu \langle 1, 1, 1\rangle$
    b. $\Pi_1: \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 3, 4\rangle + \lambda \langle 1, 0, 1\rangle + \mu \langle 4, 0, 1\rangle$,
    $\Pi_2: \langle x, y, z\rangle = \langle 0, 5, 0\rangle + \lambda \langle 1, 0, 1\rangle + \mu \langle 4, 0, 1\rangle$
    c. $\Pi_1: \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 0, 3\rangle + \lambda \langle 3, -1, 2\rangle + \mu \langle 4, -5, 1\rangle$,
    $\Pi_2: \langle x, y, z\rangle = \langle 8, -6, 6\rangle + \lambda \langle 3, -1, 2\rangle + \mu \langle 4, -5, 1\rangle$

12. Determina la posición relativa entre los siguientes planos, en cada caso, y escribe la ecuación vectorial de la recta correspondiente a su intersección, si existe.

a. Π_1: $2x + 3y - z - 4 = 0$ y Π_2: $x - y + z - 4 = 0$.

b. Π_1: $3x + 4y - 2z + 7 = 0$ y Π_2: $x - y - 3z + 3 = 0$.

c. Π_1: $x + 2y - z = 1$ y Π_2: $10x + 10y + 1 = 0$

d. Π_1: $y = 1$ y Π_2: $x + y + z = 0$

13. Considera los puntos dados. ¿Forman un triángulo en el espacio?

a. $P(1, 2, 0)$, $Q(3, 2, 1)$ y $R(-5, 2, -3)$

b. $P(1, -1, 2)$, $Q(1, 0, 2)$, y $R(1, -3, 2)$

c. $P(0, 1, 0)$, $Q(1, 3, -1)$ y $R(2, -3, 2)$

d. $P(3, 2, 0)$, $Q(5, 1, 3)$ y $R(1, 4, -6)$

e. $P(-3, 5, 1)$, $Q(-2, 8, 1)$ y $R(0, 14, -2)$

f. $P(7, -4, 6)$, $Q(4, -4, 10)$ y $R(13, -4, -2)$

14. Determina si cada recta es paralela o perpendicular a algún eje coordenado.

a. L: $\langle 4, 5, -1\rangle + \lambda \langle 3, 0, 2\rangle$

b. L: $\langle 2, 3, 1\rangle + \lambda \langle 0, 3, -4\rangle$

c. L: $\langle -2, 0, 5\rangle + \lambda \langle 0, 1, 0\rangle$

d. L: $\langle -4, 2, 2\rangle + \lambda \langle 1, 2, 6\rangle$

15. Determina si cada la recta es paralela o no al plano dado.

a. L: $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 2, 5\rangle + \lambda \langle 2, 0, 0\rangle$,
Π: $y + 2z - 4 = 0$

b. L: $\langle x, y, z\rangle = \langle 0, 6, 1\rangle + \lambda \langle 1, 3, 0\rangle$,
Π: $x + 4y + 7 = 0$

c. L: $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 0, 1\rangle + \lambda \langle 2, 1, 0\rangle$,
Π: $x - z + 4 = 0$

16. Para cada plano, determina todos los puntos del plano tales que su tercera coordenada sea el doble de su primera coordenada.

a. Π: $x + y + z - 3 = 0$

b. Π: $x - 3z + 4 = 0$

c. Π: $y + 2z - 6 = 0$

d. Π: $-2x + 4y + z = 0$

e. Π: $3x + 5y - z - 5 = 0$

f. Π: $3y - 2z + 2 = 0$

17. Si A es un punto de la recta CD y B es un punto que no pertenece a ella, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A. B, C y D son colineales.

B. Existe un solo plano que pasa por A, B y C.

C. A, C y D son coplanares, pero no colineales.

D. Existe un solo plano que pasa por A y CD.

E. Existe una única recta que pasa por B.

18. ¿Cuál es la ecuación vectorial de la recta correspondiente a la intersección de Π_1: $x - y + 2z = 8$ y Π_2: $x + 2y + 8z = 20$?

A. $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, -1, 2\rangle + \lambda\langle 1, 2, 8\rangle$

B. $\langle x, y, z\rangle = \langle 0, -2, 3\rangle + \lambda\langle 4, -2, -1\rangle$

C. $\langle x, y, z\rangle = \langle 0, -2, 3\rangle + \lambda\langle 4, 2, -1\rangle$

D. $\langle x, y, z\rangle = \langle 0, -2, -3\rangle + \lambda\langle 4, 2, 1\rangle$

E. $\langle x, y, z\rangle = \langle 4, 2, -1\rangle + \lambda\langle 0, -2, 3\rangle$

19. ¿Cuál de los siguientes planos contiene al punto (1, 1, 1)?

A. Π: $x - y + 2z = 0$

B. Π: $-2x + 4y + z = 0$

C. Π: $x - 3y + 2z = 0$

D. Π: $x - 3y + z + 2 = 0$

E. Π: $3x + 5y - z - 5 = 0$

20. Dada la recta L y el plano Π, ¿cuál de los siguientes son paralelos entre sí?

A. L: $\langle x, y, z\rangle = \lambda \langle 1, 2, 3\rangle$
Π: $-4x + 7y = 0$

B. L: $\langle x, y, z\rangle = \lambda \langle 4, 8, 2\rangle$
Π: $x - 5z - 7 = 0$

C. L: $\langle x, y, z\rangle = \lambda \langle 5, 0, 0\rangle$
Π: $x = 6$

D. L: $\langle x, y, z\rangle = \lambda \langle 1, -1, -1\rangle$
Π: $2x + 3y - z + 1 = 0$

E. L: $\langle x, y, z\rangle = \lambda \langle 2, 5, 6\rangle$
Π: $3x + 4y - z - 4 = 0$

Mi progreso

Verifica en el solucionario del Texto si tus respuestas son correctas. Si tienes respuestas incorrectas, marca en la tabla el criterio correspondiente y realiza las actividades de refuerzo indicadas.

Criterio	Ítems	¿Qué debo hacer?
Comprender que puntos, rectas y planos pueden ser representados en el sistema coordenado tridimensional y determinar la representación cartesiana y vectorial de la recta en el espacio.	1, 4, 7, 13, 14, 15 y 18	Si tuviste menos de 15 ítems correctos, realiza las actividades 1, 2, 3, 5, 6, 7, 12 y 15.
Identificar y describir puntos, rectas y planos en el espacio; deducir la ecuación vectorial de la recta y su relación con la ecuación cartesiana.	2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 16, 17, 19 y 20	Si tuviste menos de 30 ítems correctos, realiza las actividades 4, 8, 9, 10, 11, 13 y 14

Para reforzar

Según los resultados obtenidos en la evaluación de proceso, resuelve las actividades correspondientes para reforzar los contenidos en los que tuviste dificultades.

1. **Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica las falsas.**
   a. Dados dos puntos en el espacio, existe una única recta que pasa por ellos.
   b. Dados dos planos en el espacio, su intersección es siempre una recta.
   c. Si un punto en el espacio no pertenece a una recta, no es posible determinar un plano que los contenga a ambos.
   d. Cuando dos planos son secantes, siempre son perpendiculares entre sí.
   e. Dados dos puntos en el espacio, existe un único plano que pasa por ellos.
   f. Dados cuatro puntos en el espacio, es posible asegurar que existe un plano que los contiene.
   g. Dos rectas distintas en el espacio pueden ser paralelas o abaleadas.
   h. La intersección entre tres planos en el espacio es un punto que pertenece a los tres planos.
   i. Por una recta en el espacio pasan infinitos planos.
2. **Si dos planos en el espacio no son secantes, ¿son necesariamente paralelos?, ¿por qué?**
3. **Determina si los siguientes puntos son colineales. Si así fuera, escribe la ecuación vectorial de la recta correspondiente.**
   a. $P(3, 3, 3)$, $Q(5, 5, 5)$ y $R(8, 8, 8)$
   b. $P(-1, -2, -3)$, $Q(2, 1, 0)$ y $R(11, 10, 9)$
   c. $P(2, 5, 1)$, $Q(-6, 5, -3)$ y $R(4, 5, 4)$
   d. $P(0, 2, 4)$, $Q(0, -2, -4)$ y $R(0, -1, -2)$
   e. $P(3, 4, 7)$, $Q(2, 5, 2)$ y $R(4, -5, 10)$
   f. $P(-4, 1, 6)$, $Q(5, -3, -2)$ y $R(3, 1, 0)$
4. **Al comparar las ecuaciones de dos planos en el espacio, en su forma cartesiana, ¿cómo se distingue cuándo los planos son paralelos, coincidentes o secantes?**
5. **Dada la ecuación vectorial del plano, determina su ecuación cartesiana, en cada caso.**
   a. $\Pi_1: \langle x, y, z\rangle = \langle 0, 1, -2\rangle + \lambda\langle -1, 1, -4\rangle + \mu\langle 0, 2, -3\rangle$
   b. $\Pi_2: \langle x, y, z\rangle = \langle -3, 4, 5\rangle + \lambda\langle 0, -1, 0\rangle + \mu\langle 2, 1, 4\rangle$
   c. $\Pi_3: \langle x, y, z\rangle = \langle 5, 6, -2\rangle + \lambda\langle 1, 3, -2\rangle + \mu\langle 0, 3, 6\rangle$
   d. $\Pi_4: \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 0, 3\rangle + \lambda\langle 0, 5, 0\rangle + \mu\langle 1, 4, -5\rangle$
   e. $\Pi_5: \langle x, y, z\rangle = \langle 2, -1, 0\rangle + \lambda\langle 1, 0, -3\rangle + \mu\langle 0, 2, 0\rangle$

6. **Indica ejemplos de elementos cotidianos en los que se observen, en cada caso:**
   a. rectas paralelas.
   b. tres o más puntos colineales.
   c. planos secantes.
   d. rectas alabeadas.
   e. una recta paralela a un plano.
   f. planos coincidentes.

7. **¿Cuál es la posición relativa entre los siguientes pares de rectas?**
   a. $L_1: \langle 2, 2, 0\rangle + \lambda \langle 5, 2, 0\rangle$
   $L_2: \langle 6, 0, 2\rangle + \mu \langle 5, 2, 0\rangle$
   b. $L_1: \langle 2, 1, 0\rangle + \lambda \langle 1, -4, 6\rangle$
   $L_2: \langle 8, -7, 12\rangle + \mu \langle 2, 5, 3\rangle$
   c. $L_1: \langle 6, 0, 0\rangle + \lambda \langle 3, -4, 5\rangle$
   $L_2: \langle 2, 5, -9\rangle + \mu \langle -3, 4, -5\rangle$
   d. $L_1: \langle 7, 0, -2\rangle + \lambda \langle -1, 0, 3\rangle$
   $L_2: \langle 5, 0, -10\rangle + \mu \langle 3, 0, -9\rangle$

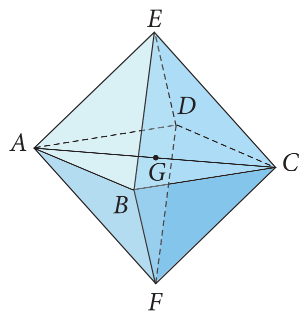
8. **Describe qué elementos son suficientes, en cada caso, para determinar:**
   a. una recta en el plano.
   b. una recta en el espacio.
   c. un plano en el espacio.

9. **Determina si los siguientes planos son paralelos, coincidentes o secantes, en cada caso, y escribe la ecuación vectorial de la recta correspondiente a su intersección, si existe.**
   a. $\Pi_1: 5x + 3y - 2z - 3 = 0$, $\Pi_2: -10x - 6y + 4z = 0$.
   b. $\Pi_1: 2x + 4y - 6z + 4 = 0$ y $\Pi_2: x + y - 3z + 2 = 0$.
   c. $\Pi_1: x + 3y - z - 2 = 0$ y $\Pi_2: 3x - y + 1 = 0$
   d. $\Pi_1: z = 4$ y $\Pi_2: x - y + z = 0$

10. **Dada la ecuación cartesiana del plano, determina su ecuación vectorial, en cada caso.**
   a. $\Pi: x + y - z = 0$
   b. $\Pi: 2x - 3y + z = 0$
   c. $\Pi: 3x - y - z + 2 = 0$
   d. $\Pi: 4x + 5y + 2z - 10 = 0$

11. **Explica la relación entre la ecuación paramétrica y la ecuación vectorial de una recta en el espacio.**

12. **De acuerdo con la figura, $ABCDEF$ es un octaedro regular, y además los puntos A, B, C, D y G son coplanarios. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?**



   A. Los puntos A, C y G son colineales.
   B. El segmento AC se interseca con BD.
   C. El segmento AD es paralelo a BC.
   D. Los segmentos AB y CD son alabeados.
   E. Los segmentos BE y DF pertenecen a un mismo plano.

13. **¿Cuál de los siguientes planos contiene al punto (4, 0, –1)?**
   A. $\Pi: 2x - y + 3z = 0$
   B. $\Pi: -x + 5y - z = 0$
   C. $\Pi: 4x + 3y - 2z = 0$
   D. $\Pi: 2x - 4y + z + 2 = 0$
   E. $\Pi: -2x + 3y - z + 7 = 0$

14. **¿Cuál es la ecuación cartesiana asociada a la ecuación vectorial $\langle x, y, z\rangle = \langle 0, 2, 1\rangle + \lambda \langle 0, 3, 2\rangle + \mu \langle 4, 2, 1\rangle$?**
   A. $3y + 2z - 14 = 0$
   B. $x + y + z - 7 = 0$
   C. $4x + 2y + z - 5 = 0$
   D. $x - 8y + 12z + 4 = 0$
   E. $5x + 8y - 12z + 27 = 0$

15. **¿En qué caso el plano y la recta dados no se intersecan?**
   A. $\Pi: x - 5z - 5 = 0$,
   $L: \langle x, y, z\rangle = \lambda \langle 2, 4, 1\rangle$
   B. $\Pi: 2x + 3y - z + 1 = 0$,
   $L: \langle x, y, z\rangle = \lambda \langle 1, -1, -1\rangle$
   C. $\Pi: 4x - 7y = 0$,
   $L: \langle x, y, z\rangle = \langle 3, 4, 1\rangle + \lambda \langle -1, -2, -3\rangle$
   D. $\Pi: 3x + 4y - z - 4 = 0$,
   $L: \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 0, 2\rangle + \lambda \langle 2, 5, 6\rangle$
   E. $\Pi: x = 4$,
   $L: \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 2, 3\rangle + \lambda \langle 2, 0, 0\rangle$

Síntesis

Comprender que puntos, rectas y planos pueden ser representados en el sistema coordenado tridimensional y determinar la representación cartesiana y vectorial de la recta en el espacio.

1. **Determina la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos P y Q, en cada caso.**
   a. $P(0, 1, 0)$ y $Q(2, 3, -1)$
   b. $P(4, 2, 0)$ y $Q(5, 1, 3)$
   c. $P(7, -4, 6)$ y $Q(4, -4, 10)$

2. **Determina las ecuaciones cartesianas de la recta de intersección entre los planos dados, si dicha recta existe.**
   a. $\prod_1: \langle x, y, z\rangle = \lambda \langle -1, 3, 0\rangle + \mu \langle 4, 2, 1\rangle$,
   $\prod_2: \langle x, y, z\rangle = \lambda \langle -1, 3, 0\rangle + \mu \langle 1, 4, 1\rangle$
   b. $\prod_1: \langle x, y, z\rangle = \langle 1, -3, 4\rangle + \lambda \langle 5, 0, 1\rangle + \mu \langle 2, 0, 2\rangle$,
   $\prod_2: \langle x, y, z\rangle = \langle 0, 2, 0\rangle + \lambda \langle 5, 0, 1\rangle + \mu \langle 2, 0, 2\rangle$
   c. $\prod_1: \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 0, 3\rangle + \lambda \langle 3, -1, 0\rangle + \mu \langle -4, 5, -2\rangle$,
   $\prod_2: \langle x, y, z\rangle = \langle 8, -6, 6\rangle + \lambda \langle 3, -1, 0\rangle + \mu \langle 4, -5, 2\rangle$

- ¿Cuál es la diferencia entre el vector posición y el vector director en una ecuación vectorial de la recta? Explica.
- Describe cómo se representa un punto, una recta y un plano en el espacio.
- ¿Cuál es la diferencia entre las ecuaciones que se utilizan para representar la recta en el espacio en forma vectorial y en forma cartesiana?

Deducir la distancia entre dos puntos ubicados en un sistema de coordenadas en tres dimensiones y aplicarla al cálculo del módulo de un vector.

3. **Calcula el módulo de los siguientes vectores.**
   a. $\langle 9, 12, 15\rangle$
   b. $\langle 0, 12, -5\rangle$
   c. $\langle 16, 0, 20\rangle$
   d. $\langle 4, 8, 8\rangle$

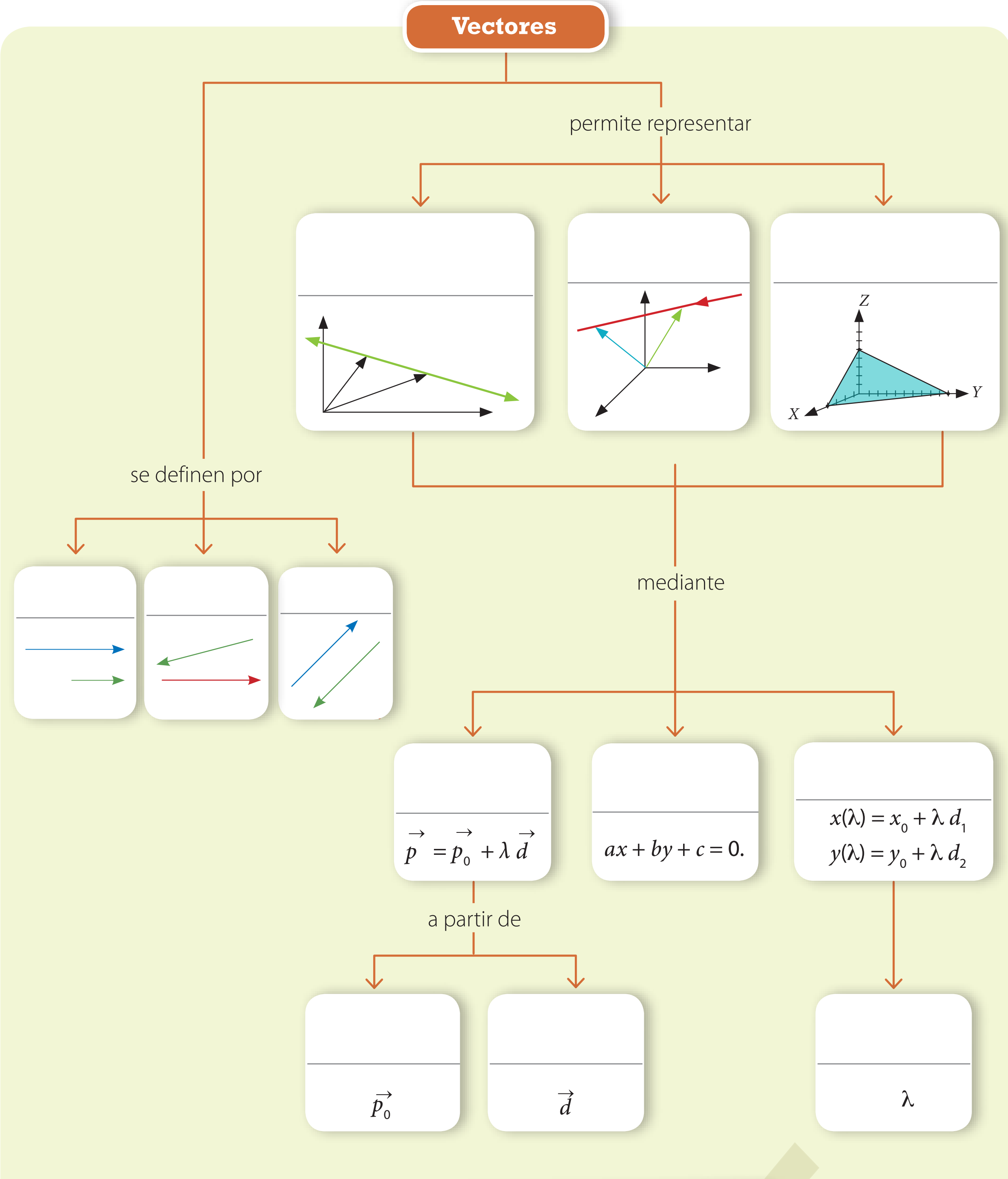
- ¿Cuál es la diferencia entre la expresión para calcular el módulo de un vector, según si el vector está en el plano o si está en el espacio? Explica.

Identificar y describir puntos, rectas y planos en el espacio; deducir la ecuación vectorial de la recta y su relación con la ecuación cartesiana.

4. **Determina las ecuaciones cartesianas de la recta correspondientes a cada ecuación vectorial.**
   a. $L: \langle 0, 3, -1\rangle + \lambda \langle 3, 0, 2\rangle$
   b. $L: \langle 2, -1, 1\rangle + \lambda \langle 0, 6, -8\rangle$
   c. $L: \langle -4, 0, 3\rangle + \lambda \langle 0, 2, 0\rangle$

- ¿Por qué la ecuación vectorial del plano en el espacio tiene dos vectores directores?
- ¿Es posible que una ecuación vectorial no tenga vector posición?, ¿cómo se interpreta esto?
- Describe las posibles posiciones relativas entre una recta y un plano.

5. **Completa el mapa conceptual con los conceptos fundamentales trabajados en la unidad.**



- Compara tu resultado con el de tus compañeros. ¿Hubo diferencias?, ¿cuáles?
- Revisa en el solucionario del Texto los conceptos correctos. ¿Qué otros conceptos agregarías?, ¿en qué lugar del mapa los pondrías?, ¿por qué?

Evaluación final

Aplica lo aprendido en la unidad para desarrollar las siguientes actividades.

1. Determina la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto P y tiene vector director $\vec{d}$, en cada caso. Luego, obtén otros tres puntos de cada recta.

a. $P(3, -2)$ y $\vec{d} = \langle -4, 5 \rangle$

b. $P(-3, 1)$ y $\vec{d} = \langle 0, 2 \rangle$

c. $P(2, -4)$ y $\vec{d} = \langle 5, -1 \rangle$

2. En un sistema coordenado, ubica los siguientes puntos: $A(1, 3, 1)$, $B(-3, 2, 5)$ y $C(0, -4, 2)$.

3. Calcula la distancia entre los siguientes puntos.

a. $P(1, 0, 2)$ y $Q(3, -1, 1)$

b. $P(-1, -1, -1)$ y $Q(-1, -2, -3)$

c. $P(2, 5, 1)$ y $Q(-6, -15, -3)$

d. $P(1, 2, 1)$ y $Q(4, 5, 4)$

e. $P(3, 4, 7)$ y $Q(2, -5, 13)$

f. $P(-4, 1, 10)$ y $Q(5, 3, 12)$

4. Observa las siguientes ecuaciones, ¿cuáles de ellas corresponden a planos y cuáles a rectas?

a. $\langle x, y, z \rangle = \langle 4, 5, 6 \rangle + \lambda \langle 2, 4, 1 \rangle + \mu \langle -1, 1, 0 \rangle$

b. $\langle x, y, z \rangle = \langle -2, 1, -4 \rangle + \lambda \langle 1, -1, 0 \rangle + \mu \langle 6, -3, 0 \rangle$

c. $\langle x, y, z \rangle = \langle 3, 4, 8 \rangle + \lambda \langle 3, 4, 2 \rangle + \mu \langle 5, -5, 0 \rangle$

d. $\langle x, y, z \rangle = \langle 3, -5, -1 \rangle + \lambda \langle 8, 12, 0 \rangle + \mu \langle 4, 6, 0 \rangle$

e. $\langle x, y, z \rangle = \langle 4, 5, -2 \rangle + \lambda \langle 2, 2, 3 \rangle + \mu \langle 0, 1, 5 \rangle$

f. $\langle x, y, z \rangle = \lambda \langle 2, 1, 2 \rangle + \mu \langle 3, 2, -3 \rangle$

5. Dada la ecuación vectorial del plano, determina su ecuación cartesiana, en cada caso.

a. $\Pi: \langle x, y, z \rangle = \langle -1, 2, 5 \rangle + \lambda \langle 0, -2, 1 \rangle + \mu \langle 1, -1, 3 \rangle$

b. $\Pi: \langle x, y, z \rangle = \langle 4, 2, -3 \rangle + \lambda \langle 2, -7, 4 \rangle + \mu \langle 2, 0, -1 \rangle$

c. $\Pi: \langle x, y, z \rangle = \langle 2, 0, -1 \rangle + \lambda \langle 2, -3, 1 \rangle + \mu \langle 0, 1, 3 \rangle$

d. $\Pi: \langle x, y, z \rangle = \langle 0, 3, 0 \rangle + \lambda \langle 0, -2, 0 \rangle + \mu \langle 1, 2, -5 \rangle$

6. Para cada trío de puntos, ¿existe un único plano que los contiene?

a. $P(0, 2, 3)$, $Q(1, 5, 1)$ y $R(0, 4, 0)$

b. $P(-1, 4, 1)$, $Q(3, 2, -1)$ y $R(3, -1, 0)$

c. $P(2, 3, 2)$, $Q(0, 4, 0)$ y $R(2, -1, 2)$

d. $P(1, -4, -5)$, $Q(3, 3, 0)$ y $R(0, 4, -5)$

Marca la opción correcta en los ítems 7 a 15.

7. Dados los vectores $\vec{a} = \langle 3, -5, -1 \rangle$ y $\vec{b} = \langle 1, -2, 4 \rangle$, ¿cuál es el módulo de $\vec{r}$, si $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$?

A. $\sqrt{21}$

B. $\sqrt{35}$

C. $\sqrt{38}$

D. $\sqrt{74}$

E. $\sqrt{21} + \sqrt{35}$

8. Los vértices de un hexágono regular definen los vectores de la figura. ¿Cuál de las siguientes relaciones es incorrecta?

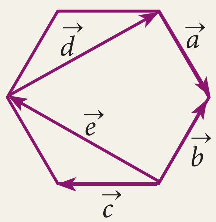
A. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$

B. $\vec{e} + \vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$

C. $\vec{e} - \vec{c} = \vec{a}$

D. $\vec{d} + \vec{a} = -2\vec{c}$

E. $\vec{e} - \vec{d} = 3\vec{c}$



9. Si A es un punto de la recta CD y B es un punto que no pertenece a ella, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

A. A, C y D son colineales.

B. Existe una recta perpendicular a CD que pasa por B.

C. Existe un solo plano que pasa por B y CD.

D. Existe un único plano que contiene CD.

E. Existe un solo plano que pasa por A, B y C.

10. ¿A qué recta pertenecen los puntos $A(-3, 2)$, $B(0, -7)$ y $C(-4, 5)$? Justifica.

A. $L: \langle x, y \rangle = \langle 1 + 2\lambda, -1 + 3\lambda \rangle$

B. $L: \langle x, y \rangle = \langle 2 - \lambda, -1 + 2\lambda \rangle$

C. $L: \langle x, y \rangle = \langle -1 + 2\lambda, 3 - 2\lambda \rangle$

D. $L: \langle x, y \rangle = \langle -2 - \lambda, -3 + 2\lambda \rangle$

E. $L: \langle x, y \rangle = \langle -3 + \lambda, 2 - 3\lambda \rangle$

11. **¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa la misma recta que la ecuación vectorial $\langle x, y\rangle = \langle 1, 1\rangle + \lambda\langle -1, 1\rangle$?**

A. $y - x - 2 = 0$

B. $y + x - 2 = 0$

C. $y + x + 2 = 0$

D. $-y - x - 2 = 0$

E. $-y + x - 2 = 0$

12. **La ecuación cartesiana y la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $A(-2, 1)$ y es paralela a la recta $y = 2x + 3$, son:**

A. L: $y = 2x + 5$; L: $\langle x, y\rangle = \left\langle -\frac{5}{2}, 0\right\rangle + \lambda\left\langle \frac{1}{2}, 1\right\rangle$

B. L: $y = 2x - 1$; L: $\langle x, y\rangle = \langle -5, 0\rangle + \lambda\langle 1, 2\rangle$

C. L: $y = 2x + 5$; L: $\langle x, y\rangle = \langle -5, 0\rangle + \lambda\langle 1, 2\rangle$

D. L: $y = 2x - 1$; L: $\langle x, y\rangle = \left\langle -\frac{5}{2}, 0\right\rangle + \lambda\left\langle \frac{1}{2}, 1\right\rangle$

E. L: $y = 2x + 5$; L: $\langle x, y\rangle = \langle -5, 0\rangle + \lambda\left\langle 1, \frac{1}{2}\right\rangle$

13. **¿Cuál de los siguientes planos contiene al punto (1, 2, –3)?**

A. Π: $2x - y + 2z = 0$

B. Π: $-x + 5y + 3z = 0$

C. Π: $4x - 3y + z = 0$

D. Π: $3x - 3y + 2z - 2 = 0$

E. Π: $2x + y - 3z - 5 = 0$

14. **¿Cuál de los siguientes planos pasa por el punto (1, –1, 2) y es paralelo al plano Π: $4x - 5y + 2 = 0$?**

A. Π: $4x - 5y - 9 = 0$

B. Π: $5x + 4y - 6 = 0$

C. Π: $4x - y - z = 0$

D. Π: $5x - y + 4z - 6 = 0$

E. Π: $4x - 5y - 4 = 0$

15. **¿Cuál de las siguientes ecuaciones es la ecuación cartesiana asociada a la ecuación vectorial $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, -1, 2\rangle + \lambda\langle 4, 2, 1\rangle + \mu\langle 0, -3, -2\rangle$?**

A. $x + y + z - 7 = 0$

B. $-3y - 2z + 14 = 0$

C. $4x + 2y + z - 12 = 0$

D. $x - 8y + 12z - 33 = 0$

E. $5x + 8y - 12z + 27 = 0$

Mis logros

Verifica en el solucionario del Texto si tus respuestas son correctas. Si tuviste respuestas incorrectas, marca en la tabla el objetivo de aprendizaje correspondiente y revisa las páginas indicadas.

Criterio	Ítems	¿Que debo hacer si tengo dudas?
Comprender que puntos, rectas y planos pueden ser representados en el sistema coordenado tridimensional y determinar la representación cartesiana y vectorial de la recta en el espacio.	2, 6, 9, 10, 11 y 12	Revisa las páginas 162 a 168.
Deducir la distancia entre dos puntos ubicados en un sistema de coordenadas en tres dimensiones y aplicarla al cálculo del módulo de un vector.	3, 7 y 8	Revisa las páginas 148 a 159.
Identificar y describir puntos, rectas y planos en el espacio; deducir la ecuación vectorial de la recta y su relación con la ecuación cartesiana.	1, 4, 5, 13, 14 y 15	Revisa las páginas 180 a 199.

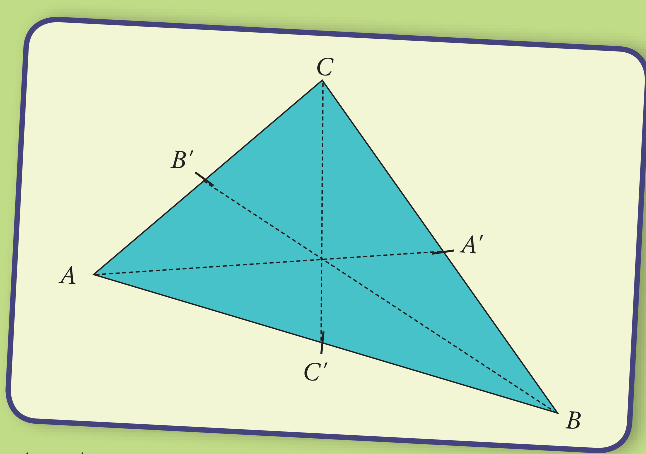
Vuelve a la página 143 y lee lo que se esperaba que aprendieras en esta unidad. ¿Crees que lo aprendiste?, ¿por qué? Si aún tienes dudas, acláralas con tu profesor antes de continuar.

Actividades complementarias

Baricentro de un triángulo

Los vectores también se pueden utilizar para demostrar teoremas de la geometría euclidiana. Uno de ellos se refiere a la posición del baricentro de un triángulo, si se conoce la posición de sus vértices. Recuerda que el baricentro es el punto de intersección de las transversales de gravedad y la transversal de gravedad de un triángulo es el segmento de recta que une un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto.

Dado un triángulo en el plano cartesiano, cuyos vértices son los puntos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$, entonces se cumple que su baricentro tiene coordenadas $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$



Para justificar la afirmación, primero vamos a determinar las transversales de gravedad y luego, calcular cuál es su punto de intersección.

Considera que los puntos medios de los lados del triángulo son:

$A' = (p_1, q_1)$ en el lado BC,

$B' = (p_2, q_2)$ en el lado AC, y

$C' = (p_3, q_3)$ en el lado AB.

Como A' debe estar situado entre B y C a igual distancia de ambos (ya que por definición, es el punto medio), entonces los vectores $(\overrightarrow{BA'})$ y $(\overrightarrow{A'C})$ deben ser iguales.

Ahora, tenemos que $(\overrightarrow{BA'}) = \langle p_1, q_1\rangle - \langle x_2, y_2\rangle$ y $(\overrightarrow{A'C}) = \langle x_3, y_3\rangle - \langle p_1, q_1\rangle$. Entonces:

$$(\overrightarrow{BA'}) = (\overrightarrow{A'C})$$

$$\langle p_1, q_1\rangle - \langle x_2, y_2\rangle = \langle x_3, y_3\rangle - \langle p_1, q_1\rangle$$

$$2\langle p_1, q_1\rangle = \langle x_2, y_2\rangle + \langle x_3, y_3\rangle$$ Aplicando operaciones entre vectores

$$\langle p_1, q_1\rangle = \frac{1}{2}\langle x_2, y_2\rangle + \frac{1}{2}\langle x_3, y_3\rangle$$

$$= \left\langle \frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right\rangle$$

Luego, el punto medio del lado BC es $A' = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$

1. **Demuestra, de manera similar, que $B' = \left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}\right)$ y que $C' = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$**

La transversal de gravedad L_1 es la recta que pasa por A y por A', y su ecuación es:

$$L_1: \langle x, y\rangle = \langle x_1, y_1\rangle + \lambda \left(\left\langle \frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2} \right\rangle - \langle x_1, y_1\rangle\right)$$

ya que podemos considerar $\langle x_1, y_1\rangle$ como vector posición y el vector director tiene como extremos A y A'.

2. **Demuestra que si L_2 es la transversal de gravedad que pasa por B y L_3 es la que pasa por C, entonces**

   a. $L_2: \langle x, y\rangle = \langle x_2, y_2\rangle + \mu \left(\left\langle \frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2} \right\rangle - \langle x_2, y_2\rangle\right)$

   b. $L_3: \langle x, y\rangle = \langle x_3, y_3\rangle + \gamma \left(\left\langle \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right\rangle - \langle x_3, y_3\rangle\right)$

Tomemos un punto D de la recta L_1, el que corresponde al valor de $\lambda = \frac{2}{3}$, y calculemos su valor.

$$\begin{aligned}\langle x_1, y_1\rangle + \frac{2}{3}\left(\left\langle \frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right\rangle - \langle x_1, y_1\rangle\right) &= \left(1 - \frac{2}{3}\right)\langle x_1, y_1\rangle + \left\langle \frac{x_2 + x_3}{3}, \frac{y_2 + y_3}{3}\right\rangle \\ &= \left\langle \frac{x_1}{3}, \frac{y_1}{3}\right\rangle + \left\langle \frac{x_2 + x_3}{3}, \frac{y_2 + y_3}{3}\right\rangle \\ &= \left\langle \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right\rangle\end{aligned}$$

Pero estas son las coordenadas que proponemos para el baricentro, y coinciden con D, por lo que podemos afirmar que el punto $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ pertenece a L_1.

3. **Usa el mismo tipo de argumento para justificar que $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ pertenece a L_2 y también a L_3.**

Como el punto $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ está efectivamente en las rectas L_1, L_2 y L_3, entonces es su punto de intersección. Ya que esas rectas son las transversales de gravedad del triángulo, entonces este punto corresponde a su baricentro.

Hemos demostrado, entonces que el baricentro del triángulo de vértices $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ es el punto $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

4. **Calcula el baricentro del triángulo de vértices $A = (1, 1)$, $B = (3, -2)$ y $C = (5, 7)$.**

5. **Analiza y discute la siguiente afirmación: "El baricentro de un triángulo en el espacio con vértices $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, $C = (x_3, y_3, z_3)$ es $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$".**

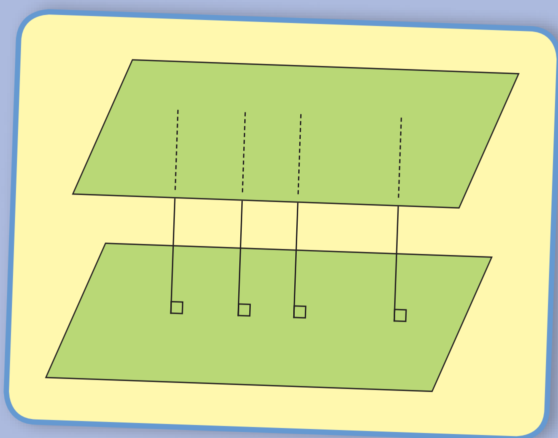
Distancia entre dos planos

1. **Al comienzo de esta unidad aprendiste a calcular la distancia entre dos puntos.**
   a. ¿Qué es para ti la distancia?
   b. ¿Cómo mides la distancia?
   c. ¿Cómo podrías determinar la distancia entre un punto y un plano? ¿o la distancia entre dos planos?

Matemáticamente, se define la distancia entre dos conjuntos de puntos (incluso cuando uno de esos conjuntos es solo un punto) como la menor distancia entre todos los puntos de ambos conjuntos. Así, por ejemplo, decimos que Isla de Pascua se encuentra a 3 790 km de Chile continental, ya que esa es la menor distancia entre todos los puntos de la isla y el continente.

Lo que haremos a continuación será calcular la distancia entre dos planos. Ahora, ten en cuenta que, para que tenga sentido hablar de distancia entre dos planos, nos referimos a planos paralelos ya que si no es así, o bien, los dos planos son en realidad el mismo, o bien, se intersecan, en cuyo caso la distancia entre ellos es igual que cero.

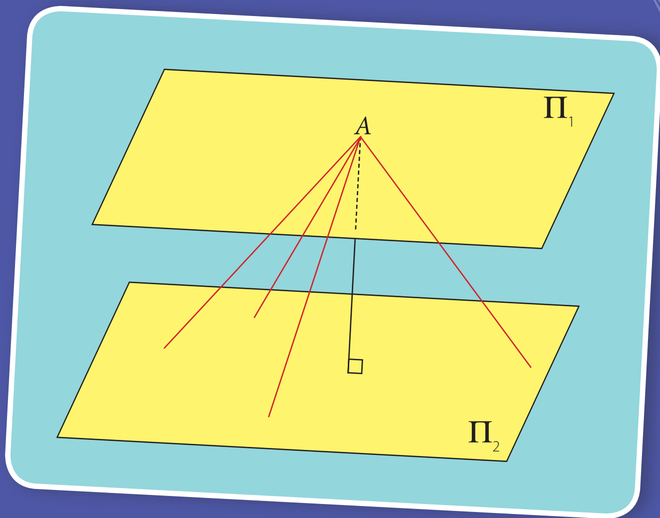
2. **En la siguiente figura, observa que no importa qué punto escojas del primer plano, solo hay que preocuparse de elegir la dirección correcta necesaria para encontrar la distancia más corta entre el punto del primer plano y el segundo plano.**



3. **Considera un plano Π_1 cuya ecuación cartesiana es $2x + 3y - z + 5 = 0$.**
   a. ¿Cuál es el vector normal al plano?
   b. ¿Qué interpretación geométrica tiene el vector normal?
   c. Si tienes dos planos paralelos, ¿cómo se relacionan sus vectores normales?, ¿por qué?
   d. Si $ax + by + cz + 7 = 0$ es el plano Π_2, paralelo al primero, determina los valores de a, b y c.

Entonces, como para calcular la distancia entre dos planos paralelos, basta calcular la distancia de cualquier punto de uno de ellos al otro plano, fijaremos un punto en el plano Π_1, digamos, el punto $A(0, 0, -5)$, por lo tanto vamos a calcular la distancia del punto A a Π_2.

Definido el punto A, para calcular la distancia entre ambos planos, necesitamos encontrar cuál es el punto de Π_2 correspondiente a la distancia más cercana entre ese punto y A. Como puedes ver en la siguiente figura, la distancia más corta de todas las posibles se obtiene en el caso del trazo perpendicular al plano Π_2.



1. **Para encontrar el punto (p_0, p_1, p_2) podemos construir una recta que sea perpendicular a Π_1 (y por lo tanto también a Π_2) y que pase por el punto $A(0, 0, -5)$.**
   a. Encuentra la ecuación paramétrica de la recta L, que tiene por vector director la recta normal al plano Π_1 y que pasa por el punto A.
   b. Luego, determina el punto B de la intersección entre la recta L y el plano Π_2. ¿Para qué valor del parámetro λ se produce esta intersección?
   c. Calcula la distancia entre el punto A y el punto de intersección B. Este valor corresponde, por ende, a la distancia entre los planos Π_1 y Π_2.
   d. Comprueba que el valor de esta distancia no cambia si consideras otro punto del plano, distinto de A. Realiza los mismos cálculos anteriores pero con el punto $(-1, -1, 0)$ (primero verifica que este punto pertenece al plano Π_1).

Unidad

4

Cuerpos geométricos

Latinstock

Antes aprendí a:

- Caracterizar la circunferencia y el círculo como lugares geométricos.
- Calcular la longitud de la circunferencia y el área del círculo. Comprender y resolver problemas relativos a la circunferencia y al círculo.
- Conocer y caracterizar los poliedros, los prismas rectos y las pirámides. Calcular el volumen y el área de prismas rectos y de pirámides con un polígono regular como base.
- Formular y verificar conjeturas acerca del cálculo del volumen y del área del cilindro y del cono. Comprender y resolver problemas relativos al cilindro y al cono.

Para crear piezas de cerámica, algunos alfareros utilizan el torno, que es una máquina consistente en una superficie redonda y plana, llamada platina, unida a un eje que se hace girar a una velocidad que varía entre 30 y 120 revoluciones por minuto (rpm), aproximadamente. Sobre la platina, el alfarero modela con las dos manos mojadas –una en la parte externa y la otra en el interior– una porción de arcilla o greda. Debido a su naturaleza, los trabajos realizados mediante el empleo del torno son casi exclusivamente piezas con simetría radial respecto de un eje vertical.

1. **¿Qué es la simetría radial? Explica.**
2. **¿Cómo se puede estimar el volumen de una vasija como la de la imagen?**
3. **Si supieras la medida de su sección longitudinal, ¿podrías calcular el volumen de la vasija?**

En esta unidad podré:

- Formular y verificar conjeturas respecto de los cuerpos generados a partir de traslaciones o rotaciones de figuras planas.
- Resolver problemas sobre área y volumen de cuerpos geométricos.

Lo utilizaré para:

- Conocer cómo el concepto de esfera se aplica en la fabricación de una pelota.

Para recordar

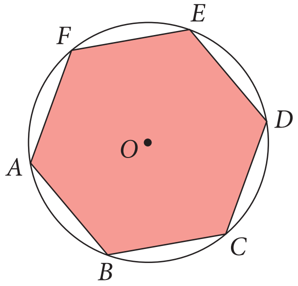
Observa los siguientes cuadros que te permitirán recordar los prerrequisitos para activar tus conocimientos previos y resolver los ejercicios que se proponen en las páginas 220 y 221.

Caracterizar la circunferencia y el círculo como lugares geométricos. Calcular la longitud de la circunferencia y el área del círculo.

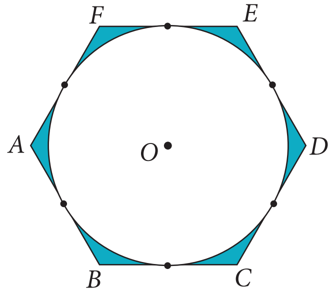
- **Circunferencia**: Es el conjunto de todos los puntos del plano que están a la misma distancia de otro punto, del mismo plano, llamado centro.
- **Círculo**: Es la superficie formada por la circunferencia y todos los puntos en el interior de ella.

Circunferencia   Círculo

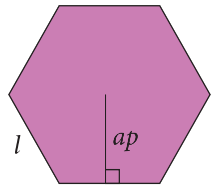
- La longitud de una **circunferencia** de radio r se puede calcular mediante la expresión $P = 2\pi r$.
- El área de un **círculo** de radio r se puede calcular mediante la expresión $A = \pi r^2$.
- Un polígono está **inscrito** en una circunferencia si todos sus vértices pertenecen a ella.



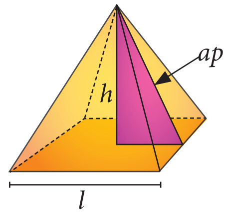
- Un polígono está **circunscrito** a una circunferencia si todos sus lados son tangentes a ella.



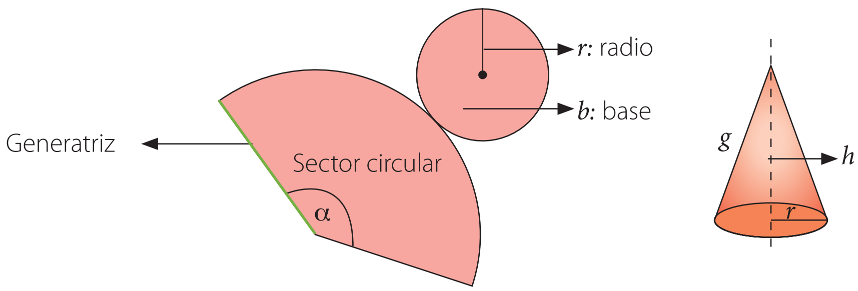
Conocer y caracterizar los poliedros, los prismas rectos y las pirámides.



- Un **polígono** es una figura geométrica plana, limitada por al menos tres segmentos rectos consecutivos no alineados, llamados lados. Cuando sus lados son de igual medida y sus ángulos son congruentes, se dice que es un polígono regular.
- El **apotema** de un polígono regular es la distancia entre el centro del polígono y uno de sus lados.
- Un **poliedro** es un cuerpo geométrico limitado por cuatro o más regiones poligonales no coplanares, que se llaman **caras**, los lados de las caras son las **aristas** y concurren en un punto llamado **vértice**.
- Un **prisma** es un poliedro que tiene dos caras basales paralelas congruentes y sus caras laterales son paralelógramos. Los **prismas rectos** son aquellos en que sus caras basales son perpendiculares a sus caras laterales.



- Una **pirámide** es un cuerpo geométrico que tiene por base un polígono y cuyas caras son triángulos que concurren en un solo punto, llamado cúspide o vértice de la pirámide.
- Por otra parte, el **apotema** de una pirámide regular es la altura de las caras triangulares de la pirámide.
- La **red** de un poliedro u otro cuerpo geométrico es la figura que se obtiene al extenderlo sobre un plano.



Calcular el volumen y el área de prismas rectos y de pirámides con un polígono regular como base.

- El área de un polígono regular se puede calcular mediante la expresión $A = \frac{P \cdot ap}{2}$, donde P es el perímetro del polígono y ap es su apotema.
- El área basal de un prisma o una pirámide corresponde al área del o los polígonos que forman la base.
- Algunas equivalencias en las unidades de medida son:
  - 1 m = 100 cm = 1 000 mm
  - 1 m^2 = 10 000 cm^2 = 1 000 000 mm^2
  - 1 m^3 = 1 000 000 cm^3 = 1 000 000 000 mm^3
- El volumen de un prisma recto se puede calcular multiplicando las medidas de su largo, ancho y altura.

¿Cuánto sé?

Antes de comenzar, resuelve las siguientes actividades, que te permitirán recordar conceptos y procedimientos necesarios para abordar los contenidos de esta unidad.

1. **Completa las siguientes equivalencias.**
   a. 4,51 m = ________ cm
   b. 3 600 000 mm = ________ m
   c. 9 350 cm^2 = ________ mm^2
   d. 8 400 m^2 = ________ cm^2
   e. 0,0079 cm^2 = ________ m^2
   f. 5 000 mm^2 = ________ m^2
   g. 5,606 cm^3 = ________ m^3
   h. 4,0009 m^3 = ________ cm^3

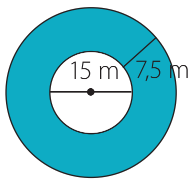
2. **Calcula el área y perímetro de los siguientes polígonos regulares.**
   a. Un pentágono de lado 1 cm y apotema 0,69 cm.
   b. Un hexágono cuyo lado mide 2 cm y su apotema 1,73 cm.
   c. Un octógono cuyo lado mide 2 cm y su apotema 2,41 cm.
   d. Un decágono de lado 4 cm y apotema 6,16 cm.
   e. Un dodecágono cuyo lado mide 6 cm y su apotema 11,2 cm.

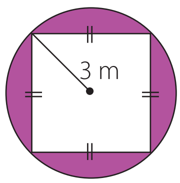
3. **El volumen de un ladrillo es de 1 200 cm^3. Si se construyó una pared con 130 ladrillos de estos, ¿cuál es el volumen de la pared en m^3?**

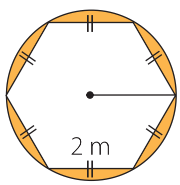
4. **Si una caja tiene un volumen de 5 000 cm^3, ¿cuál es la mayor cantidad de cajas iguales que puede almacenar un contenedor de 60 m^3?**

5. **Un recipiente tiene forma de paralelepípedo de 10 cm de altura y una base cuadrada de 5 cm de lado. Este recipiente contiene agua hasta los 5 cm de altura. Si se coloca una piedra en el interior del recipiente la altura del líquido aumenta en 1,5 cm. ¿Cuál es el volumen de la piedra?**

6. **Para construir seis muros exteriores en una biblioteca se utilizaron bloques de 95 cm de largo, 80 cm de ancho y 1,8 m de altura. Además, cada bloque tiene un costo de $ 50 000 por metro cúbico.**
   a. Calcula el volumen de cada bloque en metros cúbicos.
   b. Si el volumen de uno de los muros es 38 304 dm^3 aproximadamente, ¿cuántos bloques se necesitaron para construirlo?
   c. Determina la cantidad de bloques necesarios para construir los seis muros.
   d. Calcula el costo total de los bloques necesarios para los seis muros.

7. **Calcula el área coloreada de las siguientes figuras, considerando la unidad de medida indicada en cada caso.**
   a.
   

   b.
   

   c.
   

8. **Calcula el área de un cuadrado cuya diagonal mide $4\sqrt{2}$ cm.**

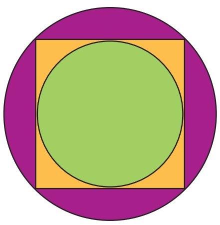
9. **El área de un cuadrado circunscrito a una circunferencia es 144 m^2. Calcula el área del círculo correspondiente.**

10. **Determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justifica tu respuesta.**
    a. Existen prismas que no son poliedros.
    b. Todo cubo es un prisma de base cuadrada.
    c. Si en un prisma todas sus caras son rectángulos, entonces es un prisma rectangular.
    d. Si un prisma tiene cuatro aristas de igual medida, entonces es un cubo.

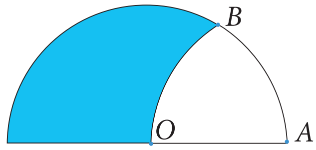
11. **Escribe la expresión para representar el lado de un cuadrado inscrito en una circunferencia, en función de su radio.**

12. **Calcula el área de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 8 cm.**

13. **En la siguiente figura, el cuadrado está inscrito en una circunferencia y circunscrito a otra. Si el lado del cuadrado mide 10 m, calcula la razón entre el área de ambos círculos.**



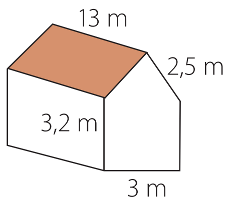
14. **O es el centro de la circunferencia, A es el centro del arco OB. Si OA = 6 cm, calcula el área y el perímetro de la figura sombreada.**



15. **En una circunferencia de 52 cm de diámetro se traza una cuerda a 10 cm de su centro. Calcula el área del cuadrilátero que se forma al unir los extremos de la cuerda con los del diámetro paralelo a ella.**

16. **Las bases de un prisma recto son triángulos rectángulos cuyos catetos miden 12 dm y 5 dm. La altura del prisma es 6 dm. Dibuja su red y calcula el área total.**

17. **Determina cuánto costará la reparación de la siguiente casa, considerando que:**



    a. se deben pintar las cuatro paredes por dentro y fuera, por un costo de $ 3 800 m^2.
    b. se debe reparar el techo, por un costo de $ 6 990 m^2.
    c. se debe colocar cerámica en todo el piso, por un costo de $ 12 000 m^2.

Revisa tus respuestas en el solucionario y marca las correctas.

Criterio	Ítems
Conocer y caracterizar los poliedros, los prismas rectos y las pirámides. Calcular el volumen y el área de prismas rectos y de pirámides que tienen como base un polígono regular.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 16, 17
Caracterizar la circunferencia y el círculo como lugares geométricos. Calcular la longitud de la circunferencia y el área del círculo. Comprender y resolver problemas relativos a la circunferencia y el círculo.	7, 9, 11, 12, 13, 14, 15

Si tuviste errores, revisa las páginas 218 y 219 del Texto, aclara tus dudas y corrígelos antes de continuar.

Cuerpos generados por rotación o traslación

Aprenderé a: identificar cuándo se dice que un cuerpo está generado por rotación o por traslación. Relacionar la figura plana con el cuerpo correspondiente generado por rotación o por traslación. Esbozar el sólido de revolución a partir de la figura plana que lo genera. Reconocer la figura plana a partir del sólido de revolución generado.

Repaso

1. **En términos matemáticos,**
   a. ¿cómo se define la rotación de una figura?
   b. ¿cómo se define la traslación de una figura?

En las siguientes imágenes, podemos ver qué sucede al girar una circunferencia de papel inserta en un lápiz, es decir, qué pasa cuando una circunferencia gira en torno a su diámetro.

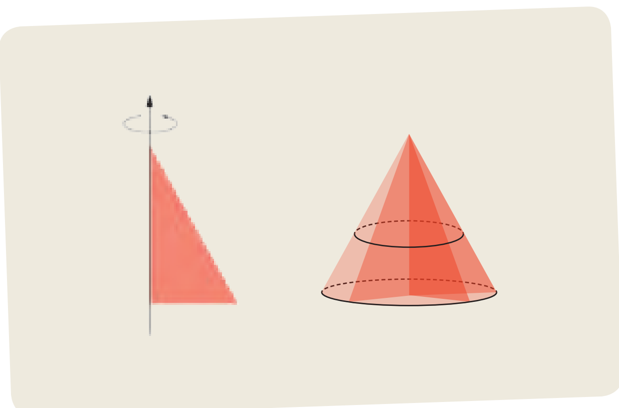
Archivo editorial

- ¿Qué cuerpo geométrico puedes observar que se forma?
- ¿Qué otros cuerpos geométricos se podrían observar de esta forma?, ¿qué figuras se necesitan, en cada caso?

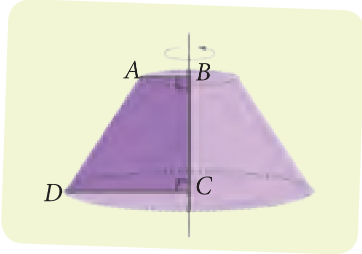
En general, se denominan **cuerpos generados por rotación** o sólidos de revolución aquellos que pueden obtenerse mediante la rotación de una curva alrededor de un eje. A dicha curva se le llama **generatriz**.

En este sentido, la esfera es un cuerpo generado por rotación, su generatriz es la circunferencia y su eje es el diámetro de la circunferencia, ya que, tal como se puede apreciar en las imágenes, al girar una circunferencia en torno a su diámetro, se observa una esfera.

De manera similar, si se gira un rectángulo en torno a uno de sus lados, se puede observar un cilindro, mientras que si se gira un triángulo rectángulo en torno a uno de sus catetos, se puede observar un cono.

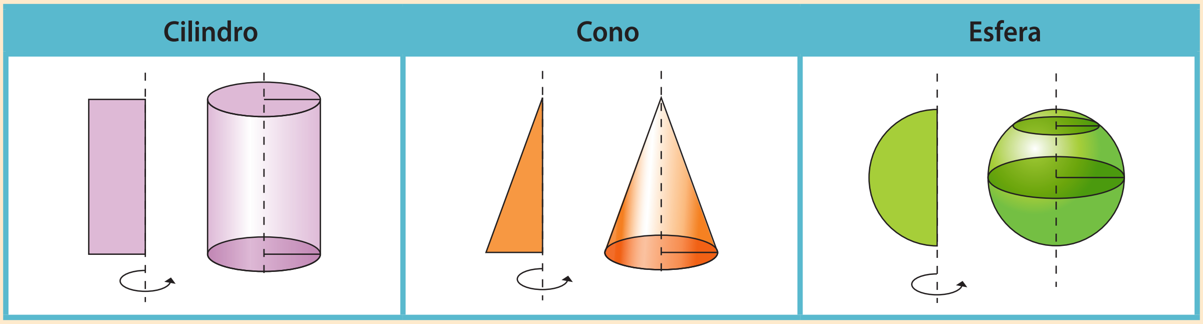


Otro ejemplo de cuerpo generado por rotación es el tronco de un cono o cono truncado. Este se genera mediante la rotación del trapecio rectángulo $ABCD$ cuyo eje corresponde al lado BC, como muestra la figura.



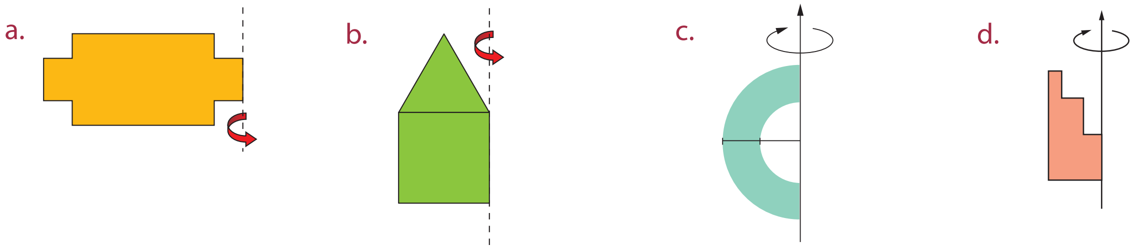
Tomo nota

- Se llama **generatriz** a la línea que al girar en torno a un eje forma el manto o cara lateral de un cuerpo geométrico.
- Se dice que un cuerpo es **generado por rotación** o que es un sólido de revolución si se puede obtener mediante la rotación de una curva o de una figura plana en torno a un eje.
  - **Cilindro**: generado por la rotación de un rectángulo alrededor de uno de sus lados.
  - **Cono**: generado por la rotación de un triángulo rectángulo respecto de uno de sus catetos.
  - **Esfera**: generada por la rotación de un semicírculo alrededor de su diámetro.

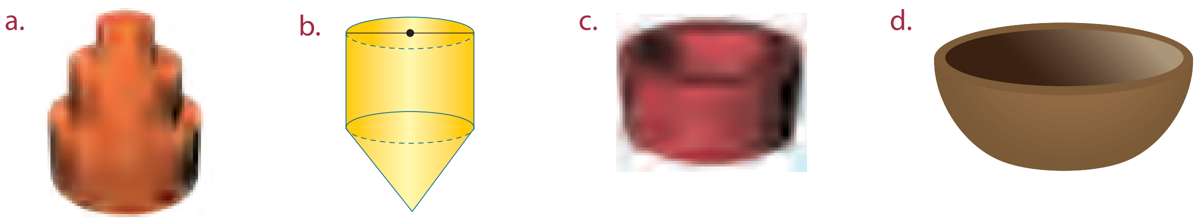


Actividades

1. **Dibuja el cuerpo que se genera al rotar las siguientes figuras alrededor del eje indicado.**



2. **Dibuja las generatrices de los siguientes cuerpos generados por rotación, incluyendo sus ejes.**



3. EN PAREJAS ▶ **De los cuerpos geométricos que conocen, ¿cuáles se pueden generar mediante rotaciones?, ¿por qué?**

Uso Applet

Para observar otros ejemplos de cuerpos generados por rotación, puedes abrir el *applet* que está disponible en la página web http://arquimedes.matem.unam.mx/Vinculos/Secundaria/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/3m_b05_t02_s01_descartes/index.html

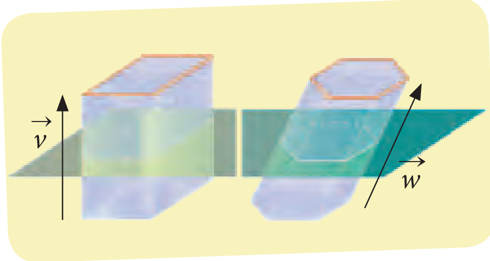
- En la pestaña **Sup. de revolución** podrás observar cómo se generan una esfera, un cono y un cilindro, a partir de sus correspondientes generatrices.
- En la pestaña **Torno** podrás modificar un cilindro y así crear variados cuerpos generados por rotación.
- En el recuadro **Edición** mueve los puntos rojos para modificar la generatriz, lo que inmediatamente transforma el correspondiente cuerpo y las demás vistas que se presentan.
- Puedes cerrar la superficie completamente moviendo hacia el lado derecho el punto rojo que está bajo la palabra **ABRIR**.

Obtendrás una imagen como esta:

Utilizando este *applet*, desarrolla las siguientes actividades.

1. **Modifica los puntos rojos de modo que el cuerpo generado corresponda a un cilindro. Después, mueve los puntos de manera que el radio del cilindro sea aproximadamente el doble del anterior. ¿Qué puedes concluir respecto de sus volúmenes?**
2. **Luego, modifica los puntos para generar un cuerpo cuya generatriz sea un polígono, como el que se observa en la imagen. ¿Cómo se podría calcular el volumen de este cuerpo? Comenta con tus compañeros.**

Al realizar la traslación de un polígono, en cada caso, se puede considerar que se está formando un cuerpo geométrico. Observa, ¿qué cuerpo geométrico se forma?, ¿por qué?



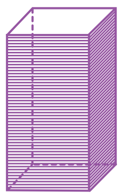
En la imagen, mediante la traslación de un rectángulo se obtiene un paralelepípedo, y mediante la traslación de un hexágono, un prisma de base hexagonal. Observa que para que se genere efectivamente un cuerpo, el vector de traslación no puede ser paralelo al plano que contiene el polígono.

En general, se dice que un cuerpo es **generado por traslación** si se puede formar mediante la traslación de una figura plana, respecto de un vector no nulo y no paralelo al plano de la figura.

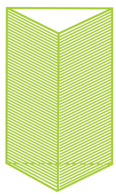
Tomo nota

- Se dice que un cuerpo es generado por traslación si se puede obtener mediante la traslación de una figura plana respecto de un vector no nulo y no paralelo al plano de la figura.

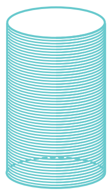
Un paralelepípedo es generado por la traslación de un paralelogramo.



Un prisma es generado por la traslación de un polígono.



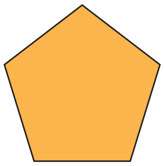
Un cilindro es generado por la traslación de un círculo.



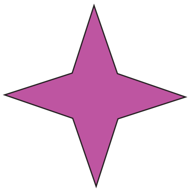
Actividades

1. **De los cuerpos geométricos que conoces, ¿cuáles se pueden generar mediante traslaciones?, ¿qué tipo de traslaciones?**
2. **Supón que un cuadrado tiene uno de sus vértices en el origen, con uno de sus lados sobre el eje X y el otro sobre el eje Y y cuyo lado mide 4 unidades de longitud.**
   a. ¿Qué cuerpo se genera al trasladar este cuadrado por el vector (0, 0, 4)?
   b. ¿Cuál es el volumen de este cuerpo?, ¿por qué?
   c. ¿Cuál es el área total del cuerpo generado? Justifica.
   d. Si el vector de traslación fuera (0, 0, –8), ¿qué cuerpo se generaría y cuál sería su volumen? Explica.
3. **Dibuja el cuerpo que se genera al trasladar las siguientes figuras en dirección perpendicular al plano.**

a.



b.



Antes de continuar

1. ¿Existe algún cuerpo geométrico que pueda describirse como un cuerpo generado por rotación y también como uno generado por traslación?, ¿cuál?

Volumen de un prisma

Aprenderé a: comprender y aplicar el principio de Cavalieri. Calcular el volumen de un prisma, tanto para un prisma recto como oblicuo.

Repaso

1. Calcula el área de un pentágono regular si su lado mide 8 cm y su apotema, 5,5 cm.

Jorge estaba preparando el almuerzo y trozó una berenjena en rodajas y, luego, Gabriel, su nieto, tomó las rodajas e intentó ordenar los trozos como se muestra en la imagen. Observa. ¿La berenjena tiene el mismo volumen que antes de partirla?

Ahora, considera dos cuerpos distintos, por ejemplo, un cubo y un prisma, tales que sus bases tienen igual área y además, igual altura, ¿tienen igual volumen? Justifica.

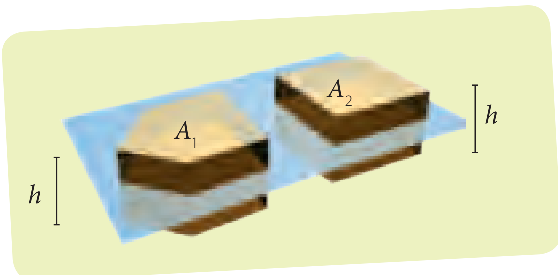
Archivo editorial

Invitado especial

Bonaventura Francesco Cavalieri (Milán, 1598 - Bolonia, 1647)

Matemático italiano. Jesuita y discípulo de Galileo, fue desde 1629 catedrático de Astronomía en Bolonia. De su numerosa obra destaca *Seis ejercicios de geometría* (1649), donde establece y perfecciona su teoría de los indivisibles, precursora del cálculo integral. Realizó la primera demostración rigurosa del teorema de Pappus relativo al volumen de un sólido de revolución.

La idea de cortar un sólido en rodajas puede aplicarse para comparar el volumen de dos o más cuerpos, aunque sean distintos; por ejemplo, supón que un prisma de base pentagonal y un paralelepípedo tienen igual altura. Si sus bases tienen igual área, aunque no tengan la misma forma, entonces también tienen igual volumen. Observa.



Si $A_1 = A_2$, entonces $V_1 = V_2$.

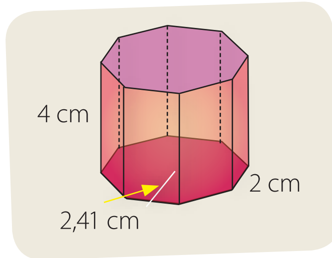
En general, es posible afirmar que si dos cuerpos tienen la misma altura y además tienen igual área en sus secciones planas realizadas a una misma altura, entonces poseen igual volumen. Esto se conoce como el principio de Cavalieri.

Tomo nota

- Principio de Cavalieri: si dos cuerpos tienen la misma altura y bases de igual área, y al cortarlos por cualquier plano paralelo a las bases el área de las secciones es la misma, ambos tienen el mismo volumen.

¿Cómo hacerlo?

Calcula el volumen de prisma de la siguiente figura, si su base es un octógono regular.



Primero, se calcula el área de la base del prisma (A_B). Para esto, se puede dividir por 2 el producto del perímetro de la base (P_B) por la medida del apotema (ap).

$$A_B = \frac{ap \cdot P_B}{2} = \frac{2{,}41 \cdot 16}{2} = 19{,}28$$

Luego, se multiplica el área de la base por la altura, para calcular el volumen (V).

$$V = 19{,}28 \cdot 4 = 77{,}12$$

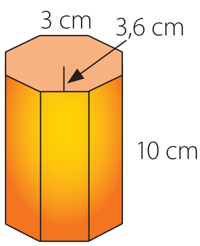
Por lo tanto, el volumen del prisma es 77, 12 cm^3.

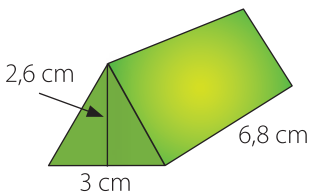
Tomo nota

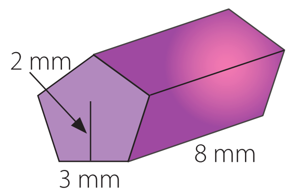
- El volumen de un prisma está dado por la expresión: $V = B \cdot h$, donde B es el área de la base y h la altura del prisma.

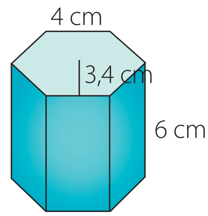
Actividades

1. **Calcula el volumen de los siguientes prismas considerando que sus bases son polígonos regulares.**

a. 

b. 

c. 

d. 

2. **Uno de los primeros computadores electrónicos medía 15 m de largo, 4 m de ancho y 3 m de alto. Actualmente, un *notebook* puede medir 30 cm de largo, 20 cm de ancho y 2 cm de alto. ¿Cuántas veces mayor es el volumen del antiguo computador respecto del *notebook* actual?**

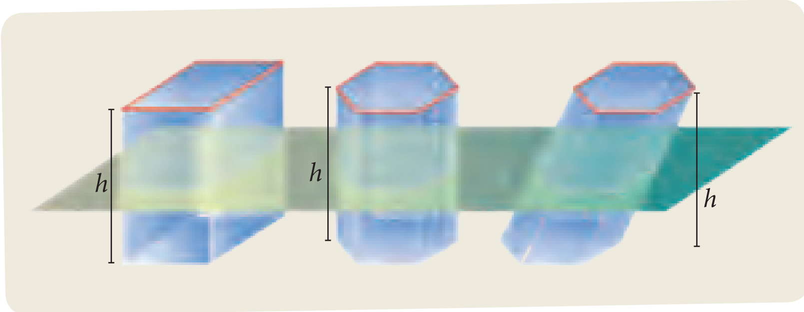
3. **Calcula el volumen de un prisma triangular, de altura 6 cm y por base un triángulo equilátero, cuyo lado mide 10 cm. Explica, paso a paso, cómo lo hiciste.**

4. **Un prisma de base cuadrada, cuyas dimensiones son 9 cm de arista basal y 15 cm de altura, se corta de tal manera que se obtienen dos prismas idénticos de base triangular. ¿Cuál es el volumen de cada uno de los prismas nuevos?**

5. **La base de un prisma es un rombo cuyas diagonales miden 70 cm y 40 cm. Si la altura del prisma es de 1,2 m, ¿cuál es su volumen?**

6. **Las dimensiones de una piscina son 7 m de largo, 4,2 m de ancho y 2,4 m de profundidad.**
   a. Calcula el volumen de la piscina.
   b. Suponiendo que en una ducha se utilizan 105 litros de agua, ¿cuántas duchas podrías darte con el agua que cabe en la piscina?

Considera que los cuerpos de la siguiente imagen tienen igual altura y sus bases tienen la misma área. Observa.



Atención

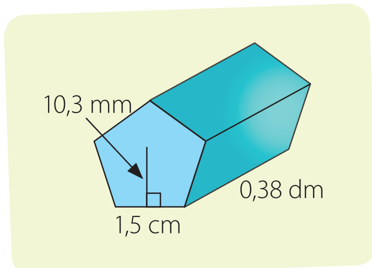
A pesar de que volumen no es lo mismo que capacidad, para calcular la capacidad se suelen utilizar las mismas expresiones que para el volumen.

Como se puede observar, todos estos cuerpos tienen la misma altura y sus bases tienen igual área. Según el principio de Cavalieri, como sus **secciones planas** son iguales, los volúmenes también lo son; por tanto, se puede calcular el volumen de un prisma tal como lo hacemos en el caso del paralelepípedo, esto es, como el producto entre el área de la base y la altura.

Observa que el volumen no cambia si se compara un prisma recto con uno oblicuo; porque, de hecho, no depende de la inclinación del prisma, sino del área de la base y de su altura. Esto también se explica por el principio de Cavalieri.

¿Cómo hacerlo?

Una pieza de acero tiene forma de prisma pentagonal regular como se indica en la figura. Determina cuántos centímetros cúbicos de acero se requieren para elaborar 1 000 piezas iguales.



Primero, se expresan todas las medidas en la misma unidad. Por tanto, se tiene que:

- 10,3 mm equivalen a 1,03 cm;
- 1,5 cm equivalen a 1,5 cm;
- 0,38 dm equivalen a 3,8 cm.

Segundo, se calcula el área de la base del prisma (A_B). Para esto, se divide por 2 el producto del perímetro de la base (P_B) por la medida del apotema (ap).

$$A_B = \frac{ap \cdot P_B}{2} = \frac{1{,}03 \cdot 7{,}5}{2} = 3{,}8625$$

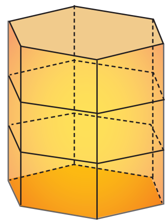
Luego, se multiplica el área de la base por la altura, para calcular el volumen (V).

$$V = 3{,}8625 \cdot 3{,}8 = 14{,}6775$$

Finalmente, se multiplica el volumen por 1 000, de donde se concluye que se necesitan 14 677,5 cm^3 de acero para elaborar las 1 000 piezas.

Actividades

1. **El volumen de un prisma recto de base hexagonal es $120\sqrt{3}$ m³ y su altura mide 5 m. ¿Cuál es la medida de los lados del hexágono?**
2. **El volumen de un prisma de base hexagonal es 340 cm³ y su altura es 12 cm. Si se obtiene, mediante el corte, un plano paralelo a las bases, ¿cuál es el área de la sección transversal?**
3. **Calcula el volumen de los siguientes prismas.**
   a. Un paralelepípedo recto de 6,4 cm y 9,5 cm de base y 16,5 cm de altura.
   b. Un prisma recto, de base hexagonal regular con área basal 28 cm² y altura 10 cm.
   c. Un prisma recto de base octagonal regular, con área basal 12,5 cm² y la arista lateral 16 cm.
4. **El volumen de un prisma de base rectangular es 28 m³. Si su altura mide 5 m, ¿cuál es el área de su base?**
5. EN GRUPO ▶ **Una caja de 20 cm de altura tiene como base un pentágono regular, su lado mide 8 cm y su apotema, 5,5 cm.**
   a. Calcula el volumen de la caja.
   b. Si esta caja se llena de chocolates, logrando ocupar el 90 % del espacio interior, ¿cuál es el volumen ocupado por los chocolates?
   c. Supón que 1 cm³ de estos chocolates tiene una masa de 3,5 g, ¿cuál es la masa total de todos los que están en la caja?
6. **Una fábrica de accesorios diseñó un portalápices utilizando tres prismas hexagonales como se muestra en la figura. Si se sabe que el volumen de los tres prismas es de 960 cm³ y el área de la base de cada prisma es 64 cm², ¿cuál es la altura del portalápices?**



7. **Un prisma tiene una altura de 8 cm y una base cuadrada de lado x cm. Si su volumen es de 288 cm³, ¿cuál es el valor de x?**
8. **Resuelve los siguientes problemas.**
   a. Alejandro debe construir un estanque con forma de prisma rectangular para que contenga 48 m³ de agua. Ha destinado para ello un espacio de 6 m de largo por 2 m de ancho. ¿Qué altura debería tener el estanque?
   b. Un carpintero necesita cortar dados de madera de 3 cm de arista y dispone de una pieza de madera de 12 cm de largo, 9 cm de ancho y 15 cm de alto. ¿Cuántos de esos dados puede obtener como máximo?
   c. Una sala de un hospital mide 8 m de largo, 5 m de ancho y 4 m de alto. Si se le cambia el aire cada 15 minutos, ¿cuántos metros cúbicos de aire se mueven en una hora?
9. **En el caso de un prisma oblicuo, ¿se puede calcular el volumen si se conoce el área de la base y la medida de la arista lateral?, ¿por qué?**

Desafío

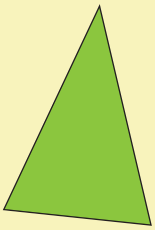
Las aristas de un paralelepípedo recto están en la razón 2 : 3 : 4 y su diagonal principal mide $4\sqrt{29}$ cm. ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo?

Antes de continuar

1. La expresión para calcular el volumen del prisma, ¿es la misma en el caso de que sea un prisma oblicuo?, ¿por qué?

Proyecto de la unidad

En este proyecto trabajarán con una unidad básica de medida que será un triángulo imaginario isósceles con dos lados de 3 centímetros y el tercer lado de 2 centímetros.



Supongamos además que este triángulo tiene volumen, es decir, es un prisma, de ancho 1 centímetro. A pesar de ser un prisma, lo seguiremos llamando triángulo. Esto en realidad es lo que suele ocurrir, si tienes un triángulo de papel en verdad es un prisma cuyo ancho es muy delgado.

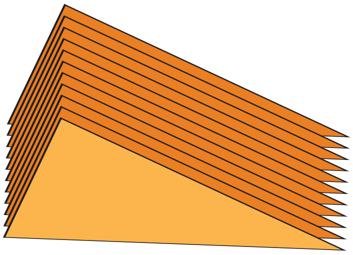
Con lo que has aprendido hasta aquí puedes avanzar en las etapas 1 y 2.

Etapa 1

1. **Determinen el volumen del cuerpo.**
2. **Si nos olvidamos del ancho y lo consideramos una figura plana, ¿cuál es su área?**
3. **¿Qué pueden concluir de los puntos anteriores? ¿En qué casos podrán tener una relación similar?**

Etapa 2

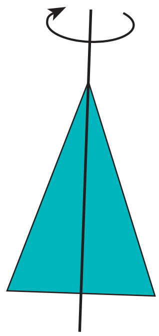
1. **Supongamos que tienen 10 de esos mismos triángulos y los apilan uno junto a otro en la misma dirección.**



   a. ¿Qué cuerpo es el resultante al apilar los triángulos?
   b. ¿Cuáles son las dimensiones de este nuevo cuerpo?
   c. Calculen el volumen de este cuerpo. Expliquen los cálculos.
   d. ¿Qué pasa si multiplican por 10 el volumen de cada triángulo obtenido en la etapa anterior?

Etapa 3

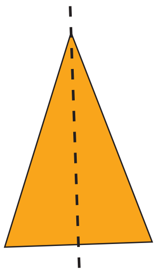
1. **Supongamos que hacen girar muy rápido el prisma en torno a la recta que determina su altura máxima.**



a. ¿Qué cuerpo podrían observar?
b. ¿Cuál es el volumen y el área de ese cuerpo?
c. ¿Qué figura forma la base del triángulo? ¿Cuál es su área?

Etapa 4

1. **Supongamos ahora que cortan el triángulo como muestra la figura.**



a. Dibujen en su cuaderno de qué forma se puede formar un rectángulo, indiquen sus medidas, calculen su perímetro y área.
b. Respondan las mismas preguntas de la etapa 3 pero esta vez considerando el rectángulo obtenido.

Volumen de cilindros

Aprenderé a: aplicar el principio de Cavalieri para calcular el volumen de un cilindro.

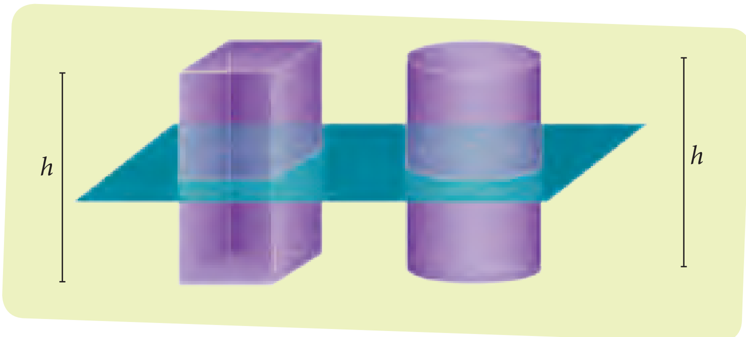
Repaso

1. **Determina el área de cada círculo. Usa $\pi \approx 3{,}14$.**
   a. Radio: 5 cm.
   b. Diámetro: 30 m.

En 1638 el matemático Galileo afirmó: "Si se enrolla una hoja de papel en los dos sentidos posibles, se obtienen dos cilindros distintos".

- ¿Tienen estos cilindros el mismo volumen?
- ¿Cómo se puede calcular el volumen de un cilindro?

Observa la siguiente ilustración.



Como se puede observar en la imagen anterior, los cuerpos tienen igual altura, y si sus secciones planas tienen igual área, se puede aplicar el principio de Cavalieri; por lo tanto, el volumen del cilindro depende de la altura y del área de la base, al igual que en el caso del volumen del prisma, luego se tiene que:

$V_{\text{cilindro}} = h \cdot B$ (B: área de la base; h: altura del cilindro)

$V_{\text{cilindro}} = h \cdot \pi \cdot r^2$

¿Cómo hacerlo?

Calcula el volumen de un cilindro de diámetro basal 4 cm y altura 6 cm.

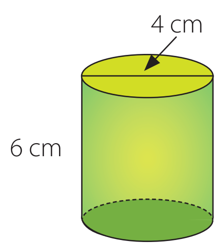
- El radio de la base mide 2 cm, luego, el área basal es:

$A_B = \pi \cdot 2^2 \approx 3{,}14 \cdot 2^2 = 12{,}56$

- Se multiplica el área basal por la altura:

$12{,}56 \cdot 6 = 75{,}36$.

Es decir, el volumen pedido es 75,36 cm^3.

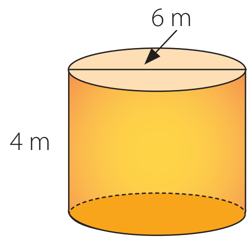


Tomo nota

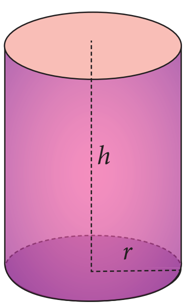
- El volumen de un cilindro se puede calcular mediante la siguiente expresión: $V = h \cdot \pi \cdot r^2$, donde r es el radio del círculo de la base y h es la altura del cilindro.

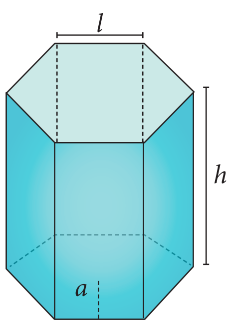
Actividades

1. **Calcula el volumen aproximado de cada cilindro a partir de las medidas dadas.**
   a. Radio: 3 cm, altura: 6 cm
   b. Diámetro: 4 cm, altura: 5 cm
   c. Radio: 7 cm, altura: 10,5 cm
   d. Diámetro: 12 cm, altura: 8 cm
   e. Radio: 6,5 cm, altura: 10 cm
   f. Diámetro: 24 cm, altura: 25 cm
2. **Calcula el volumen del cilindro que se genera al girar un rectángulo de 3,5 cm de ancho y 5,8 cm de alto en torno a su altura.**
3. **Un estanque con forma cilíndrica tiene una altura de 4 m y un diámetro de 6 m. Si solo está lleno hasta 3,5 m de altura, ¿cuántos metros cúbicos faltan para llenar completamente el estanque?**



4. **Resuelve los siguientes problemas.**
   a. La mayoría de las bebidas en lata tienen forma cilíndrica y 350 cm^3 de volumen. ¿Cuál debería ser el diámetro de la base de cada lata si ahora se fabricarán con una altura de 18 cm?
   b. Rosa y Luisa fabrican velas de cera. Rosa usa un molde cilíndrico de 5 cm de radio y 20 cm de altura y Luisa usa un molde con forma de prisma de base cuadrada de 10 cm por lado y 20 cm de altura. ¿Quién usa menos cera para cada vela? ¿Cuánto menos?
   c. Una torta de novios tiene tres pisos, cada uno en forma de cilindro. El primer cilindro tiene 40 cm de diámetro, el segundo, 30 cm y el tercero, 20 cm. Todos tienen una altura de 12 cm. Encuentra el volumen total de la torta. Usa $\pi \approx 3{,}14$.
   d. El cilindro fonográfico fue el primer método utilizado para grabar y reproducir sonidos. Hacia 1890, algunas empresas decidieron estandarizar sus medidas; fue así como se produjeron cilindros fonográficos de 10 cm de altura y 5,7 cm de diámetro. ¿Cuál era el volumen de un cilindro fonográfico?
5. **¿Qué sucede con el volumen de un cilindro si solo su altura se duplica?, ¿y si solo su radio se duplica?**
6. EN PAREJAS ▶ **Propón medidas para el cilindro y el prisma hexagonal recto. Luego, compara sus volúmenes teniendo en cuenta que la altura h de ambos cuerpos geométricos es la misma.**





Antes de continuar

1. Si una hoja de papel tiene dimensiones a cm y b cm, con $a < b$, ¿con cuál de los dos sentidos posibles de enrollar la hoja de papel se obtiene un cilindro de mayor volumen?, ¿por qué?

Volumen de pirámides

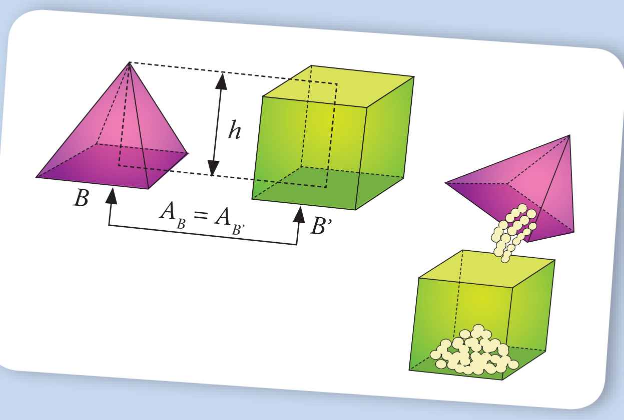
Aprenderé a: calcular el volumen de una pirámide, recta u oblicua. Comprender la argumentación que justifica la relación entre el volumen de la pirámide y el volumen del prisma.

Repaso

1. Calcula el área de un triángulo si su base mide 12,5 cm y su altura, 6 cm.
2. Calcula el área de un hexágono regular si su lado mide 4 cm y el apotema, 3,46 cm.

Esta pirámide y este prisma tienen la misma altura, h, e igual base, B.

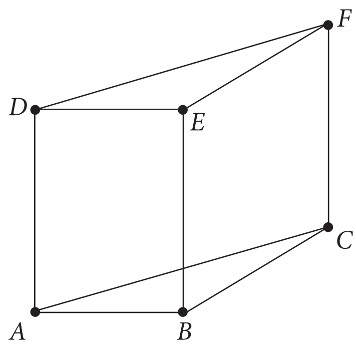
Si llenamos la pirámide con arena fina y luego queremos hacer lo mismo con el prisma ¿cuántas veces el contenido de la pirámide necesitaremos?

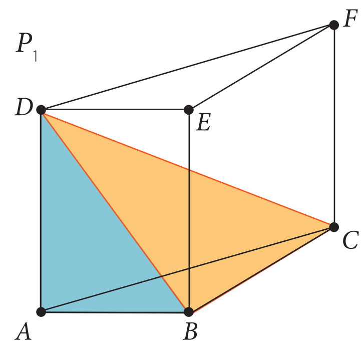


Para determinar el volumen de una pirámide en general, vamos a analizar su relación con el volumen de un prisma que tenga igual altura y cuya base tenga la misma forma y área. Observa.

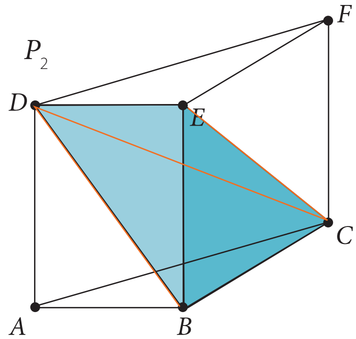
Dado el siguiente prisma de base triangular, de bases ΔABC y ΔDEF, si se realiza un corte desde el vértice D hasta la arista BC, tal como se muestra en la figura, podemos ver que a partir del prisma se puede descomponer la pirámide $P_1(ABDC)$.

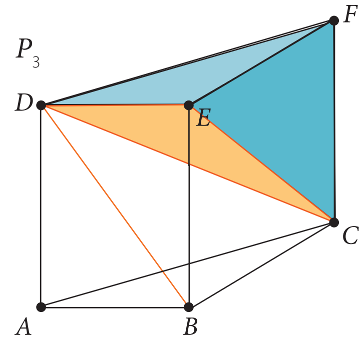
La diagonal del paralelogramo lo divide en dos triángulos congruentes.





Si luego se hace otro corte desde el vértice D, pero ahora hasta la diagonal EC, el resto del prisma se puede descomponer en otras dos pirámides: $P_2(DEBC)$ y $P_3(DEFC)$. Las pirámides P_2 y P_3, ¿tienen el mismo volumen?, ¿por qué?





Nota que los triángulos BCE y FEC son congruentes, ya que EC es la diagonal del rectángulo $BCFE$. Como puedes ver comparando las figuras anteriores, si se consideran como bases los triángulos BCE y FEC, la arista común DE es la altura de las pirámides P_2 y P_3. Luego, por el principio de Cavalieri, P_2 y P_3 tienen igual volumen.

Observa ahora las pirámides P_1 y P_3. En la primera, podemos considerar el triángulo ABC como base y la arista AD como altura. En la segunda, la base puede ser el triángulo DEF y la arista CF. Ahora, por definición del prisma, los triángulos ABC y DEF son congruentes y las aristas AD y CF tienen igual longitud. Por consiguiente, las pirámides P_1 y P_3 tienen igual volumen.

Ahora, en términos de su volumen, $P_1 = P_2$ y $P_1 = P_3$, luego, necesariamente, $P_2 = P_3$. Es decir, el volumen de las tres pirámides es el mismo. Como, por construcción, las tres juntas forman el prisma, podemos afirmar que el volumen de cada pirámide es un tercio del volumen del prisma.

Cabe destacar que esta conclusión es igualmente válida para todo prisma de base triangular, es decir, la argumentación descrita no depende del tipo de triángulo que forma la base, no se supone que este triángulo sea, por ejemplo, equilátero o isósceles.

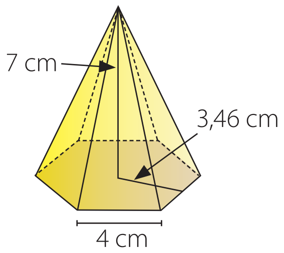
Tomo nota

- El volumen de una pirámide equivale a un tercio del volumen de un prisma de igual área basal e igual altura, es decir:
  $V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot V_{\text{prisma}} = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$ (B: área de la base; h: altura).

Actividades

1. **Calcula el volumen de cada pirámide.**
   a. Base triangular de área 42 cm² y altura de la pirámide 15 cm.
   b. Base en forma de triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 6 cm y 8 cm, y altura 10 cm.
   c. Base en forma de triángulo equilátero de lado 6 m y altura de la pirámide 8 m.
2. **La base de una pirámide es un triángulo equilátero de lado 4 cm y de altura 3,5 cm, y su volumen es 21 cm³. ¿Cuál es la altura de la pirámide?**
3. **El volumen de una pirámide de base triangular es 96 cm³. Si la base tiene 32 cm² de área, ¿cuánto mide su altura?**
4. **Una pequeña pirámide de plata tiene la forma de una pirámide de base triangular y altura 5 cm. A su vez, su área basal es de 12 cm². Si la plata pesa 10,5 g por cm³, ¿cuánto pesa la pirámide?**

Además, ya que todo polígono se puede dividir en dos o más triángulos, una pirámide de base poligonal también se puede descomponer en dos o más pirámides de base triangular. Como hemos visto, el volumen de cada una de estas pirámides es un tercio del volumen del correspondiente prisma triangular; por lo tanto, el volumen de la pirámide de base poligonal es un tercio del volumen del prisma de igual base y altura, sin importar cuál sea el polígono de la base.



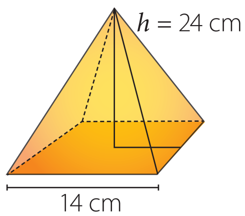
¿Cómo hacerlo?

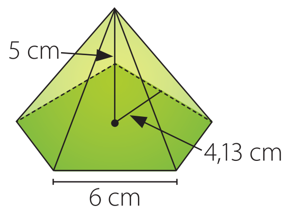
Calcula el volumen de una pirámide de altura 7 cm, que está construida sobre una base hexagonal, cuyo lado mide 4 cm y su apotema 3,46 cm.

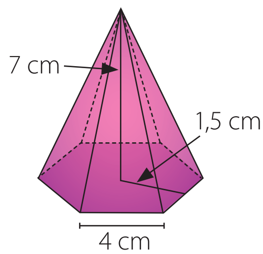
- El hexágono está formado por 6 triángulos de base 4 cm y altura 3,46 cm.
- El área de cada triángulo es: $\left(\frac{4 \cdot 3,46}{2}\right) = 6,92$ y el área total del hexágono basal es: 41,52 cm^2.
- Luego, multiplicamos el área obtenida por la altura: $41,52 \cdot 7 = 290,64$, dividimos este valor por 3 y obtenemos: 96,88 cm^3, que corresponde al volumen de la pirámide.

Actividades

1. **Calcula el volumen de cada una de las siguientes pirámides, si sus bases son polígonos regulares. Considera que las medidas indicadas corresponden a las alturas de la pirámide, y los lados y apotemas del polígono basal, en cada caso.**

a. 

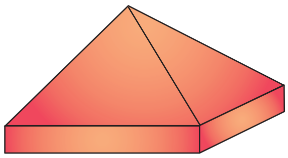
b. 

c. 

2. **Calcula el volumen de cada pirámide.**
   a. Base cuadrada de lado 6 cm y altura 4 cm.
   b. Base hexagonal de área 30 cm^2 y altura de la pirámide 1 m.
   c. Base en forma de pentágono regular de lado 8 cm, apotema de 5,5 cm y altura 10 cm.
3. **La base de una pirámide regular es un hexágono de 15 cm de lado. Su altura es de 30 cm. Si se parte esta pirámide con una lámina paralela a la base, la altura se corta a la mitad. Calcula el volumen de ambas partes.**
4. **Calcula el volumen de una pirámide cuadrada de 6 cm de lado y altura de una cara $\sqrt{73}$ cm.**
5. **Si se inscribe una pirámide dentro de un cubo, de modo que tengan la misma base, ¿cuál es la diferencia entre el volumen de la pirámide y el del cubo?**
6. **Calcula el volumen de una pirámide hexagonal regular si su base tiene 30 cm de lado y 26 cm de apotema y si la altura de la pirámide es 80 cm.**
7. **La pirámide de Keops es reconocida en el mundo entero. Su base corresponde a un cuadrado de lado 240 m y su altura es de 160 m. Calcula cuántos decímetros cúbicos tiene de volumen.**

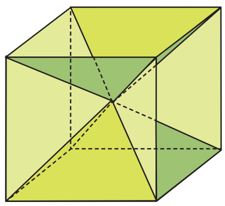
8. **Resuelve los siguientes ejercicios.**
   a. Una pirámide de 25 cm de altura tiene una base hexagonal regular de 6 cm de radio. Calcula su volumen.
   b. El área de la base de un prisma mide 30 dm^2 y su altura 6 dm. Calcula el volumen de una pirámide que tenga la misma base y la misma altura que el prisma.
   c. Una pirámide tiene 16 cm^2 como área de la base y su volumen es de 32 cm^3. Determina su altura.

9. CONEXIÓN CON LA ARQUITECTURA ▶ **La arquitectura japonesa incorpora cuerpos geométricos para buscar soluciones de vivienda. Una de ellas es la casa pirámide negra, que está formada por un prisma recto y una pirámide de base cuadrada. Si el volumen de una casa pirámide negra es de 231,2 m^3, ¿cuál es su altura total considerando las medidas mostradas en la figura?**

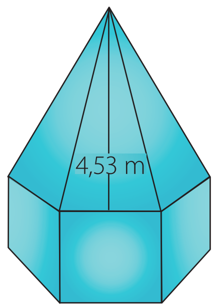


10. **Dos pirámides regulares de base hexagonal tienen la misma base, pero una tiene el doble de altura que la otra. ¿Qué relación hay entre sus volúmenes?**

11. EN PAREJAS ▶ **Uniendo el centro de un cubo de 16 cm de arista con sus ocho vértices se forman seis pirámides. ¿Cuál es el volumen de cada pirámide?**



12. **La cúpula de una iglesia está formada por un prisma hexagonal recto y una pirámide recta, como se muestra en la figura. El apotema de la base del prisma es de 3,4 m y su perímetro es de 24 m. Teniendo que el volumen total de la cúpula es de 122,4 m^3 y el volumen del prisma es de 81,6 m^3, calcula la altura de la pirámide que conforma la cúpula.**



13. **Sea una pirámide cuadrangular regular de 12 cm de altura y 8 cm de arista basal. Para construir otra pirámide con la misma base que la primera y 128 cm^3 más de volumen, ¿cuál debe ser la altura de esta nueva pirámide?**

Desafío

Si tenemos una pirámide cuadrangular regular de 12 cm de altura y 8 cm de arista basal y necesitamos construir otra pirámide con la misma base que la primera y 128 cm^3 más de volumen, ¿cuál debe ser la altura de esta nueva pirámide?

Antes de continuar

1. Si dos pirámides tienen igual altura e igual arista basal, pero cantidad distinta de caras laterales, ¿tienen igual volumen?, ¿por qué?
2. La expresión para calcular el volumen de una pirámide, ¿también se puede utilizar para una pirámide oblicua?, ¿por qué?

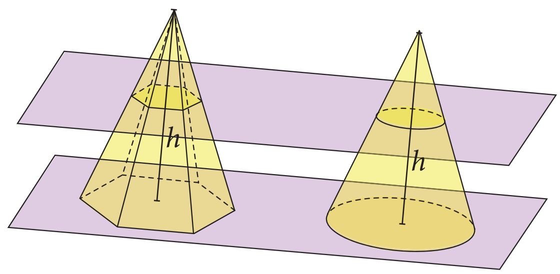
Volumen de conos

Aprenderé a: aplicar el principio de Cavalieri para calcular el volumen de un cono. Determinar y aplicar la expresión para calcular el volumen de un tronco de cono.

Repaso

1. **Describe los elementos de un cono:**
   a. radio basal.
   b. altura.
   c. generatriz.
2. **Determina el área de cada círculo. Usa $\pi \approx 3{,}14$.**
   a. Radio: 3,8 cm.
   b. Diámetro: 14 m.

Así como se puede relacionar el volumen de un prisma con el de un cilindro de igual altura, también podemos relacionar el volumen de una pirámide con el de un cono de igual altura. Observa.



Si las bases de la pirámide y del cono tienen igual área, ¿se puede afirmar que estos cuerpos tienen igual volumen?, ¿por qué?

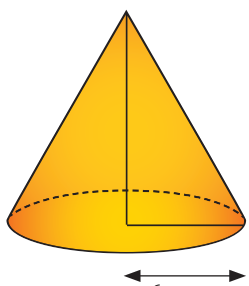
Si conoces el radio de la base y la altura del cono, ¿cómo podrías calcular su volumen? Explica.

La pirámide y el cono de la imagen anterior tienen la misma altura y sus bases tienen igual área. Según el principio de Cavalieri, si sus secciones planas a la misma altura son iguales, los volúmenes también lo son; por tanto, se puede calcular el volumen a partir del volumen de la pirámide.

$$V_{\text{pirámide}} = V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} h \cdot B \qquad (B\text{: área de la base; } h\text{: altura del cono})$$

Del mismo modo que en otros cuerpos geométricos, la expresión para calcular el volumen del cono no cambia si se trata de un cono recto u oblicuo; de hecho, no depende de su inclinación, sino de su altura.

¿Cómo hacerlo?



Calcula el volumen de un cono de radio basal 6 m y altura igual al doble del diámetro basal.

- En este caso, la altura es igual a 24 m, porque es el doble del diámetro, que a su vez es el doble del radio.
- El área basal es: $A_B = \pi \cdot 6^2 \approx 3{,}14 \cdot 6^2 = 113{,}04$. Es decir, el área es 113,04 m^2.
- Luego, multiplicamos el área basal por la altura: $113{,}04 \cdot 24 = 2\,712{,}96$ y al dividirlo por 3, ya que se trata de un cono, obtenemos: 904,32.
- Es decir, el volumen del cono es 904,32 m^3, aproximadamente.

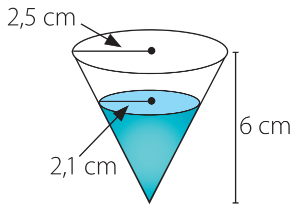
Tomo nota

- El volumen de un cono está dado por la expresión $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$, donde r es el radio de la base del cono y h es su altura.

Actividades

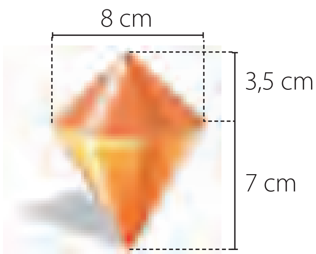
1. **Calcula el volumen aproximado de cada cono a partir de las medidas dadas.**
   a. Radio: 9 cm, altura: 12 cm
   b. Diámetro: 8 cm, altura: 7 cm
   c. Radio: 12 cm, altura: 15 cm
   d. Radio: 16 cm, altura: 10 cm
   e. Generatriz: 26 cm, altura: 24 cm
   f. Generatriz: 15 cm, radio: 9 cm

2. **Un vaso de papel como el de la figura tiene una altura de 6 cm. Si el agua que contiene alcanza una altura de 5 cm, ¿cuántos centímetros cúbicos de líquido faltan para llenarlo?**



3. **La torre de un castillo está formada por un cilindro circular recto de 8 m de diámetro y 16 m de altura, y por un cono de 12 m de altura. Calcula el volumen de la torre.**

4. **Calcula el volumen del trompo que se muestra en la siguiente figura.**



5. **En una planta de salitre almacenan el mineral formando cerros con forma similar a un cono de dimensiones 40 m de radio y 10 m de altura. Si el salitre acumulado debe ser transportado en un camión con capacidad de carga de 300 m^3, ¿cuántos viajes debería realizar el camión?, ¿cómo lo supiste?**

6. CONEXIÓN CON EL DISEÑO ▶ **La cafetera que se muestra en la imagen tiene forma cónica. La medida del contorno de la base es 75,36 cm y la altura es 30 cm. Si se sabe que el volumen de la tapa, que también es de forma cónica, es 47,1 cm^3, ¿cuál es la cantidad de café que puede contener la cafetera cuando está llena?**

Desafío:

En un reloj de arena se identifican dos conos iguales unidos por su vértice. La altura total mide 10 cm y su diámetro, 5 cm.

a. Calcula el volumen máximo de arena que puede haber en el interior de uno de ellos.
b. Sabiendo que cae 0,1 cm^3 de arena por segundo, ¿cuánto tiempo tarda en pasar la arena de un lado al otro?

¿Cómo hacerlo?

En una empresa se fabrican conos de helado. La siguiente tabla muestra los diferentes tamaños de conos que producen. Suponiendo que los conos son rectos, determina el precio de venta de cada uno si cada cm³ se vende a $ 20.

Nombre	Altura (mm)	Diámetro (mm)
Cono mini	88	38
Cono normal	138	45

Primero, se convierten las medidas a centímetros dividiendo cada medida por 10, así:

$88 : 10 = 8{,}8 \qquad 38 : 10 = 3{,}8 \qquad 138 : 10 = 13{,}8 \qquad 45 : 10 = 4{,}5$

Luego, el radio del cono mini es de 1,9 cm y el del cono normal es de 2,25 cm. Por lo tanto, para calcular el volumen de ambos tipos de conos se remplazan las medidas de los radios y de las alturas en la expresión $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

$V_m = \frac{1}{3}\pi \cdot (1{,}9)^2 \cdot 8{,}8 \approx \frac{99{,}8}{3} \approx 33{,}27$ Volumen del cono mini.

$V_n = \frac{1}{3}\pi \cdot (2{,}25)^2 \cdot 13{,}8 \approx \frac{219{,}48}{3} \approx 73{,}16$ Volumen del cono normal.

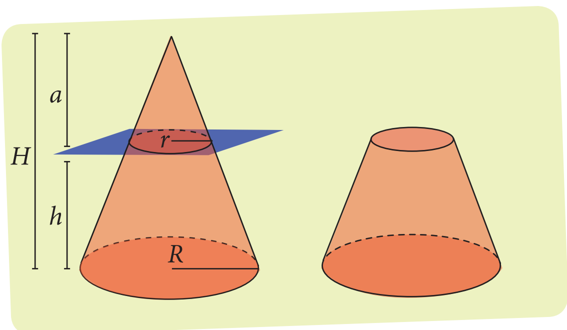
Finalmente, se multiplica el volumen de cada cono por el precio de cada centímetro cúbico.

$33{,}27 \cdot 20 = 665{,}4$ Costo del cono mini.

$73{,}16 \cdot 20 = 1\,463{,}2$ Costo del cono normal.

Por tanto, el precio de venta aproximado del cono normal es $ 1 463 y el del cono mini es $ 665.

En el caso de un cono truncado, el volumen se puede calcular como la diferencia entre el volumen del cono, como si estuviera completo, y el cono menor que lo complementa, es decir:



$$V_{\text{Cono truncado}} = \frac{1}{3}\pi H R^2 - \frac{1}{3}\pi a r^2$$

Utilizando el teorema de Thales, se puede demostrar que el volumen del cono truncado está dado por la expresión:

$$V_{\text{Cono truncado}} = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + R^2 + r \cdot R),$$

donde R y r son los radios de las bases y h es la altura del cono truncado.

Observa que esta expresión depende solo de la altura y del radio de cada base, tal como en el caso de los prismas, pirámides y cilindros, no depende de la inclinación del cono.

¿Cómo hacerlo?

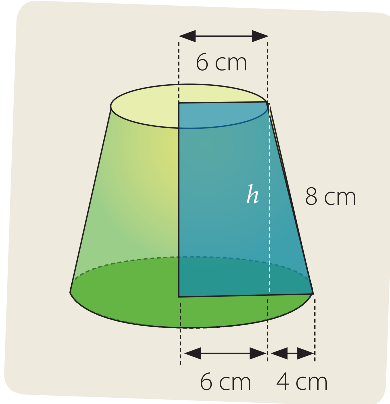
Calcula el volumen de un cono truncado cuyos radios basales miden 10 cm y 6 cm, y cuya generatriz mide 8 cm.

Se puede aplicar el teorema de Pitágoras para obtener la altura del cono truncado. Observa.

$h = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48}$

Luego, remplazamos los valores correspondientes en la expresión del volumen.

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \sqrt{48} \cdot (10^2 + 6^2 + 10 \cdot 6) = \frac{\sqrt{48}}{3} \cdot \pi \cdot 196 \approx 1\,422.$

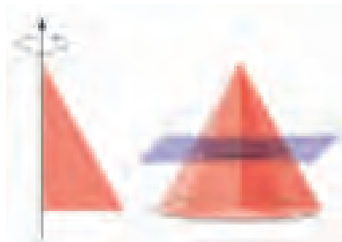


Finalmente, el volumen del cono truncado es 1 422 cm^3, aproximadamente.

Tomo nota

- El volumen de un cono truncado está dado por la expresión $V = \frac{1}{3}\pi\, h(r^2 + R^2 + r \cdot R)$ donde r y R son los radios de las bases y h es su altura.

Actividades



1. **Un cono generado por rotación de 6 cm de radio y 8 cm de altura es cortado por un plano paralelo a la base en el punto medio de su altura. Determina el volumen del tronco de cono resultante.**
2. **Considera el cono truncado generado por la rotación de un trapecio recto cuyas bases miden 11 y 6 cm y cuya generatriz mide 13 cm.**
   a. Calcula la altura del cono truncado.
   b. Calcula el volumen del cono truncado que se genera.
3. **Calcula la cantidad máxima de tierra que la maceta de la figura puede contener.**

4. **Los radios de las circunferencias de las bases de un cono truncado recto miden 5 cm y 3 cm. Calcula su volumen si su altura es de 6 cm.**
5. **Las longitudes de las circunferencias de las bases de un cono truncado recto son de 6π cm y 4π cm. Calcula el volumen del cono truncado si su altura es de 4 cm.**
6. **Las áreas de las bases de un cono truncado recto son paralelas y miden 36π cm^2 y 16π cm^2. Si la generatriz mide $2\sqrt{5}$ cm, ¿cuál es el volumen del cono truncado?**

Proyecto

EN PAREJAS **Realicen la etapa 3 del proyecto de la unidad de las páginas 230 y 231.**

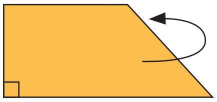
Antes de continuar

1. Si conoces el radio basal y la generatriz de un cono, ¿podrías calcular su volumen?, ¿cómo?

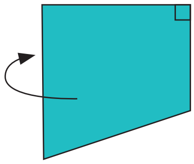
Practico

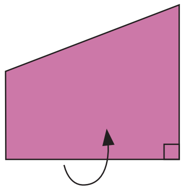
Resuelve las siguientes actividades para consolidar los conceptos y los procedimientos que has aprendido.

1. Dibuja los cuerpos generados por rotación que se obtienen al girar las siguientes figuras alrededor del eje, en cada caso.

a. 

c. 

b. 

d. 

e. ¿Con cuáles de las figuras anteriores se forma un cono truncado al efectuar el giro indicado?

2. Supón que un rectángulo de lados 4 cm y 6 cm gira en torno a su lado menor.

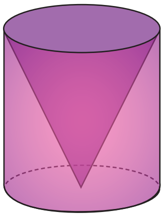
a. Dibuja el cuerpo que se genera.

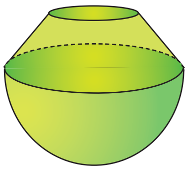
b. Calcula el volumen del cuerpo generado por rotación.

c. Compara el volumen del cuerpo anterior con el que se generaría si la rotación fuera respecto del lado mayor.

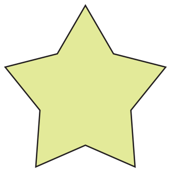
d. ¿Qué condiciones debe satisfacer el rectángulo para que el volumen del cuerpo generado por la rotación en torno a uno de sus lados sea igual al doble del volumen del cuerpo generado por una rotación en torno al otro lado? Justifica.

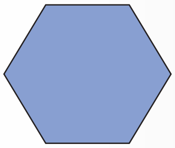
3. Dibuja las generatrices de los siguientes cuerpos generados por rotación, incluyendo sus ejes.

a. 

b. 

4. Dibuja el cuerpo que se genera al trasladar las siguientes figuras en dirección perpendicular al plano.

a. 

b. 

5. Una caja con forma de paralelepípedo tiene 2 cm de ancho, 4 cm de alto y 4 cm de largo.

a. ¿Cuántos cubos de 1 cm de arista caben en la caja cerrada?

b. ¿Cuántos cubos de 2 cm de arista caben en la caja cerrada?

c. Si las dimensiones de la caja se duplican, ¿cuál es el volumen de todos los cubos juntos con los que se puede llenar?

6. Resuelve los siguientes ejercicios.

a. Un cubo cuya arista mide 1 m tiene un volumen de 1 m^3. ¿Cuál es su volumen expresado en cm^3?

b. La base de un prisma es un pentágono de área 90 cm^2 y altura 15 cm. ¿Cuál es el volumen del prisma?

c. ¿Cuántos cubitos de 1 cm de lado caben en un prisma de base cuadrada, si la arista de la base mide 5 cm y la altura mide 10 cm?

d. El volumen de un prisma de base rectangular es 24 m^3. Si el largo de la base es 4 m y su ancho es 3 m, ¿cuál es la altura del prisma?

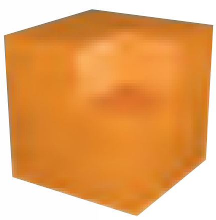
e. Una pequeña piscina tiene una superficie basal de 0,6 m^2. Cuando Emiliano sumerge una pelota, Facundo observa que la altura del agua sube 2 cm. ¿Cuál es el volumen de la pelota?

f. Las medidas de un acuario con forma de prisma de base rectangular son: 80 cm de largo, 60 cm de ancho y 30 cm de alto. ¿En cuánto tiempo se llena de agua, si el caudal de la llave es 5,5 L por minuto?

7. **Un lingote de plata tiene la forma de un prisma recto de base trapezoidal y altura 32 cm. A su vez, los trapecios tienen 5 cm de altura y bases de 7,5 cm y 10 cm. Si la plata pesa 10,5 g por cm^3, ¿cuánto pesa el lingote?**

8. **El volumen de un prisma oblicuo es de 135 cm^3. Si la altura es de 7,5 cm, ¿cuál es el área de la base?**

9. **De un cubo sólido de arista a unidades se extrajo un cubo de arista b unidades, tal como se muestra en la siguiente figura.**

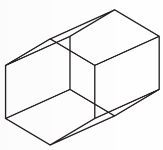


Calcula el volumen del cuerpo resultante, considerando los siguientes datos:

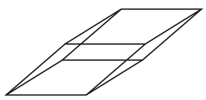
$(a-b)^3 = 27$ $\qquad a^2b = 50$ $\qquad ab^2 = 20$

10. **Calcula el volumen de los siguientes prismas. En ambos casos, la arista de la base mide 3 cm, la altura 4 cm y sus bases son polígonos regulares.**

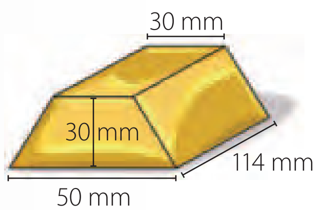
a.



b.



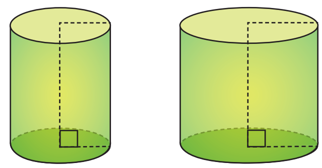
11. **Ciertos lingotes tienen forma de prisma cuya base es un trapecio. Sus medidas son las que se muestran en la figura.**



a. ¿Cuál es el volumen del lingote?

b. Supón que se funde una pieza de 30 kg para hacer lingotes de plata como el de la figura, ¿cuántos lingotes se pueden obtener? (Ten en cuenta que la densidad de la plata es 10,5 g/cm^3).

12. **Estima en qué razón están los volúmenes de dos cilindros de igual altura, si el radio de uno de ellos es el doble de la medida del radio del otro. Explica.**



13. **Utilizando los contenidos aprendidos hasta aquí, responde en tu cuaderno.**

a. ¿Cuándo se dice que un cuerpo es generado por rotación? Justifica.

b. ¿Cuál es la diferencia entre cono y cilindro?

c. ¿Qué características tiene un cono truncado?

d. ¿Cuál es la relación entre los volúmenes de un cono y un cono truncado de igual base, si la altura del cono truncado es la mitad de la altura del cono? Explica.

e. ¿Qué relación hay entre el volumen del cono y el volumen del cilindro, si tienen iguales bases y alturas? Justifica.

14. **Resuelve los siguientes problemas.**

a. Un cubo está inscrito en un cilindro cuya base tiene 8 cm de radio. Calcular el volumen que hay entre el cilindro y el cubo.

b. Un fabricante de conservas necesita decidir qué envase cilíndrico es mejor para su producto. Si un cilindro es el doble de ancho que el otro pero la mitad del alto, ¿cuál de los dos envases tiene mayor capacidad? Explica.

15. **El volumen de una esfera de radio 3 cm es 113 cm^3, aproximadamente. Tres de estas esferas se ponen dentro de un cilindro de diámetro basal 6 cm y altura 18 cm. Usa $\pi \approx 3,14$ y responde.**

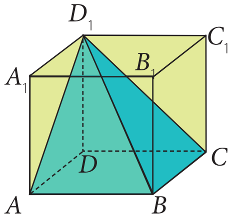
a. Calcula el volumen del cilindro.

b. ¿Cuál es el volumen que queda sin ocupar por las esferas dentro del cilindro?

c. En ese espacio, ¿cabría otra esfera si esta se pudiera derretir?

16. **El área de la base de un prisma mide 30 dm^2 y su altura 6 dm. Calcula el volumen de una pirámide con igual base e igual altura que el prisma.**

17. **Si el sólido de la figura es un cubo de 20 cm de arista, calcula el volumen de la pirámide $ABCDD_1$.**



18. **Una pirámide de 25 cm de altura tiene una base hexagonal regular de 6 cm de lado. Calcula su volumen.**

19. **El volumen de un cubo es 64 cm³. ¿Cuál debe ser la altura de una pirámide de igual base e igual volumen?**

20. **Calcula el volumen de una pirámide hexagonal, sabiendo que el lado de la base mide 8 cm y su altura es cinco veces la longitud del apotema de la base de la pirámide.**

21. **Resuelve los siguientes problemas.**
    a. La base de una pirámide es un cuadrado cuya diagonal mide $15\sqrt{2}$ cm. La altura tiene la misma longitud que la arista de la base. Calcula el volumen de la pirámide.
    b. Juan está haciendo una escultura de cobre, que consiste en un cubo de 50 cm de arista, sobre el cual se soldará una pirámide de base igual a una cara del cubo y altura 20 cm. ¿Cuánto cobre necesita Juan?
    c. Ema guarda su plasticina formando un cubo de 6 cm de arista, y ahora quiere moldear pirámides de base cuadrada, de modo que la arista basal y la altura de cada pirámide midan 3 cm. ¿Cuántas pirámides puede moldear con la plasticina del cubo?
    d. Una pieza de bronce tiene forma de pirámide triangular recta de 25 cm de altura. Las dimensiones de la base son 10 cm, 10 cm y 12 cm. ¿Cuál es la masa de esta pieza si la masa de 1 cm³ de bronce es de 8,75 g?
    e. Se funden tres cubos macizos de aluminio de 12 cm de arista con la finalidad de construir una pirámide cuya base sea un cuadrado de 12 cm de lado. Determina la altura de la pirámide.
    f. Se quiere transportar una pirámide de vidrio, de base cuadrada de lado 18 cm y altura de 25 cm, en una caja de igual base y altura. El espacio entre la caja y la pirámide se llenará de algodón. ¿Qué volumen de algodón se necesita?

22. **¿Cuál es el volumen de una pirámide de base cuadrada de lado 16 cm y apotema lateral 10 cm?**

23. **Determina el volumen de un cuerpo formado por un cubo de 20 cm de arista y dos pirámides de 15 y 30 cm de altura, cuyas bases son dos caras opuestas del cubo.**

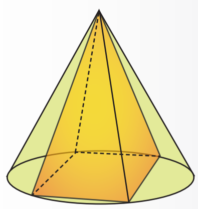
24. **Determina el volumen de un cono de 6 cm de radio y generatriz de $2\sqrt{13}$ cm.**

25. **¿Cuánto mide la generatriz de un cono que tiene radio basal 5 cm y volumen 300π cm³?**

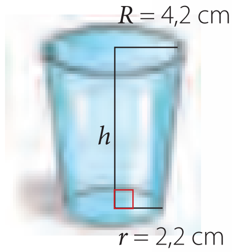
26. **En una amasandería, al cernir harina sobre el mesón se formó un cono de 1,8 m de diámetro y 65 cm de altura. Considera $\pi \approx 3,14$.**
    a. ¿Cuál es el volumen de la harina cernida?
    b. Si 1 m³ puede contener 850 kg de harina, ¿cuántos kilogramos de harina hay en el cono?

27. **Un cono de metal de radio 4 cm y altura 12 cm, se fundió para hacer un cilindro del mismo radio, usando todo el metal. ¿Cuál es la altura del cilindro?**

28. **Una pirámide de base cuadrada de 4 cm de arista basal está inscrita dentro de un cono de 6 cm de altura, tal como se muestra en la figura. Calcula el volumen del cono.**



29. **Un vaso tiene forma decono truncado, como se muestra en la figura. Si su capacidad es de 0,47 L, ¿cuál es su altura?**



Marca la opción correcta en los ítems 30 a 38.

30. A un cubo de 6 cm de arista se le cortó, desde un vértice, un cubito, de modo que el volumen del cuerpo resultante es de 189 cm³. ¿Cuánto mide la arista del cubito?

A. 1 cm
B. 3 cm
C. 6 cm
D. 9 cm
E. 27 cm

31. Si la medida de cada una de las aristas de un cubo aumenta en un 20 %, ¿en cuánto aumenta su volumen?

A. 10 %
B. 21 %
C. 30 %
D. 60 %
E. 72,8 %

32. La razón entre los volúmenes de los cubos A y B es 27 : 8. El volumen del cubo B es 64 cm³. ¿Cuánto mide la arista del cubo A?

A. 6 cm
B. 8 cm
C. 72 cm
D. 216 cm
E. 243 cm

33. ¿Cuál es el volumen aproximado de un cono si el diámetro basal mide 18 cm y su altura 25 cm?

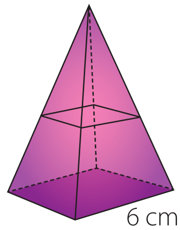
A. 236 cm³
B. 471 cm³
C. 1 413 cm³
D. 2 120 cm³
E. 8 478 cm³

34. ¿Cuál es el volumen aproximado de un cilindro de radio 3 cm y altura 7 cm? Usa $\pi \approx 3{,}14$.

A. 66 cm³
B. 126 cm³
C. 147 cm³
D. 198 cm³
E. 252 cm³

35. El volumen de la pirámide de base cuadrada es 96 cm³. ¿Cuál es el volumen de la pirámide superior si su altura es la mitad de la pirámide mayor?

A. 96 cm³
B. 64 cm³
C. 48 cm³
D. 36 cm³
E. 12 cm³

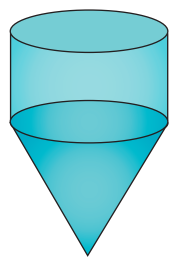


36. Un estanque de base cuadrada de 20 cm de arista basal tiene agua. Si se agregan 4,2 L, el agua llega a una altura de 12 cm en el estanque. ¿Cuánta agua había antes?

A. 350 mL
B. 600 mL
C. 1 200 mL
D. 3 800 mL
E. 4 800 mL

37. ¿Cuál es el volumen de esta figura, compuesta por un cilindro y un cono, ambos de 20 cm de diámetro y de 10 cm de altura? Usa $\pi \approx 3$.

A. 2 000 cm³
B. 3 000 cm³
C. 4 000 cm³
D. 8 000 cm³
E. 16 000 cm³



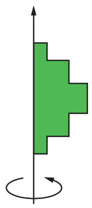
38. Si el radio basal de un cilindro mide a y su altura mide el doble del radio basal, ¿cuál es su volumen?

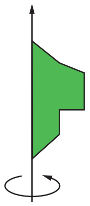
A. πa^3
B. $2\pi a^3$
C. $4\pi a^3$
D. $8\pi a^3$
E. $16\pi a^3$

Evaluación de proceso

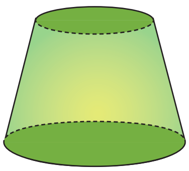
Aplica lo aprendido hasta este momento en la unidad y desarrolla las siguientes actividades.

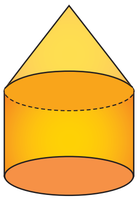
1. Dibuja los cuerpos generados por rotación que se obtienen al girar las siguientes figuras alrededor del eje, en cada caso.

a. 

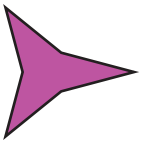
b. 

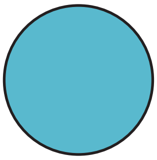
2. Dibuja las generatrices de los siguientes cuerpos generados por rotación, incluyendo sus ejes.

a. 

b. 

3. Dibuja el cuerpo que se genera al trasladar las siguientes figuras en dirección perpendicular al plano.

a. 

b. 

4. Determina si las expresiones siguientes son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

a. El volumen de un cilindro es el doble del volumen de un cono de igual base e igual altura.

b. El volumen de un prisma es el triple del volumen de una pirámide de igual base e igual altura.

c. El principio de Cavalieri se puede aplicar a dos cuerpos geométricos cualesquiera.

5. Resuelve los siguientes problemas.

a. ¿Cuántos vasos cilíndricos de 12 cm de alto y diámetro interno de 6 cm se pueden llenar con 3,5 litros de agua? Usa $\pi \approx 3{,}14$.

b. Un pisapapeles, hecho de bronce, tiene forma de pirámide de base cuadrada, de 5 cm de lado, y su altura es 6 cm. Si cada centímetro cúbico de bronce tiene 8,9 g de masa, ¿cuál es la masa del pisapapeles?

c. Dos prismas hexagonales tienen la misma base. Si la razón entre sus alturas es 2 : 3, ¿cuál es la razón entre sus volúmenes?

d. Una columna de concreto tiene forma de prisma hexagonal regular. El lado de la base mide 15 cm. La altura de la columna es de 2,95 m. Calcula su peso sabiendo que 1 m^3 de concreto pesa 2 900 kg.

e. Dos pirámides A y B tienen base cuadrada. Las medidas de la base y la altura de la pirámide B son el doble de las correspondientes medidas de la pirámide A. ¿Cuál es la relación entre el volumen de la pirámide B y el de la pirámide A?

f. Un florero tiene forma de prisma recto de 10 cm de altura y una base cuadrada de 5 cm de lado. Este florero contiene agua hasta los 5 cm de altura. Si se colocan algunas piedras en el interior del florero la altura del líquido, aumenta en 1,5 cm. ¿Cuál es el volumen de las piedras?

g. Un cilindro de metal de 40 cm de diámetro y 10 cm de altura se funde para hacer un cono del mismo diámetro basal. ¿Cuál será la altura del cono?

h. Una torta de cumpleaños tiene dos pisos, cada uno en forma de cilindro. El primer cilindro tiene 25 cm de diámetro y el segundo, 18 cm. Ambos tienen una altura de 10 cm. Calcula el volumen total de la torta. Usa $\pi \approx 3{,}14$.

Marca la opción correcta en los ítems 6 a 14.

6. Se tienen 8 cubitos de 3 cm de arista. ¿Cuántos cubitos más se necesitan para formar un cubo de 9 cm de arista?

A. 8
B. 12
C. 18
D. 19
E. 27

7. ¿Qué largo debe tener un estanque con forma de prisma de base rectangular, cuyas dimensiones son 3 m de ancho y 1,5 m de alto, para que pueda contener 45 000 L?

A. 1 m
B. 10 m
C. 100 m
D. 1 000 m
E. 10 000 m

8. ¿Cuál es el volumen de una pirámide de base cuadrada de 12 cm de arista basal y 7 cm de altura?

A. 222 cm^3
B. 228 cm^3
C. 336 cm^3
D. 344 cm^3
E. 1 008 cm^3

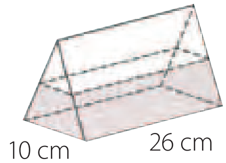
9. ¿Cuál es el volumen de un cono truncado, si sus medidas son $r = 6$ cm; $R = 10$ cm; $h = 4,8$ cm? Usa $\pi \approx 3,14$.

A. 900 cm^3
B. 908,5 cm^3
C. 984,7 cm^3
D. 890 cm^3
E. 1 728 cm^3

10. ¿Cuánto mide el radio basal de un cilindro, si su volumen es 80π cm^3 y su altura es 5 cm?

A. 4 cm
B. 8 cm
C. 12 cm
D. 16 cm
E. 20 cm

11. Se construye un molde para elaborar barras de metal. Para ello, a un prisma recto de base triangular se le quita la parte que se indica en la figura. ¿Cuál es el volumen del molde?



A. 100,62 m^3
B. 1 000 m^3
C. 1 050,2 m^3
D. 1 062,75 m^3
E. No se puede determinar.

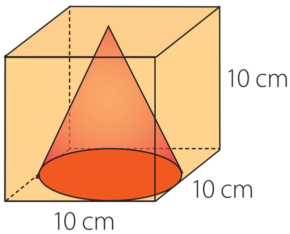
12. La altura de un cono mide 12 cm. Para que su volumen sea 300π cm^3, su radio basal debe medir:

A. $\frac{3}{5}$ cm
B. $\frac{5}{3}$ cm
C. 3 cm
D. 5 cm
E. Ninguna de las anteriores.

13. Una pirámide cuya base es un cuadrado de lado $2a$ unidades tiene el mismo volumen que un prisma cuya base es un cuadrado de lado a. ¿En qué razón están las alturas de la pirámide y del prisma?

A. 1 : 4
B. 3 : 4
C. 4 : 3
D. a : 3
E. 3 : 2

14. ¿Cuál es el volumen comprendido entre el cubo y el cono de la figura, aproximadamente?



A. 738 cm^3
B. 821 cm^3
C. 785 cm^3
D. 684 cm^3
E. 261 cm^3

Mi progreso

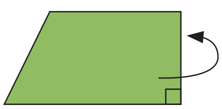
Verifica en el solucionario del Texto si tus respuestas son correctas. Si tienes respuestas incorrectas, marca en la tabla el criterio correspondiente y realiza las actividades de refuerzo indicadas.

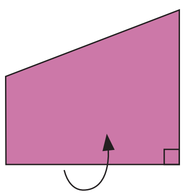
Criterio	Ítems	¿Qué debo hacer?
Formular y verificar conjeturas respecto de los cuerpos generados a partir de traslaciones o rotaciones de figuras planas.	1, 2 y 3	Si tuviste menos de 4 ítems correctos, realiza las actividades 1, 2 y 3.
Resolver problemas sobre volumen de prismas.	4, 5c, 5d, 5f, 6, 7 y 11	Si tuviste menos de 4 ítems correctos, realiza las actividades 5, 6a, 6b, 6c y 6d.
Resolver problemas sobre volumen de cilindros.	5a, 5g, 5h y 10	Si tuviste menos de 2 ítems correctos, realiza las actividades 8, 9, 13 y 15.
Resolver problemas sobre volumen de pirámides.	5b, 5e, 8 y 13	Si tuviste menos de 2 ítems correctos, realiza las actividades 6e, 6f, 7, 12, 14 y 16a.
Resolver problemas sobre volumen de conos.	9, 12 y 14	Si tuviste menos de 2 ítems correctos, realiza las actividades 10, 11, 16b, 16c y 16d.

Para reforzar

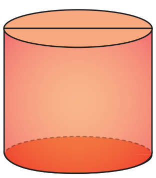
Según los resultados obtenidos en la evaluación de proceso, resuelve las actividades correspondientes para reforzar los contenidos en los que tuviste dificultades.

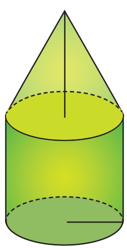
1. **Dibuja los cuerpos generados por rotación que se obtienen al girar las siguientes figuras alrededor del eje, en cada caso.**

   a. 

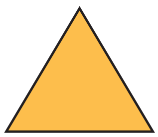
   b. 

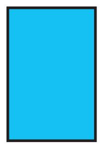
2. **Dibuja las generatrices de los siguientes cuerpos generados por rotación, incluyendo sus ejes.**

   a. 

   b. 

3. **Dibuja el cuerpo que se genera al trasladar las siguientes figuras en dirección perpendicular al plano.**

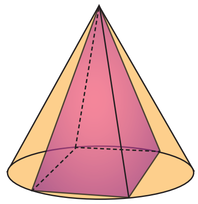
   a. 

   b. 

4. **Calcula el volumen del cilindro que se genera al girar, en torno a su ancho, un rectángulo de 3,6 cm de ancho y 6,4 cm de alto.**

5. **Calcula el volumen de los siguientes prismas.**
   a. Un prisma recto de base cuadrada, de 4,8 cm de arista basal y 20,5 cm de altura.
   b. Un prisma recto, de base hexagonal regular con área basal 34 cm^2 y altura 9 cm.
   c. La altura del prisma mide 12 cm y su base es un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 12 cm y 18 cm.

6. **Resuelve los siguientes ejercicios.**
   a. Las dimensiones de un prisma de base rectangular son 3 m, 6 m y 5 m. ¿Cuál es su volumen?
   b. La base de un prisma es un triángulo rectángulo, de catetos 5 cm y 12 cm y la altura del prisma es la mitad de la hipotenusa del triángulo basal. ¿Cuál es su volumen?
   c. ¿Cuál es el volumen de un prisma de altura 5 cm y cuya base es un hexágono de lado 4 cm y apotema aproximado de 3,5 cm?
   d. El volumen de un prisma de base rectangular es 28 m^3. Si su altura mide 4 m, ¿cuál es el área de su base?
   e. Una pirámide tiene una base cuadrada cuya arista mide 12 cm y su altura es 8 cm, ¿cuál es su volumen?
   f. Una pirámide de base cuadrada tiene un volumen de 120 cm^3. Si su altura mide 10 cm, ¿cuánto mide la arista basal?
7. **Calcula el volumen de una pirámide recta de base cuadrada si su altura mide 12 cm y la apotema mide 13 cm.**
8. **Calcula el volumen de un cilindro inscrito en un prisma recto de base cuadrada de lado 5 cm y altura 12 cm.**
9. **Se desea construir un tubo juntando láminas de acero rectangulares de 30 cm de largo y 22 cm de ancho por sus lados opuestos. ¿Cómo se consigue obtener mayor volumen, juntando los lados de 30 cm o los de 22 cm?**
10. **¿Cuál es el radio de la base de un cono recto si su volumen es 108π cm^3 y su altura 9 cm?**
11. **Si en un cono reducimos a la mitad el radio y mantenemos la altura,**
    a. ¿el volumen se reduce a la mitad?, ¿por qué?
    b. Y si se mantiene la misma base y se reduce la altura a la mitad, ¿qué sucede con el volumen? Explica.
12. **Calcula la altura aproximada de una pirámide de volumen 10 000 cm^3, cuya base es un triángulo equilátero de 100 cm de lado.**
13. **¿Cuál es el volumen de un cilindro si el diámetro de su base es 5 cm y su altura 9 cm? Usa $\pi \approx 3,14$.**
14. **Demuestra que el volumen de cualquier pirámide es un tercio del producto entre el área de la base y su altura.**
15. **Calcula el volumen de un tubo cilíndrico de altura 12 cm y cuyos radios interior y exterior son de 4 cm y 6 cm respectivamente.**
16. **Resuelve los siguientes problemas.**
    a. Un cubo metálico de arista 6 cm se funde y con todo el material se construye una pirámide de base cuadrada de 9 cm. ¿Cuál es la altura de la pirámide?
    b. Se quiere transportar un cono de vidrio, de radio 12 cm y altura de 20 cm, en una caja de igual base y altura. El espacio entre la caja y el cono se llenará de bolitas de *plumavit*. ¿Qué volumen de *plumavit* se necesita?
    c. Un cilindro de metal de 40 cm de diámetro y 10 cm de altura se funde para hacer un cono del mismo diámetro basal. ¿Cuál será la altura del cono?
    d. ¿Cuántos vasos de papel cónicos de 9 cm de alto y diámetro de 7 cm se pueden llenar con 1,5 litros de agua? Usa $\pi \approx 3,14$.
17. **Una pirámide de base cuadrada de 8 cm de altura está inscrita dentro de un cono de 3 cm de radio, tal como se muestra en la figura.**



    a. ¿Cuál es la medida de la arista basal de la pirámide?
    b. Calcula el volumen del cono.
    c. ¿Cuál es el volumen del espacio comprendido entre el cono y la pirámide?

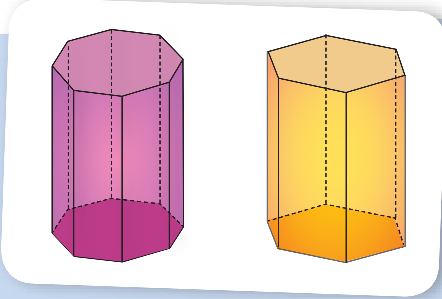
Área de prismas y de pirámides

Aprenderé a: identificar las caras basales y laterales de un prisma. Calcular el área de un prisma recto. Identificar la cara basal y las caras laterales de una pirámide. Calcular el área de una pirámide recta.

Repaso

1. **Un octógono regular tiene 96 cm de perímetro. Si la apotema mide 14,5 cm, ¿cuál es el área del octágono?**

- ¿Cuántos polígonos conforman la red del prisma, en cada caso?, ¿cuáles polígonos son, en cada caso? Explica.
- ¿Qué medidas necesitas conocer para calcular el área de un prisma?, ¿cómo lo calcularías?



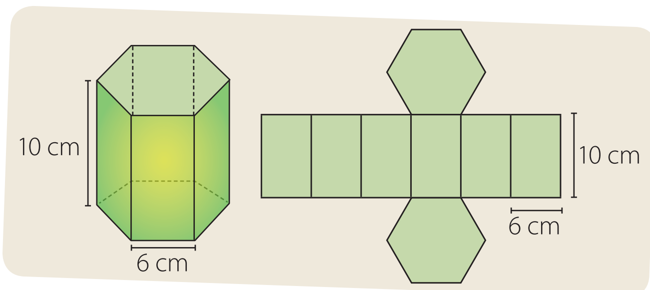
En general, el área total de un cuerpo geométrico equivale a la suma de las áreas de cada una de sus caras, tanto de la o las bases como de sus caras laterales.

En el caso de los prismas, el área total del prisma se desglosa en dos partes: el área basal, que corresponde al área de ambas bases y el área lateral, que es la suma del área de todas las caras laterales.

Si las bases del prisma son polígonos regulares, todas las caras laterales son rectángulos iguales y el número de caras laterales depende de la cantidad de lados que tenga el polígono.

¿Cómo hacerlo?

Calcula el área total del siguiente prisma recto regular de base hexagonal.



Primero, se calcula el área lateral del prisma multiplicando el perímetro de una de las bases(P_B) por la medida de la altura (h).

$$A_L = P_B \cdot h$$
$$= 36 \cdot 10$$
$$= 360$$

Segundo, se calcula el área de la base multiplicando el perímetro por la apotema y dividiendo entre dos.

$$A_B = \frac{P_B \cdot ap}{2} = \frac{36 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 54\sqrt{3}$$

Luego, se halla el área total sumando el área lateral y el área de las bases.

$$A_T = A_L + 2A_B = 360 + 108\sqrt{3} \approx 547 \text{ cm}$$

Atención

Es común asignar al concepto de superficie y área el mismo significado; sin embargo, debemos diferenciar ambos términos.
La superficie es una extensión en que solo se consideran dos dimensiones. El área es la medida de la superficie.

¿Cómo hacerlo?

Un prisma tiene por base un triángulo equilátero cuyo lado mide 7,44 cm, y la altura del prisma mide 10 cm. ¿Cuál es el área total del prisma?

La superficie total se calcula sumando las áreas de todas las caras del prisma.

- Primero calculamos el área del triángulo equilátero: $\left(\frac{7{,}44}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3} \approx 24$ cm^2.
- Luego calculamos el área de una de las caras rectangulares: $7{,}44 \cdot 10 = 74{,}4$ cm^2.
- Como son 2 caras triangulares y 3 caras rectangulares, tenemos:
  $2 \cdot 24 + 3 \cdot 74{,}4 = 271{,}2$

La superficie total del prisma mide 271,2 cm^2.

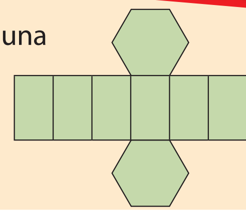
Atención

El número de caras laterales de un prisma o de una pirámide depende siempre del número de lados de la base.

Las caras laterales son siempre paralelogramos, en el caso de los prismas, y triángulos, en el caso de las pirámides.

Tomo nota

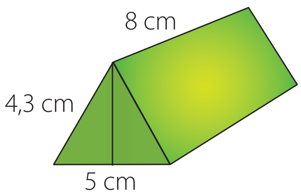
- El área total de un cuerpo geométrico equivale a la suma de las áreas de cada una de sus caras, tanto de la o las bases como de sus caras laterales.
- El área de un prisma es $A = A_L + 2 \cdot A_B$,
  donde A: área total; A_L: área lateral; A_B: área basal.



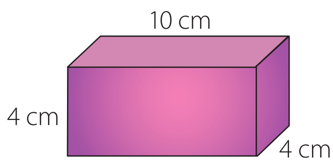
Actividades

1. **Calcula el área de los siguientes prismas. Explica, paso a paso, cómo lo hiciste.**

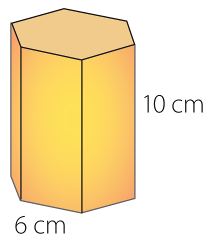
a.



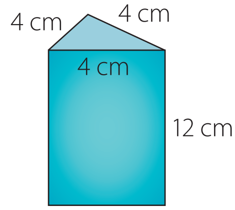
b.



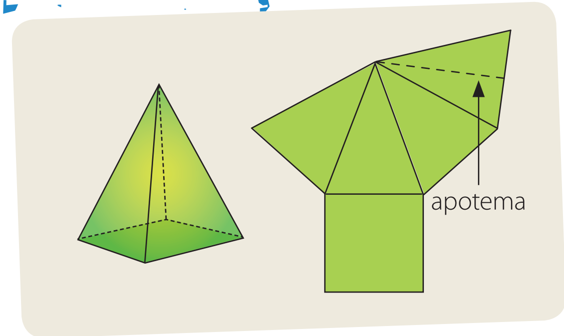
c.



d.



2. **El área total de un prisma recto es igual a la de un cubo. Si las medidas de las aristas que concurren a un vértice del prisma son 3, 5 y 7 cm, respectivamente, ¿cuánto mide la diagonal del cubo?**
3. **Calcula el área de un prisma recto de 6,4 cm y 9,5 cm de base y 16,5 cm de altura.**
4. **Calcula el área de un prisma regular, de base hexagonal con arista 8 cm, y altura 10 cm.**
5. **¿Qué cantidad de cartón se utilizará para hacer una caja con forma de paralelepípedo recto de dimensiones 1,2 m de largo, 1,4 m de ancho y 2 m de fondo?, ¿cómo lo supiste?**
6. **Calcula el área total de un prisma recto de base hexagonal regular, cuya arista basal mide 4 cm y la arista lateral 16 cm.**
7. **En un envase con forma de prisma de base cuadrada, la altura es el doble de la medida del lado de la base y el área total es 250 m^2. Calcula las dimensiones del envase.**
8. **Se quiere cubrir con cerámicas cuadradas de 100 cm^2 de área la superficie lateral de un pedestal. El pedestal tiene forma de prisma pentagonal regular de 150 cm de altura y 80 cm de arista basal. ¿Cuántas cerámicas se necesitarán?**



En el caso de las pirámides, el área total de la pirámide se desglosa en dos partes: el área basal, que ahora es el área de la única base y el área lateral, que es la suma del área de todas las caras laterales.

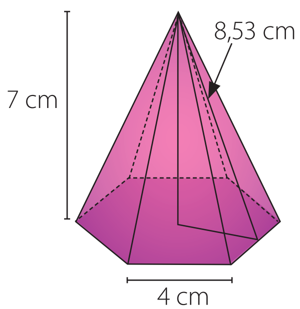
El área de una cara lateral se puede calcular usando la arista basal y el apotema.

Si la base de la pirámide es un polígono regular, todas las caras laterales son triángulos iguales y el número de caras laterales depende de la cantidad de lados que tenga el polígono.

Tomo nota

- **El área de una pirámide es $A = A_L + A_B$, donde A: área total; A_L: área lateral; A_B: área basal.**

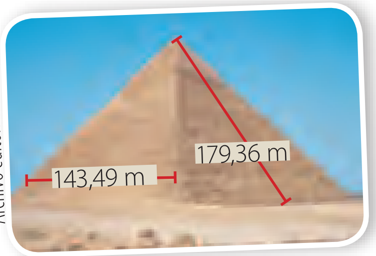
¿Cómo hacerlo?



Calcula el área total de una pirámide de altura 7 cm, construida sobre una base hexagonal, cuyo lado mide 4 cm y su área 41,52 cm^2. Considera que la altura de cada cara lateral es 8,53 cm.

- Cada cara es un triángulo isósceles de base 4 cm y altura 8,53 cm. Luego, el área de cada cara sería: $\left(\frac{4 \cdot 8{,}53}{2}\right) = 17{,}06$ cm^2.
- Multiplicamos por 6 para obtener el área de todas las caras laterales, de este modo obtenemos: 102,36 cm^2.
- Una vez que sumamos el área del hexágono, obtenemos que el área total es 143,88 cm^2.

¿Cómo hacerlo?



Archivo editorial

La pirámide de Kefrén o la Gran Pirámide es una pirámide de base cuadrada ubicada en El Cairo (Egipto), que data del siglo XXVI a. C. Según las medidas que aparecen en la fotografía, ¿cuál es el área lateral de la pirámide de Kefrén?

Primero, se calcula el área A de cada cara lateral. Como cada cara lateral es un triángulo, entonces, su área es igual a la mitad del producto de la medida de la arista de la base por la altura de la cara.

Luego, se tiene que $A = \frac{1}{2}(179{,}36 \cdot 143{,}49) \approx 12\,868{,}18$

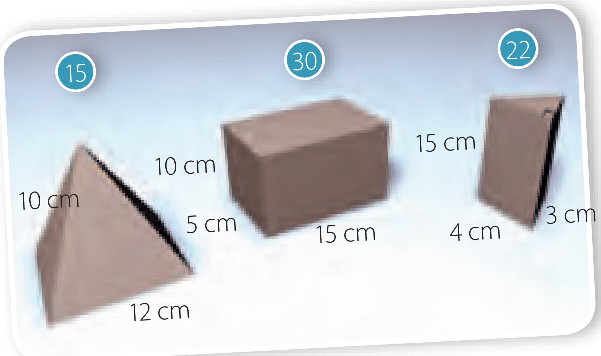
Finalmente, se multiplica por 4, que es el número de lados de la base, para hallar el área lateral.

$A_L = 4 \cdot 12\,868{,}18 = 51\,472{,}72$

Por tanto, el área lateral de la pirámide de Kefrén es aproximadamente 51 472,72 m^2.

Actividades

1. **Determina el área total de una pirámide de base hexagonal si su arista lateral mide 13 cm y su altura, 12 cm.**
2. **En una pirámide de base cuadrada, el área de la base es de 256 cm^2 y el área lateral, 320 cm^2. Determina la altura de la pirámide.**
3. **El techo de una casa tiene forma de pirámide cuya base es un cuadrado de 12 m de lado y 8 m de altura. ¿Cuántos metros cuadrados de tejas se necesitan para cubrir todo el techo?**
4. **Una carpa de circo es una pirámide cuya base es un decágono regular. Su altura es 20 m y cada arista lateral mide 25 m. Si la distancia del centro de la base a cada arista basal es 14,27 m:**
   a. ¿Cuál es el perímetro de la base?
   b. ¿Cuántos metros de lona fueron utilizados en la carpa?
5. **Dibuja la red correspondiente a una pirámide triangular recta con aristas laterales de 6 cm y con base un triángulo equilátero de 4 cm de lado. Calcula su área total.**
6. **Los siguientes son juguetes de madera que serán pintados del mismo color. Sobre cada uno se indica cuántos se van a fabricar. Calcula la cantidad de pintura necesaria para tal labor, considerando que un litro de pintura rinde aproximadamente 3 m^2.**



7. **La base de un ortoedro es un rectángulo de lados 9 cm y 12 cm. La diagonal del ortoedro mide 17 cm. Calcula la medida del lado desconocido y el área total de la figura.**
8. **Una pirámide regular tiene por base un pentágono regular de 2,5 m de lado. Si la apotema de la pirámide mide 4,2 m, ¿cuál es su superficie lateral?**
9. **Calcula el área de un prisma recto cuya base es un rombo de diagonales 12 cm y 20 cm, si su arista lateral mide 24 cm.**
10. **Se requiere construir un cajón para embalar cuyas medidas son 0,3 m, 0,7 m y 0,5 m. ¿Cuál es el precio a pagar por los materiales si la madera cuesta $ 4 980 cada m^2?**

Desafío

Todas las aristas de una pirámide de base cuadrada tienen la misma medida y esas medidas suman 120 cm. Calcula el área total de la pirámide.

Antes de continuar

1. Dados un prisma y una pirámide de igual altura y cuyas bases tengan forma similar, con igual área, ¿se cumple que el área total del prisma es siempre el doble que el área total de la pirámide?, ¿por qué?

Área de cilindros y conos

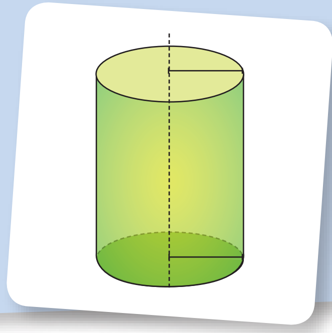
Aprenderé a: identificar las caras basales y el manto de un cilindro. Calcular el área de un cilindro. Identificar la cara basal y el manto de un cono. Calcular el área de un cono. Calcular el área de un tronco de cono.

Repaso

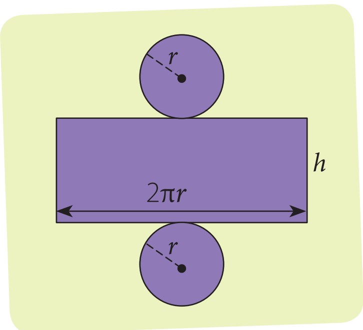
1. **Calcula la longitud de la circunferencia en cada caso. Usa $\pi \approx 3{,}14$.**
   a. Radio: 6 cm.
   b. Diámetro: 20 cm.

Observa el cilindro.

- ¿Qué figuras conforman la red de un cilindro?
- Si se conoce solo la longitud de la generatriz y del radio de la base, ¿se puede calcular el área del cilindro? Explica.



En la siguiente imagen, que representa la red de un cilindro, se puede observar que la superficie lateral del cilindro está formada por un rectángulo, mientras que sus bases corresponden a círculos.



Observa que el ancho del rectángulo corresponde a la altura del cilindro, y su largo, al perímetro de la base.

Luego, el área del cilindro está determinada por:

$$\begin{aligned} A_{\text{cilindro}} &= 2 \cdot A_{\text{círculo}} + A_{\text{rectángulo}} \\ &= 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h \\ &= 2\pi r \cdot (r + h) \end{aligned}$$

Donde h es la generatriz o altura del cilindro, y r, el radio del círculo de la base.

¿Cómo hacerlo?

La torre Westhafen construida en la ciudad de Fráncfort (Alemania) tiene forma cilíndrica y cuenta con 31 pisos, cada uno con aproximadamente 3,5 m de altura. Si la longitud de la circunferencia de la base mide 119,32 m, determina el área de su superficie exterior.

Primero, se determina la altura total de la torre. Para esto, se multiplica el número total de pisos por la altura de cada uno. Así, la altura total es:

$31 \cdot 3{,}5 = 108{,}5$ m

Segundo, se halla el radio de la base despejando r en la expresión de la longitud de la circunferencia. $r = \dfrac{c}{2\pi}$ de donde $r = \dfrac{119{,}32}{2\pi} \approx 19$ m.

Luego, se calcula el área lateral A_L y el área de la base superior A_B remplazando los valores de r y h. Así: $A_L = 2\pi \cdot 19 \cdot 108{,}5 \approx 12\,952{,}79$ y $A_B = 19^2\pi \approx 1\,134{,}11$.

Finalmente, el área de la superficie exterior de la torre es:

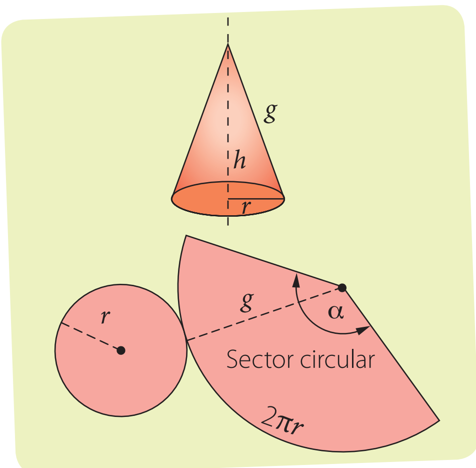
$12\,952{,}79 + 1\,134{,}11 = 14\,086{,}9$ m^2

Tomo nota

- El área de un cilindro se determina de la siguiente forma: $A_{\text{cilindro}} = 2 \cdot \pi \cdot r\,(r + h)$

Actividades

1. **Calcula el área lateral y el área total de cada cilindro, a partir del radio r y de la altura h.**
   a. $r = 3$ cm; $h = 8$ cm
   b. $r = 5$ cm; $h = 10$ cm
   c. $r = 0{,}4$ m; $h = 0{,}75$ m
   d. $r = 2$ m; $h = 0{,}5$ m
   e. $r = 80$ cm; $h = 2{,}2$ m
   f. $r = 0{,}2$ m; $h = 70$ cm
2. **¿En qué razón están las áreas de dos cilindros rectos de igual altura, si el radio de uno es el doble del otro?**
3. **¿Qué cantidad de aluminio se necesita para fabricar un tarro con un diámetro de 10 cm y altura 30 cm?**
4. **Resuelve los siguientes problemas. Aproxima π a 3,14.**
   a. Se necesita poner etiquetas en la cara curva de tarros de conserva de 8 cm de diámetro y 15 cm de altura. Se debe disponer de 2 cm de largo extra para poder pegar cada etiqueta. ¿Cuántos cm² de papel se necesitan para cada etiqueta?
   b. ¿Cuántos litros de pintura se necesitan para pintar por fuera todas las caras de un estanque cilíndrico de 10 m de diámetro y 15 m de altura, si cada litro de pintura cubre 4,5 m²?
5. EN PAREJAS ▶ **En la municipalidad se revisaron los planos para construir un depósito de agua con forma cilíndrica, y se decidió que debía tener el doble del volumen considerado originalmente. Luego, se ordenó al constructor que duplicara su diámetro, sin cambiar la altura original. ¿Qué opinan acerca de esta decisión?, ¿cómo se modifica el área del depósito?**



Por otra parte, la red de un cono está formada por un círculo (base) y por un sector circular. El arco del sector circular tiene longitud $2 \cdot \pi \cdot r$ (porque corresponde a la longitud de la circunferencia de la base). Por consiguiente, el área lateral de un cono es igual al área del sector circular.

$$A_{SC} = \frac{S \cdot r}{2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot g}{2} = \pi \cdot r \cdot g$$

El área de la base corresponde al área de un círculo, es decir, $\pi \cdot r^2$, entonces, el área total de un cono se puede calcular mediante la siguiente expresión:

$$A_{\text{cono}} = A_{\text{sector circular}} + A_{\text{círculo}} = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2 = \pi \cdot r\,(g + r)$$

Tomo nota

- El área de un cono está dada por la expresión: $A_{\text{cono}} = \pi \cdot r(r + g)$

El área de un cono truncado corresponde a la suma de las áreas de las bases del cono truncado y el área lateral.

El área lateral se puede calcular como la diferencia entre el área lateral del cono, si estuviera completo, y la del cono menor que lo complementa, es decir:

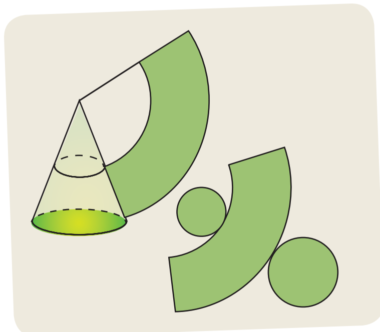
$A_{\text{LTronco de cono}} = \pi \cdot R \cdot (g + h) - \pi \cdot r \cdot g$

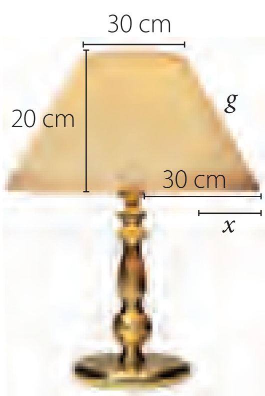
Utilizando el teorema de Thales, se puede demostrar que el área lateral delcono truncado está dado por la expresión:

$A_{\text{LTronco de cono}} = \pi \cdot (R + r) \cdot g$

Luego, junto con el área de cada una de las bases, el área del cono truncado se puede calcular como:

$A_{\text{Tronco de cono}} = \pi \cdot [(R + r) \cdot g + R^2 + r^2]$





¿Cómo hacerlo?

Una empresa fabrica lámparas de velador, de tal forma que la ampolleta está rodeada por una tela dispuesta en forma de cono truncado. Si las medidas de cada lámpara son las que se muestran en la siguiente figura, ¿cuántos metros cuadrados de tela se emplean en la fabricación de cada lámpara?

Primero, se halla la medida de la generatriz (g), aplicando el teorema de Pitágoras.

$g^2 = x^2 + (20)^2$

$g^2 = (30 - 15)^2 + (20)^2$

$g^2 = 225 + 400 = 625$

$g = 25$

Luego, se calcula el área lateral del cono truncado que forma la tela.

$A_L = \pi \cdot 25 \cdot (30 + 15)$

$A_L = \pi \cdot 25 \cdot 45 = 1\,125\pi \approx 3\,534{,}3$

Por tanto, se emplean cerca de 3 534 cm^2 de tela en la fabricación de la lámpara.

Tomo nota

- El área de un cono truncado está dada por la fórmula:
  $A_{\text{Cono truncado}} = \pi\,[(R + r) \cdot g + R^2 + r^2]$ (r: radio, R: radio de la otra base, g: generatriz).

Actividades

1. **Completa la información requerida para cada cono.**
   a. El radio mide 4 cm y la altura, 3 cm. Calcula la medida de la generatriz, del área del manto y del área total.
   b. La altura mide 15 cm y la generatriz, 18 cm. Encuentra el radio, el área del manto y el área total.
   c. El radio mide 8 cm y la altura, 6 cm. Encuentra la generatriz, el área del manto y el área total.
2. **Calcula el área de un cono recto cuya generatriz mide 20 cm y cuyo radio basal es de 15 cm.**
3. **Un cono de helado tiene 12 cm de profundidad y 5 cm de radio superior.**
   a. ¿Cuál es el volumen de helado que puede contener si se llena hasta el borde?
   b. ¿Cuál es el área del barquillo que lo forma?
4. **Para la fiesta de fin de curso, María, Susana y Carlos van a fabricar gorros de cartulina con forma de cono. Si los radios miden 8 cm, 10 cm y 13 cm y las generatrices 28 cm, 35 cm y 40 cm, respectivamente, ¿cuánta cartulina necesitarán como mínimo?**
5. **El radio de la base de un cilindro y el de la base de un cono miden 6 cm. La altura del cono mide 8 cm. Determina cuál debe ser la altura del cilindro para que ambos tengan:**
   a. la misma área lateral.
   b. la misma área total.
6. **Halla la superficie de una budinera con forma de cono truncado, sabiendo que los radios de sus bases miden 11 cm y 13 cm y su altura mide 10 cm. Considera $\pi = 3{,}14$.**
7. **Considera un cono truncado cuyas bases tienen radios de 17 cm y 22 cm y cuya altura es de 12 cm.**
   a. Calcula su generatriz.
   b. Calcula su área lateral.
   c. Calcula su área total.
8. **En una casa hay 26 macetas con forma de cono truncado. Los radios de sus bases miden 15 cm y 23 cm respectivamente, y su generatriz 36 cm. Calcula cuánto cuesta pintarlos todos por su exterior a razón de \$ 2 350 cada metro cuadrado.**

Proyecto

EN PAREJAS **Realicen la etapa 4 del proyecto de la unidad de las páginas 230 y 231.**

Antes de continuar

1. Dos conos con igual generatriz, ¿tienen igual área lateral?, ¿por qué? ¿Tienen igual área total?, ¿por qué?

Esfera

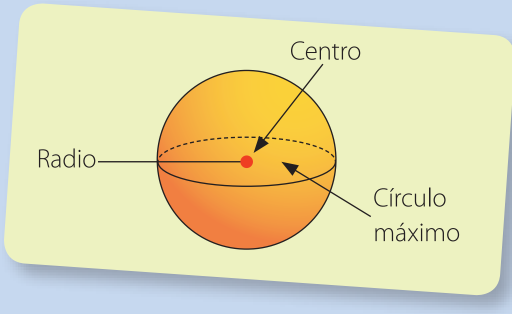
Aprenderé a: comprender la argumentación que justifica la relación entre el volumen de un cilindro, un cono y una esfera, cuando tienen igual radio. Comprender la argumentación que permite obtener el área de una esfera. Calcular el área y el volumen de una esfera.

Repaso

1. **Si el radio de un círculo aumenta al doble, ¿en cuánto aumenta su área?, ¿y si aumenta al triple?**

Una esfera es un cuerpo redondo limitado solo por una superficie curva cuyos puntos equidistan de un punto fijo llamado centro.

La distancia del centro C a un punto P de la superficie de la esfera se denomina radio, y la intersección entre la esfera y el plano que contiene al centro se denomina círculo máximo.



- Si la esfera no tiene base, ¿cómo se puede medir o calcular su volumen?

El matemático griego Arquímedes determinó cómo calcular el volumen de una esfera, cuando se conoce la medida de su radio. El procedimiento que utilizó consistió en relacionar las secciones planas de una semiesfera, un cilindro y un cono, todos de altura r y radio r, generadas al intersecar estos cuerpos por un plano paralelo a las bases a una distancia h del punto O. Observa.

Sección de la semiesfera (A_1) | Sección del cono (A_2) | Sección del cilindro (A_3)

Arquímedes observó que cuando se cortan la semiesfera, el cilindro y el cono por un plano paralelo a las bases, las áreas de las secciones producidas en la semiesfera (A_1), en el cono (A_2) y en el cilindro (A_3) verifican la siguiente relación: $A_1 + A_2 = A_3$

Entonces, se puede considerar que:

$$A_1 = A_3 - A_2$$

Luego, se puede aplicar el principio de Cavalieri para calcular el volumen de la semiesfera, si se consideran juntos el cilindro y el cono. Como todos estos cuerpos tienen la misma área basal y la misma altura, se tiene que $V_{\text{semiesfera}} = V_{\text{cilindro}} - V_{\text{cono}}$

$$V_{\text{semiesfera}} = \pi \cdot r^2 \cdot r - \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r = \pi r^3 - \frac{1}{3} \cdot \pi r^3 = \frac{2}{3} \cdot \pi r^3$$

Finalmente, el volumen de la esfera es el doble que el de la semiesfera, esto es:

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3.$$

¿Cómo hacerlo?

Para adornar el patio de una antigua edificación se construyó una esfera de piedra de 1,6 m de diámetro.

Calcula la masa total de la esfera si se sabe que la masa de cada m^3 de piedra con que fue construida pesa aproximadamente 900 kilos.

Primero, se calcula el volumen de la esfera. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ .... Volumen de la esfera.

$= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0,8)^3$ .... Se remplaza la medida del radio.

$= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 0,512$ .... Se resuelve la potencia.

$\approx 2,14$ .... Se multiplica.

Luego, se plantea la siguiente proporción:

$$\frac{1}{900} = \frac{2,14}{x}$$

Finalmente, se despeja x.

$x = 900 \cdot 2,14 = 1\,926$

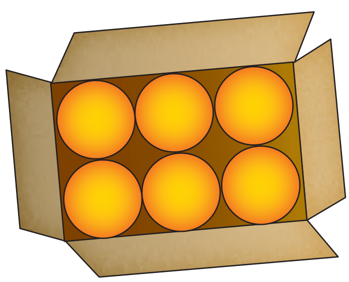
Por tanto, la masa total de la esfera es aproximadamente 1 926 kilogramos.

Tomo nota

- El volumen de la esfera de radio r es $V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$

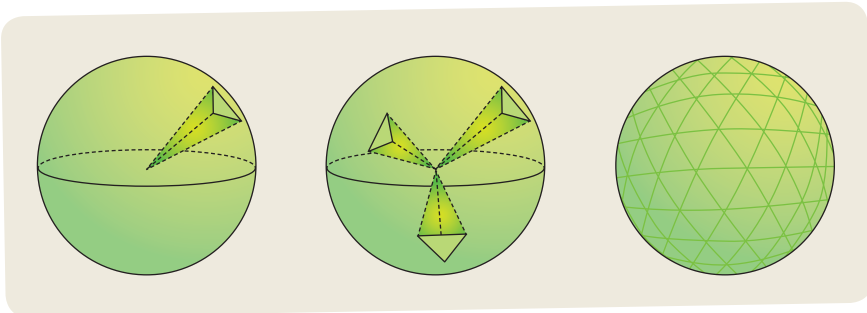
Actividades

1. **Calcula el volumen de una esfera de 6 cm de radio.**
2. **Una esfera está inscrita en un cubo de 6 cm de arista, es decir, las caras son tangentes a la esfera. Calcula el volumen de la esfera.**
3. **Un tanque de almacenamiento de gas natural tiene forma esférica y un diámetro de 20 m. ¿Cuántos m^3 de gas contiene el tanque cuando está lleno?**
4. **Se empacan esferas de radio 2 cm en cajas rectangulares.**
   a. Si se desea empacar 12 esferas de tal forma que queden seis encima de las otras 6, como se muestra en la figura, ¿cuáles son las dimensiones que debe tener la caja?
   b. Si se va a rellenar con arena el espacio vacío entre las esferas y la caja, ¿cuántos centímetros cúbicos de arena se necesitan?



A diferencia de los poliedros, del cono y del cilindro, en el caso de la esfera no es posible dibujar su red, por lo que para calcular el área de la esfera nos apoyaremos en el cálculo de su volumen.

El volumen de la esfera se puede aproximar sumando los volúmenes de las infinitas pirámides triangulares iguales, cuyas bases están inscritas en la esfera y cuyos vértices están en el centro de la esfera, como se muestra en las siguientes imágenes:



El volumen de la esfera equivale a la suma de los volúmenes de todas las pirámides (supongamos n pirámides). Se obtiene:

$$V_{\text{esfera}} = \frac{1}{3}B_1 \cdot h + \frac{1}{3}B_2 \cdot h + \frac{1}{3}B_3 \cdot h + ... + \frac{1}{3}B_n \cdot h$$

$$= \frac{1}{3}(B_1 + B_2 + B_3 + ... + B_n) \cdot h$$

Observa que la suma de las bases de todas las pirámides $B_1 + B_2 + B_3 + ... + B_n$ equivale al área total de la esfera, y h, en este caso, es igual a r, el radio de la esfera; entonces:

$$V_{\text{esfera}} = \frac{1}{3}A_{\text{esfera}} \cdot r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Luego, despejando, $A_{\text{esfera}} = 4\pi r^2$.

¿Cómo hacerlo?

Para adornar el patio de una antigua edificación se construyó una esfera de piedra de 1,6 m de diámetro.

Si se quiere aplicar estuco en la esfera y cada metro cuadrado cuesta $ 3 200, ¿cuánto cuesta aplicar estuco en toda la esfera?

Como el diámetro de la esfera es de 1,6 m, entonces, el radio mide 0,8 m.

Luego, se remplaza la medida del radio para calcular el área de la esfera.

$A_{\text{esfera}} = 4\pi r^2$ .... Área de la superficie de la esfera.

$= 4\pi \cdot (0,8)^2$ .... Se remplaza la medida del radio.

$\approx 8,04$ .... Se resuelven las operaciones.

Finalmente, se tiene que el área de la esfera es de aproximadamente 8,04 m^2. Por tanto, al multiplicar por $ 3 200, resulta que el costo de aplicar estuco en la esfera es de $ 25 728.

Tomo nota

- El área de la esfera de radio r es $A_{esfera} = 4\pi r^2$

Actividades

1. **Calcula el área de cada esfera a partir de su radio r.**
   a. $r = 3$ cm
   b. $r = 8$ cm
   c. $r = 12$ cm
   d. $r = 11$ m
   e. $r = 2{,}4$ m
   f. $r = 0{,}015$ m

2. CONEXIÓN CON LA ASTRONOMÍA ▶ **El radio de la Tierra mide 6 370 km. Si este radio es aproximadamente 1,9 veces el radio de Marte:**
   a. ¿Cuánto mide el radio de Marte?
   b. ¿Cuál es el área superficial de Marte si se considera que es una esfera perfecta?
   c. ¿Cuál es su volumen?

3. **Los radios de dos esferas son 3 cm y 5 cm.**
   a. ¿Cuál es la razón entre sus áreas?
   b. ¿Cuál es la razón entre sus volúmenes?
   c. Si la suma de los volúmenes es igual al volumen de una tercera esfera, ¿cuál es la medida del radio de la tercera esfera?

4. **Si el área de una esfera equivale a 36π cm^2, ¿cuántos centímetros mide el diámetro de la esfera?**

5. **Una esfera de cobre tiene una masa de 8,1 kg. Si se sabe que cada decímetro cúbico de cobre tiene una masa de 8,95 kg, ¿cuál es la superficie y el volumen de la esfera?**

6. **Si el área de una esfera es 113 cm^2, ¿cuánto mide su radio?**

7. **Si el volumen de una esfera es 972π cm^3, ¿cuál es el área de la superficie de la esfera en metros cuadrados?**

8. **Determina la medida del radio de la esfera con base en la información dada en cada caso.**
   a. El área de la esfera es 100π cm^2.
   b. Su área es equivalente a la suma de las áreas de 2 esferas, cuyos radios miden 3 cm y 4 cm, respectivamente.

9. **Calcula el área A de una esfera si:**
   a. el área de otra esfera mayor es 144π cm^2 y la razón entre los volúmenes de las dos esferas es $\frac{3}{4}$.
   b. su radio mide $\frac{7}{6}$ de lo que mide el radio de otra esfera cuyo volumen es 288π cm^3.

Antes de continuar

1. Si una esfera está inscrita en un cilindro, ¿cuál es la relación entre sus volúmenes?, ¿por qué?

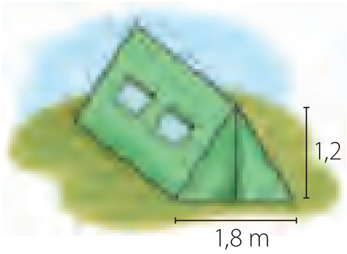
Practico

Resuelve las siguientes actividades, para consolidar los conceptos y los procedimientos que has aprendido.

1. **Determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdades y cuáles son falsas. Explica.**
   a. Todas las caras laterales de cualquier pirámide son triángulos rectángulos.
   b. El área lateral de cualquier pirámide se calcula mediante la expresión $A_L = nA$, donde n es el número de lados de la base y A el área de una de las caras laterales.
   c. Todas las pirámides triangulares son tetraedros.

2. **Cuatro cubos tienen aristas de 1 cm, 2 cm, 3 cm y 4 cm.**
   a. Determina el área total de cada cubo.
   b. ¿Qué pasa con el área total si la arista se duplica? ¿Y si se triplica?
   c. ¿Cuántos cubos de arista unitaria caben dentro de cada uno de los cubos de arista 2, 3 y 4 cm?

3. **Una empresa desea fabricar carpas con las dimensiones que se muestra en la figura. Si se cuenta con 16,56 m² de lona para elaborar toda la carpa, tapas, base y techo, ¿cuál debe ser la profundidad de cada carpa para aprovechar al máximo la lona?**



4. **Considera tres cubos: el cubo A con arista de 12 cm, el cubo B con diagonal de 12 cm, y el cubo C cuya diagonal de las caras mide 12 cm. ¿Cuál de estos cubos tiene la menor área total?**

5. **Calcula el área total de un prisma cuyas bases son triángulos equiláteros, si el área basal es 195 cm² y la arista lateral es igual a la arista basal.**

6. **Calcula el área lateral de un prisma hexagonal cuya base mide $12\sqrt{3}$ cm², y cuya arista de la base es la mitad de la arista lateral.**

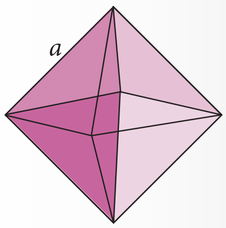
7. **Una plomada de construcción está formada por la unión de un prisma hexagonal y una pirámide de base hexagonal, ambos de arista basal 2 cm y altura de 8 cm.**
   a. Calcula el volumen de la plomada.
   b. Calcula el área de la plomada.

8. **Calcula el área lateral de una pirámide de base cuadrada, de 64 cm², sabiendo que todas las aristas son congruentes (son de la misma longitud).**

9. **Calcula el área total de una pirámide de base triangular con arista lateral de 8,2 cm y arista basal de 3,6 cm.**

10. **Sabiendo que el área total de un tetraedro es $16\sqrt{3}$ cm², calcula la longitud de una arista.**

11. **Deduce una fórmula para calcular el área y el volumen de un octaedro regular de arista a. Recuerda que un octaedro regular está formado por dos pirámides idénticas.**



12. **Si la medida de una diagonal de un cubo es igual a la medida de la diagonal de una de las caras de otro cubo, ¿qué relación existe entre las áreas de estos 2 poliedros?**

13. **Una pirámide regular de base cuadrada de 10 cm de lado y altura 12 cm es cortada por un plano a la mitad de su altura. Calcula el área total del tronco de la pirámide.**

14. **En la red de una pirámide de base cuadrada, cada lado de la base mide 24 cm y los lados de los triángulos isósceles que no coinciden con los del cuadrado miden 36 cm.**
   a. Calcula la altura que tendrá la pirámide una vez que esté construida.
   b. Encuentra el volumen de la pirámide.
   c. Encuentra el área total de la pirámide.

15. Resuelve los siguientes ejercicios que involucran área y volumen de prismas.

a. Un prisma de base rectangular mide 3 cm de ancho, 5 cm de largo y su altura mide 10 cm. ¿Cuál es su área total?

b. La base de un prisma es un triángulo rectángulo, de catetos 3 cm y 4 cm y la altura del prisma es el doble de la hipotenusa del triángulo basal. ¿Cuál es su área total?

c. ¿Cuál es el área total de un prisma de altura 5 cm y cuya base es un hexágono de lado 4 cm y apotema aproximado de 3,5 cm?

16. En un tanque de forma cúbica de 5 m de arista, la altura del agua que contiene es de 2,80 m.

a. ¿Cuál es el área de la superficie del cubo que está mojada?

b. ¿Cuántos metros cúbicos de agua hay en el tanque?

c. ¿Cuál es el volumen máximo de líquido que puede contener el tanque?

17. Se tiene un cubo cuya arista es de 4 cm y está constituido por pequeños cubos independientes con aristas de 1 cm. Se desea construir con ellos un paralelepípedo.

a. ¿Qué dimensiones tiene el paralelepípedo de menor área que se puede formar?

b. ¿Y el de mayor área?

18. Determina si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas. Justifica tus respuestas.

a. Si el radio basal de un cilindro aumenta al doble, su volumen también aumenta al doble.

b. La superficie de un cono es un tercio de la superficie del cilindro que tiene igual base y altura.

c. Se llama generatriz a la altura del cono.

d. El largo del manto de un cilindro es igual al diámetro de la base.

e. El manto de un cono es un triángulo isósceles de lado igual a la generatriz.

f. Si la altura de un cono disminuye a la mitad, su volumen también disminuye a la mitad.

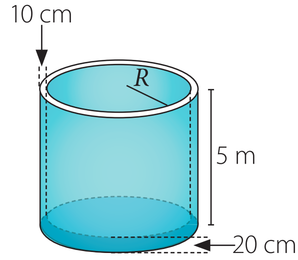
19. Un cilindro recto es generado por la rotación de un rectángulo de 1 m de perímetro y 600 cm² de área, si se gira alrededor de su lado mayor.

a. Determina el área lateral del cilindro.

b. Determina su área total.

c. Calcula su volumen.

20. Una fábrica tiene un tanque de agua que puede almacenar 600 000 litros de agua, cuyas medidas se muestran en la figura.

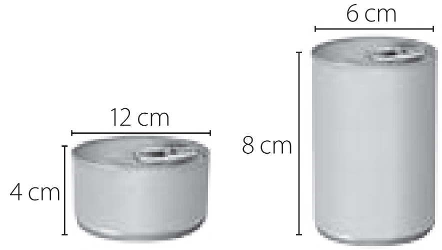


a. ¿Cuál es la medida del radio R del tanque?

b. Si 5 galones de pintura cuestan $ 80 000 y alcanzan para pintar 10 m², ¿cuánto cuesta pintar el tanque por fuera?

21. Determina el radio de la base de un cilindro sabiendo que su área lateral es 1 507,2 cm² y la generatriz mide 40 cm. ¿Cuál es su volumen?, ¿cómo lo calculaste?

22. En una industria de enlatados se utilizan recipientes con forma cilíndrica para contener alimentos como se muestra en la imagen.



a. ¿Cuál de los dos recipientes tiene mayor capacidad?

b. ¿En cuál de los recipientes se usa mayor cantidad de aluminio para su elaboración?

c. Si en cada recipiente la etiqueta cubre toda la superficie lateral, ¿en cuál de las dos etiquetas se emplea mayor cantidad de papel?

23. **El radio de la base de un cilindro y el de la base de un cono mide 8 cm. La altura del cilindro es de 10 cm. Averigua cuál debe ser la generatriz del cono para que ambos tengan:**
- a. la misma área lateral.
- b. la misma área total.
- c. igual volumen.

24. **En un recipiente cilíndrico se colocan cuatro pelotas de tenis como se muestra en la figura. Si cada pelota tiene un diámetro aproximado de 67 milímetros:**
- a. ¿Cuál es el volumen de una pelota de tenis?
- b. ¿Cuál es el volumen del recipiente cilíndrico en centímetros cúbicos?

25. **Calcula el volumen y el área total de cada cono teniendo en cuenta que h es la altura, r es el radio de la base y d es el diámetro.**
- a. $r = 2$ cm, $h = 4$ cm
- b. $d = 10$ cm, $h = 15$ cm
- c. $r = 8$ cm, $h = 12$ cm

26. **El radio de un cono mide 5 cm y el volumen es de 300 cm^3.**
- a. ¿Cuál es su altura?
- b. ¿Cuál es su generatriz?
- c. Calcula el área del manto.
- d. ¿Cuál es su área total?

27. **En un cono, la medida de su altura es 2 cm y la de su generatriz, 6 cm.**
- a. Calcula el radio del cono.
- b. Determina el área del manto y el área total.
- c. ¿Cuál es el volumen del cono?

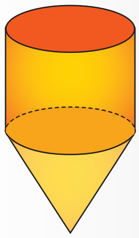
28. **Un cono recto de 3 cm de radio tiene $18\sqrt{2}\pi$ cm^3 de volumen. Calcula el área total del cono.**

29. **Determina el área total de estos conos rectos:**
- a. Altura de 12 cm y radio de la base de 9 cm.
- b. Generatriz de 26 cm y altura de 24 cm.

30. **Determina el área total de un cono recto inscrito en un cilindro recto de 15 cm de altura y 6 cm de radio en su base.**

31. **La cúpula de un planetario tiene forma de semiesfera, de 23 metros de diámetro.**
- a. ¿Cuál es el volumen de la cúpula?
- b. Si se quiere pintar la cúpula del planetario, ¿cuántos litros de pintura se necesitan? (Supón que se puede pintar 1 cm^2 con 1 mL).

32. **Cuando se saca la etiqueta que cubre la cara curva de un tarro de conservas y se estira, se obtiene un rectángulo. Si la altura del tarro es h y su radio basal es r, escribe la relación que hay entre:**
- a. el largo del rectángulo y el radio de la base.
- b. el ancho del rectángulo y la altura del tarro.

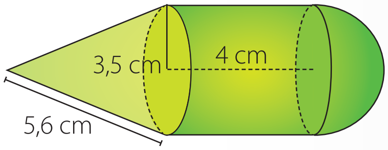


33. **En la figura se representa un depósito de acero cuyo radio de la entrada circular superior mide 8 m. La altura del tanque completo es de 32 m y la altura de la sección cónica mide 18 m. ¿Cuál es el volumen del depósito?**

34. **El radio de una esfera mide la mitad de lo que mide el radio de otra esfera.**
- a. ¿Cuál es la razón entre el área de las dos esferas?
- b. ¿Cuál es la razón entre sus volúmenes?

35. **Calcula el área y el volumen de cada esfera a partir de su radio r.**
- a. $r = 2$ cm
- b. $r = 3{,}5$ dm
- c. $r = 5$ cm
- d. $r = 48$ mm

36. **Encuentra el área y el volumen del siguiente cuerpo geométrico:**



37. **Determina el radio aproximado de una esfera en metros, si su volumen es de 33 510 400 cm^3.**

38. **Dos esferas concéntricas tienen radios de 5 cm y 8 cm, respectivamente. ¿Cuál es el volumen comprendido entre ellas?**

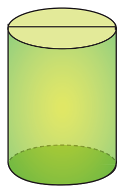
Marca la opción correcta en los ítems 39 a 47.

39. El área total de un prisma recto, cuya base es un hexágono regular de $5\sqrt{3}$ cm de apotema y 12 cm de altura, es aproximadamente:

A. 1 239,6 cm^2
B. 18 412 cm^2
C. 45 023 cm^2
D. 35 096,2 cm^2
E. 23 895,83 cm^2

40. ¿Cuál es el área total de este cilindro? Usa $\pi \approx 3$.

A. 4 500 cm^2
B. 6 660 cm^2
C. 13 140 cm^2
D. 51 408 cm^2
E. 52 020 cm^2



41. La superficie de una esfera mide 100π cm^2. Entonces, su volumen mide:

A. 72π cm^3
B. 144π cm^3
C. 166π cm^3
D. 288π cm^3
E. 576π cm^3

42. Calcula el volumen de un cilindro de diámetro 10 cm y altura 12 cm.

A. 120 cm^3
B. 120π cm^3
C. 240π cm^3
D. 300π cm^3
E. 1200π cm^3

43. Calcula el volumen de una pirámide cuadrada de 6 cm de lado y altura de una cara $\sqrt{73}$ cm.

A. $6\sqrt{73}$ cm^3
B. $12\sqrt{73}$ cm^3
C. 96 cm^3
D. 192 cm^3
E. 288 cm^3

44. Un maestro pinta la superficie curva de un estanque cilíndrico de 20 m de diámetro y 15 m de altura, por el que cobra 750 pesos el metro cuadrado, ¿cuánto se le debe cancelar por el trabajo hecho? Usa $\pi \approx 3$.

A. \$ 225 000
B. \$ 675 000
C. \$ 1 125 000
D. \$ 1 350 000
E. \$ 3 375 000

45. Un rectángulo de 10 cm de largo y 5 cm de ancho, se traslada 1 metro en dirección perpendicular a su superficie. ¿Cuál es el volumen del cuerpo generado?

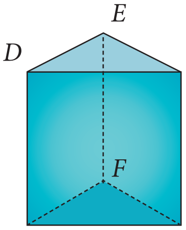
A. 5 000 L
B. 5 000 cm^3
C. 500 L
D. 500 cm^3
E. 50 L

46. Dos pirámides A y B tienen base cuadrada. Las medidas de la base y la apotema de la pirámide B son el doble de las correspondientes medidas de la pirámide A. ¿Cuál es la relación entre el área de la pirámide B y el de la pirámide A?

A. Es igual.
B. Es el doble.
C. Es el triple.
D. Es cuatro veces mayor.
E. Es ocho veces mayor.

47. Sea $ABCD$ cuadrado de lado 10 cm, ΔDCE y ΔABF equiláteros. Calcula el volumen de la figura.

A. 100 cm^3
B. $100\sqrt{3}$ cm^3
C. $250\sqrt{3}$ cm^3
D. $500\sqrt{3}$ cm^3
E. 1 000 cm^3



Evaluación de proceso

Aplica lo aprendido hasta este momento en la unidad para desarrollar las siguientes actividades.

1. **Calcula el área total de los prismas con base regular, de acuerdo con las condiciones dadas.**
   a. Base triangular de lado 5 cm
   Altura del triángulo: 4,3 cm
   Altura del prisma: 8,5 cm
   b. Base pentagonal de lado 4 cm
   Apotema del pentágono: 0,27 dm
   Altura del prisma: 0,12 m

2. **¿Qué cantidad de madera aglomerada se utilizará para hacer una bodega con forma de paralelepípedo recto de dimensiones 1,2 m de largo, 1,4 m de ancho y 2 m de fondo?**

3. **Un prisma tiene por base un triángulo equilátero cuyos lados miden 4 cm y su altura 6 cm. Calcula el área total.**

4. **¿Qué sucede con el volumen de un cubo si su lado aumenta al doble?, ¿y con el área? Explica.**

5. **Se necesita pintar las paredes y el techo de un salón rectangular de 5 m de ancho, 8 m de largo y 3,5 m de alto. ¿Cuántas latas de pintura serán necesarias si cada lata rinde para 26 m^2?**

6. **La pirámide de Keops tiene una altura de 146 m y una base cuadrada de 230 m de lado.**
   a. ¿Cuál es su volumen?
   b. ¿Cuál es su área lateral?

7. **¿Cuál es el área lateral de un prisma recto si tanto el perímetro de la base como la altura miden 12 cm?**

8. **Un cilindro tiene 112π cm^2 de área. Su altura es de 10 cm.**
   a. Determina el diámetro de la base.
   b. Calcula el volumen del cilindro.

9. **¿Qué cantidad de material se necesita para construir un depósito cilíndrico cerrado de 1,2 m de radio y 2,3 m de altura?**

10. **El radio de un cono mide 10 cm y su generatriz, 26 cm.**
    a. ¿Cuál es su altura?
    b. Calcula el área del manto.
    c. Calcula su área total.

11. **Un cubo y una esfera tienen la misma área: 216 cm^2. ¿Cuál tiene mayor volumen?, ¿por qué?**

12. **Si el área de una esfera corresponde a 676π m^2, ¿cuál es el volumen de la esfera en centímetros cúbicos?**

13. **Una esfera, un cilindro y un cono tienen igual radio. La suma de los volúmenes del cilindro y del cono, ¿puede ser equivalente al volumen de la esfera? Justifica.**

14. **Resuelve los siguientes problemas.**
    a. El rendimiento de un frasco de pintura corresponde a una superficie de 2 m^2. Si se van a pintar cubos cuya arista es de 6 cm, ¿cuántos cubos se alcanzan a pintar con un solo frasco de pintura?
    b. Laura quiere forrar una caja de zapatos con papel, sin la tapa. Si las dimensiones de la caja son 20 cm de ancho, 10 cm de alto y 30 cm de largo, ¿cuál es el área de papel que Laura necesita?
    c. Las dimensiones de un pliego de papel que cuesta $ 600 son 1 m y 60 cm. Si los pliegos de papel solo se venden completos, ¿cuánto se gasta en envolver 12 cubos de 20 cm de arista?
    d. Camila quiere construir la estructura de una pirámide con alambres y luego forrarla con papel de volantín. Si la base es un cuadrado de lado 12 cm y la altura de cada cara es de 8 cm, ¿cuánto alambre necesita?, ¿y cuánto papel?

Marca la opción correcta en los ítems 15 a 24.

15. ¿Cuál es el área total de un prisma de base hexagonal, si su arista basal mide 6 cm y su arista lateral, 9 cm?

A. 108 cm^2
B. 324 cm^2
C. $324\sqrt{3}$ cm^2
D. $324 + 108\sqrt{3}$ cm^2
E. $108 + 324\sqrt{3}$ cm^2

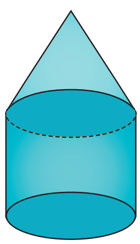
16. El volumen de una esfera es 288π cm³. Entonces, su área mide:

A. 72π cm^2
B. 144π cm^2
C. 188π cm^2
D. 288π cm^2
E. 576π cm^2

17. ¿Cuál es el área de una pirámide de base cuadrada de 10 cm de lado, si su apotema mide 13 cm?

A. 65 cm^2
B. 130 cm^2
C. 165 cm^2
D. 260 cm^2
E. 360 cm^2

18. En la figura se representa un depósito cuyo radio mide 12 m. La altura del tanque completo es de 24 m y la altura de la sección cónica mide 9 m. ¿Cuál es el área lateral del depósito?

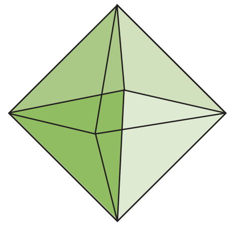


A. 72π m^2
B. 144π m^2
C. 188π m^2
D. 288π m^2
E. 540π m^2

19. ¿Cuánto mide la altura de un cilindro, si su área total es 90π cm^2 y su radio basal es 5 cm?

A. 3 cm
B. 4 cm
C. 9 cm
D. 12 cm
E. 15 cm

20. ¿Cuál es el área de un octaedro regular de arista 8 cm?



A. 64 cm^2
B. 256 cm^2
C. $128\sqrt{3}$ cm^2
D. $256\sqrt{3}$ cm^2
E. $512\sqrt{3}$ cm^2

21. ¿Cuál es el área lateral de una pirámide de base hexagonal de 8 cm de arista basal y 6 cm de apotema?

A. $24\sqrt{3}$ cm^2
B. 40 cm^2
C. 144 cm^2
D. 240 cm^2
E. 480 cm^2

22. El radio basal y la altura de un cono recto miden, respectivamente, 5 cm y 12 cm. ¿Cuál es el área del manto de este cono?

A. 65π cm^2
B. 90π cm^2
C. 180π cm^2
D. 200π cm^2
E. 270π cm^2

23. Si el radio basal de un cilindro mide a y su altura mide el triple del radio basal, ¿cuál es su área total?

A. πa^2
B. $2\pi a^2$
C. $3\pi a^2$
D. $8\pi a^2$
E. $12\pi a^2$

24. Si una pelota de tenis tiene un diámetro aproximado de 67 milímetros, ¿cuál es su área?

A. 5,63π cm^2
B. 11,27π cm^2
C. 44,89π cm^2
D. 140,95π cm^2
E. 563,81π cm^2

Mi progreso

Verifica en el solucionario del Texto si tus respuestas son correctas. Si tienes respuestas incorrectas, marca en la tabla el criterio correspondiente y realiza las actividades de refuerzo indicadas.

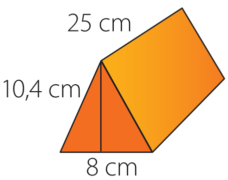
Criterio	Ítems	¿Qué debo hacer?
Resolver problemas sobre área de prismas y pirámides.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 14a, 14b, 14c, 14d, 15, 17, 20 y 21	Si tuviste menos de 10 ítems correctos, realiza las actividades 1, 2, 3, 4, 6, 8a, 8b, 8c, 8d, 9, 10, 11, 12 y 13.
Resolver problemas sobre área de cilindros y conos.	8, 9, 10, 18, 19, 22 y 23	Si tuviste menos de 4 ítems correctos, realiza las actividades 7, 14, 15, 16, 17, 18 y 19.
Resolver problemas sobre volumen y área de esferas.	11, 12, 13, 16 y 24	Si tuviste menos de 3 ítems correctos, realiza las actividades 20, 21, 22, 23 y 24.

Para reforzar

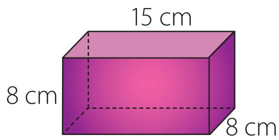
Según los resultados obtenidos en la evaluación de proceso, resuelve las actividades correspondientes para reforzar los contenidos en los que tuviste dificultades.

1. Calcula el área de los siguientes prismas.

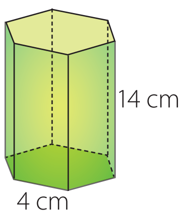
a.



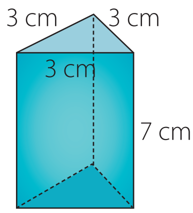
b.



c.



d.



2. El área de un cubo es 294 cm^2. Calcula su arista.

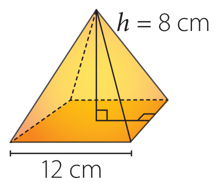
3. El área de un ortoedro es 242 dm^2. Dos de sus dimensiones son de 3 dm y 7 dm. ¿Cuál es su tercera dimensión?

4. Calcula el área total de una pirámide regular cuya base en un cuadrado de lado 12 cm y cuya altura es 15 cm.

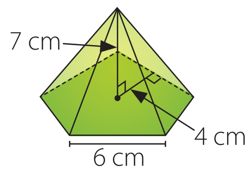
5. Si el radio de una esfera mide 0,3 m, ¿cuál es el área de la esfera, en centímetros cuadrados?

6. Calcula el área lateral de las siguientes pirámides, si sus bases son polígonos regulares.

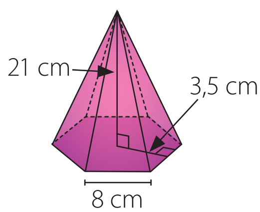
a.



b.



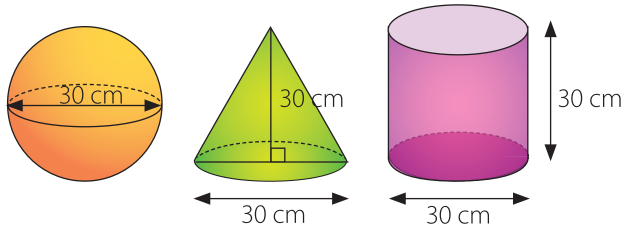
c.



7. El radio de un cono mide 7 cm y su generatriz, 25 cm.

a. ¿Cuál es su altura?
b. Calcula el área del manto.
c. Calcula su área total.
d. ¿Cuál es su volumen?

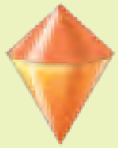
8. **Resuelve los siguientes problemas.**
   a. ¿Cuál es el área total de un dormitorio de 3 m de largo, 2,5 m de ancho y altura 2,4 m?
   b. Con el mínimo de papel que se necesita para envolver una caja de 10 cm por 8 cm por 4 cm, ¿se puede envolver un cubo de arista 9 cm? Calcula cuánto falta o cuánto sobra.
   c. Jorge está construyendo un modelo de cubo con láminas de acrílico, el cubo tiene aristas de 15 cm. La lámina de acrílico mide 1 m de largo y 50 cm de ancho. ¿Cuánto acrílico le sobra?
   d. ¿Cuánto papel se necesita para cubrir una pirámide de 10 cm de apotema, cuya base es un cuadrado de 8 cm de lado?
9. **Calcula el área de un tetraedro regular cuya arista es 8 cm.**
10. **¿Hay algún poliedro regular que sea prisma o pirámide?, ¿cuál o cuáles?**
11. **Calcula el área lateral de un prisma recto pentagonal regular de arista basal 3 cm y arista lateral 5 cm.**
12. **Calcula el área total de un prisma recto triangular regular, si su arista basal mide 8 cm y su arista lateral mide 14 cm.**
13. **La altura de una pirámide regular de base hexagonal es 7 m y su arista basal mide 8 m. Calcula su área total.**
14. **Si se hace girar una escuadra con forma de triángulo rectángulo de catetos 5 cm y 12 cm alrededor de cada cateto, se obtienen dos conos.**
    a. Calcula la generatriz.
    b. Calcula el área lateral de cada cono. ¿Son iguales?, ¿por qué?
    c. Calcula el área total de cada cono.
    d. ¿Cuál de ellos tiene mayor área?
15. **Se tiene un cono cuyo diámetro es de 16 cm y su altura es 20 cm.**
    a. Calcula el área total.
    b. Calcula el área del cuerpo que resulta al cortarlo por la mitad.
    c. Calcula el área del cono truncado obtenido al cortar en forma paralela a la base a 5 cm de ella.
16. **Un cono de helado tiene 18 cm de profundidad y 8 cm de diámetro superior.**
    a. ¿Cuál es el área del barquillo que lo forma?
    b. ¿Cuál es el volumen de helado que puede contener si se llena hasta el borde?
17. **Un cono truncado tiene bases cuyos radios miden 15 cm y 24 cm y cuya altura es de 12 cm.**
    a. ¿Cuál es su generatriz?
    b. Calcula su área lateral.
    c. ¿Cuál su área total?
18. **La altura de un cilindro mide el doble que su radio basal. ¿Cuál es su volumen si su área total es 96π cm²?**
19. **La altura de un cono es de 15 cm y su área basal es 64π cm².**
    a. Calcula el área del manto.
    b. Calcula el área total.
20. **Una semiesfera tiene 11 m de radio.**
    a. ¿Cuál es su área?
    b. ¿Cuál es su volumen?
21. **El radio de una pelota de fútbol es de 10,5 cm, aproximadamente.**
    a. ¿Cuál es el área de la pelota?
    b. Calcula el volumen de la pelota.
22. **Una esfera está inscrita en un cubo de 12 cm de arista.**
    a. Calcula el área de la esfera.
    b. ¿Cuál es el volumen de la esfera?
23. **En un cilindro de diámetro igual a la altura, se inscribe una esfera. ¿Cuál es la relación entre el área lateral del cilindro y el área de la esfera?**
24. **Comprueba que el volumen del cilindro es igual a la suma de los volúmenes de la esfera y el cono:**



Síntesis

Formular y verificar conjeturas respecto de los cuerpos generados a partir de traslaciones o rotaciones de figuras planas.

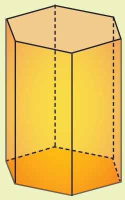
1. **Dibuja la generatriz del siguiente cuerpo, incluyendo su eje.**



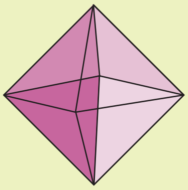
- ¿Cuál de los cuerpos geométricos que conoces corresponde a un cuerpo generado por rotación?
- En cada caso, ¿cuál es su generatriz?

2. **Decide en cada caso si el cuerpo está generado por traslación.**

a.



b.



- ¿Cuál de los cuerpos geométricos que conoces corresponde a un cuerpo generado por traslación?
- ¿Existen cuerpos geométricos que no puedan describirse ni por rotación ni por traslación?, ¿por qué?, ¿cuáles son?

Resolver problemas sobre volumen de cuerpos geométricos.

3. **Calcula el volumen de un prisma regular de base hexagonal, cuya arista basal mide 8 cm y de 4 cm de altura.**
4. **En una amasandería, al cernir harina sobre el mesón se formó un cono de 1,2 m de diámetro y 80 cm de altura. ¿Cuál es el volumen de la harina cernida? Considera $\pi \approx 3{,}14$.**

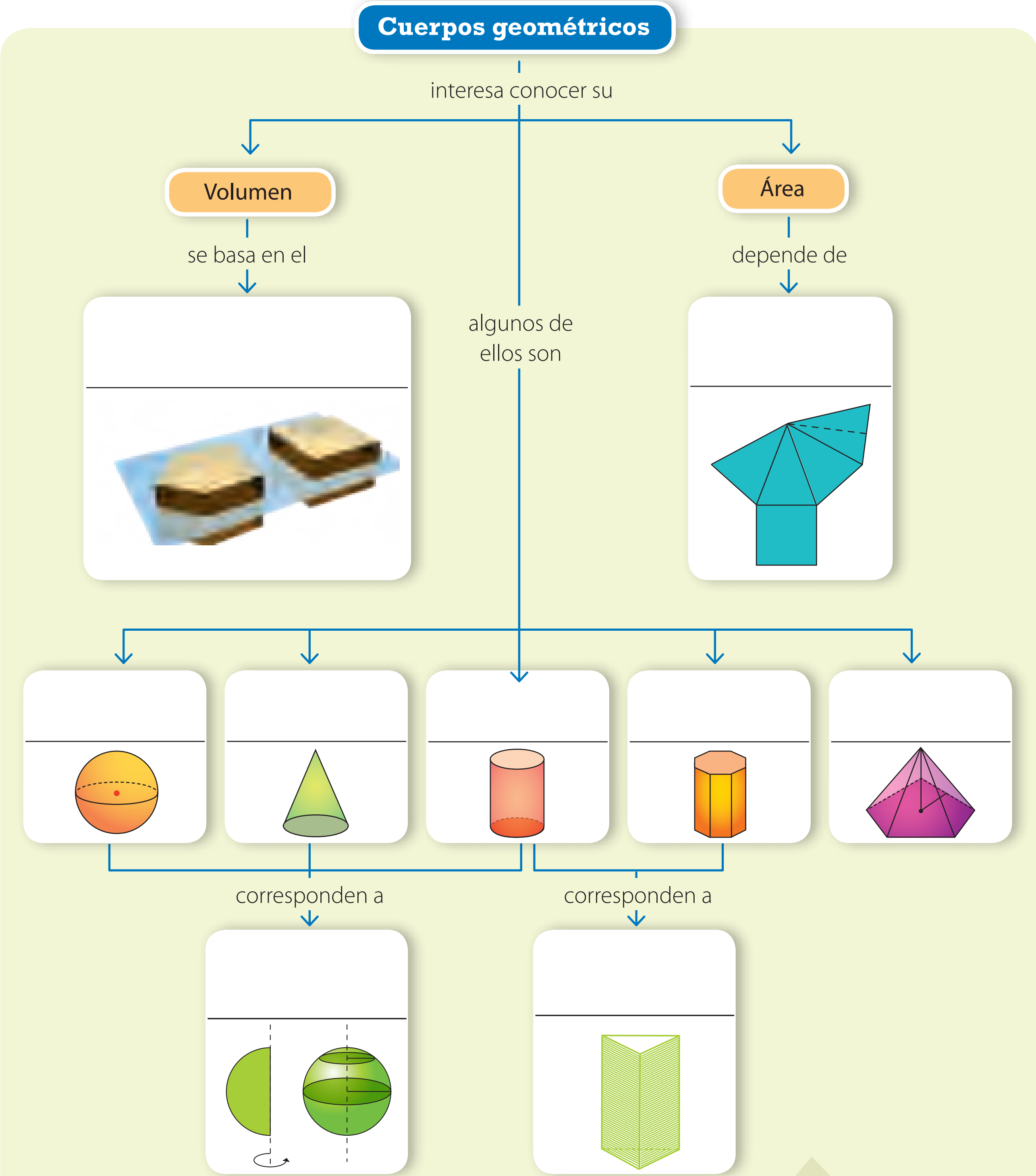
- Explica cómo calculaste el volumen del prisma de base hexagonal.
- Si el prisma fuera oblicuo, con las mismas medidas, ¿tendría distinto volumen?, ¿por qué?
- Explica con tus palabras la relación entre el volumen de un prisma y el de una pirámide, si tienen igual altura y base congruente.

Resolver problemas sobre área de cuerpos geométricos.

5. **El techo de una bodega tiene forma de pirámide cuya base es un cuadrado de 6 m de lado y 4 m de altura. ¿Cuántos metros cuadrados de planchas de zinc se necesitan para cubrir todo el techo?**
6. **La altura de un cono mide 5 cm y su generatriz, 13 cm.**
   a. ¿Cuál es la medida del radio?
   b. Calcula el área del manto.
   c. Determina el área total.

- Considera dos pirámides, de igual altura e igual arista basal. Si la cantidad de lados de su base es distinta, ¿es igual el área total de ambas pirámides? Explica.
- Si el cono fuera oblicuo, con las mismas medidas, ¿tendría distinta área?, ¿por qué?

7. **Completa el mapa conceptual con los conceptos fundamentales trabajados en la unidad.**



- Compara tu resultado con el de tus compañeros. ¿Hubo diferencias?, ¿cuáles?
- Revisa en el solucionario del Texto los conceptos correctos. ¿Qué otros conceptos agregarías?, ¿en qué lugar del mapa los pondrías?, ¿por qué?

Evaluación final

Aplica lo aprendido en la unidad para desarrollar las siguientes actividades.

1. **Una lata de conservas tiene un diámetro de 8 cm y una altura de 13 cm.**
   a. ¿Cuál es el área total de sus bases?
   b. Calcula el área de la etiqueta de papel que cubre la lata.
   c. Calcula el volumen de la lata.

2. **El radio de la Tierra es de 6 370 km y el de la Luna, 1 738 km. ¿Cuántas veces mayor es el volumen de la Tierra, aproximadamente?**

3. **Una empresa que vende jugo de fruta en envases con forma de paralelepípedo recto, de medidas 11, 6 y 15 cm, decide cambiar dichos envases por otros en los que disminuye un 10 % el área de la menor de las bases y aumenta un 10 % la altura correspondiente.**
   a. El volumen del nuevo envase, ¿es mayor o menor que el del antiguo?
   b. Si mantienen el mismo precio, ¿es positivo para los consumidores?

4. **En una habitación de 5 m de largo, 3 m de ancho y 2 m de altura se requiere almacenar cajas de 1 m de largo, 60 cm de ancho y 40 cm de altura. ¿Cuántas cajas se pueden almacenar en esta habitación?**

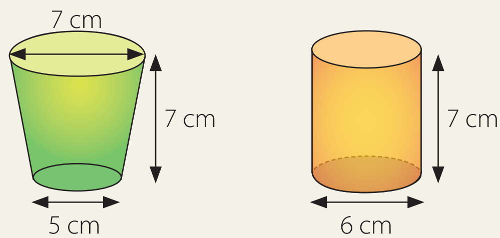
5. **Calcula el área total de una pirámide recta de 15 cm de altura, cuya base es un cuadrado de 16 cm de lado.**

6. **Calcula el área del poliedro obtenido a partir del corte en forma diagonal de un cubo de 16 cm de arista.**

7. **Calcula el volumen de una pirámide de base cuadrada de lado 12 cm y sus caras miden 15 cm.**

8. **Haciendo girar un triángulo rectángulo de catetos 9 cm y 12 cm alrededor de cada uno de ellos, se obtienen dos conos. Calcula el área del cono en ambos casos. ¿Cuál es mayor?**

9. **Observa los siguientes cuerpos geométricos: ¿Cuál de ellos tiene mayor capacidad?**



10. **Si en un cono reducimos a la mitad el radio y mantenemos la altura. ¿El volumen se reduce a la mitad? ¿Y si se mantiene la misma base y se reduce la altura a la mitad?**

11. **Se quiere construir una pared de 7,5 m de alto y 5,6 m de largo, con un ancho de 30 cm. Si el cemento ocupa un 15% del volumen, ¿cuántos ladrillos de medidas 15 cm, 10 cm y 6 cm se necesitarán?**

12. **La base de un prisma recto es un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 11,3 cm y 6,8 cm. La altura del prisma es de 2 dm. Calcula su área.**

13. **Una columna de concreto tiene forma de cilindro. El radio mide 11 cm. La altura de la columna es de 3,2 m.**
    a. ¿Cuál es el volumen de la columna?
    b. Calcula su masa sabiendo que la masa de 1 m^3 de concreto es de 2 900 kg.

14. **Un juguete está formado por un cubo de 14 cm de arista y dos pirámides de 8 y 12 cm de altura, cuyas bases son dos caras opuestas del cubo. ¿Cuál es el volumen del juguete?**

Marca la opción correcta en los ítems 15 al 19.

15. La medida de la altura de un cono recto es igual al triple del radio basal. Su volumen es:

A. $\frac{1}{3}\pi r^3$
B. πr^3
C. $3\pi r^3$
D. $9\pi r^3$
E. Ninguna de las anteriores.

16. Un cubo de arista a está inscrito en una esfera de radio R. Entonces se cumple que:

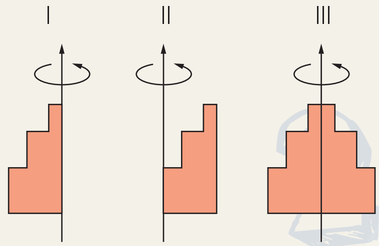
A. $a = 2R$
B. $2R = a\sqrt{2}$
C. $2R = a\sqrt{3}$
D. $R = a\sqrt{2}$
E. $R = a\sqrt{3}$

17. ¿Cuál es el volumen de una pirámide de base cuadrada de 6 cm de lado y altura de 10 cm?

A. 40 cm^3
B. 120 cm^3
C. 240 cm^3
D. 360 cm^3
E. 600 cm^3

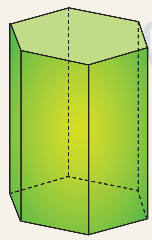
18. En la imagen está representado un cuerpo generado por una revolución de alguna figura plana. Indica la o las posibles figuras generadoras.

A. Solo I
B. Solo III
C. Solo II
D. I y II
E. I y III



19. El volumen de un prisma hexagonal de base 5 cm^2 y altura 10 cm es:

A. 15 cm^3
B. 50 cm^3
C. 10 cm^3
D. 150 cm^3
E. 210 cm^3



Mis logros

Verifica en el solucionario del Texto si tus respuestas son correctas. Si tuviste respuestas incorrectas, marca en la tabla el objetivo de aprendizaje correspondiente y revisa las páginas indicadas.

Criterio	Ítems	¿Que debo hacer si tengo dudas?
Formular y verificar conjeturas respecto de los cuerpos generados a partir de traslaciones o rotaciones de figuras planas.	18	Revisa las páginas 222 a 225.
Resolver problemas sobre volumen de prismas.	3, 4, 11 y 19	Revisa las páginas 226 a 227.
Resolver problemas sobre volumen de cilindros.	1 y 13	Revisa las páginas 232 y 233.
Resolver problemas sobre volumen de pirámides.	5, 7, 14 y 17	Revisa las páginas 234 a 237.
Resolver problemas sobre volumen de conos.	10 y 15	Revisa las páginas 238 a 241.
Resolver problemas sobre área de prismas y pirámides.	6 y 12	Revisa las páginas 250 a 253.
Resolver problemas sobre área de cilindros y conos.	8 y 9	Revisa las páginas 254 a 257.
Resolver problemas sobre volumen y área de esferas.	2 y 16	Revisa las páginas 258 a 261.

Vuelve a la página 217 y lee lo que se esperaba que aprendieras en esta unidad. ¿Crees que lo aprendiste?, ¿por qué? Si aún tienes dudas, acláralas con tu profesor antes de continuar

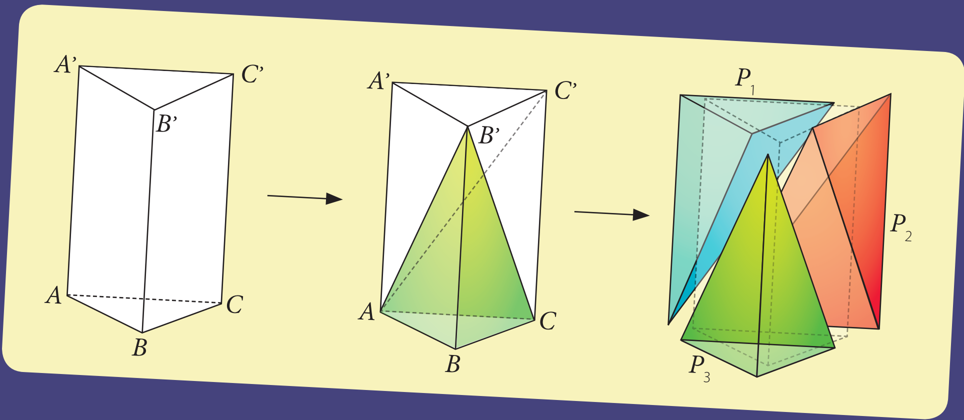
Actividades complementarias

Volumen de una pirámide triangular

Verificarás un teorema referido al volumen de una pirámide triangular mediante la construcción de figuras geométricas.

1. **Comprende el teorema que vas a verificar.**

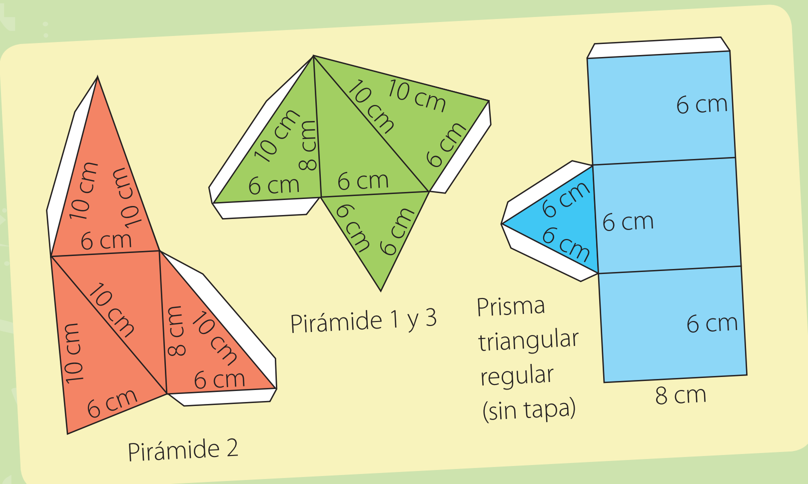
   Consideremos un prisma recto triangular. Este se puede descomponer en tres pirámides triangulares, tal como muestran los dibujos.



Las tres pirámides tienen el mismo volumen, puesto que las pirámides P_1 y P_3 son congruentes, y P_2 tiene una base y una altura iguales a las de P_1 (y a las de P_3). Luego, por el teorema "Si dos pirámides tienen la misma altura y bases de la misma área, entonces tienen el mismo volumen", podemos afirmar que las tres pirámides tienen el mismo volumen. Así:

$$V_{\text{Prisma}} = 3\,V_{\text{Pirámide}} \rightarrow V_{\text{Pirámide}} = \frac{V_{\text{Prisma}}}{3}$$

2. **Construye un prisma triangular regular y las tres pirámides en las cuales se puede descomponer. Utiliza los siguientes desarrollos (puedes agrandarlos proporcionalmente).**



3. **Verifica que las tres pirámides tienen la misma altura si sus bases son congruentes.**
4. **Comprueba que las tres pirámides caben exactamente en el interior del prisma triangular regular.**
5. **Discute los aspectos positivos y las limitaciones de la verificación que has realizado. ¿Dirías que la experiencia demuestra que $V_{\text{Pirámide}} = \frac{V_{\text{Prisma}}}{3}$?, ¿por qué?**

¿Cómo se aplica el concepto de la esfera en la fabricación de una pelota?

La pelota de cuero fue inventada en el siglo IV a. C. por Fu Hi, un gobernante de la antigua China quien formó un sólido parecido a una esfera con raíces duras cubiertas con cuero crudo. En la actualidad, una gran cantidad de deportes se practican con una pelota, la cual puede estar hecha de diferentes materiales y cuya forma, en la mayoría de los casos, se asemeja a la de una esfera.

El tamaño, el material, la textura y la masa de una pelota pueden variar dependiendo de la intención o finalidad de cada deporte; por ejemplo, las bolas de billar se fabrican con resina fenólica, la cual permite que la bola se deslice fácilmente por el paño de la mesa de billar. El diámetro y la masa de una bola de billar se supervisan mediante un *software*. La diferencia entre la masa de dos bolas de billar no debe ser mayor a 2 gramos para que los golpes que generen sean similares.

En la siguiente tabla se muestran las medidas reglamentarias del diámetro de algunas pelotas en diferentes deportes.

Pelota	Bola de billar francés 	Pelota de béisbol 	Balón de baloncesto 	Balón de fútbol 	Pelota de tenis 
Diámetro máximo	6,15 cm	6,9 cm	24 cm	22 cm	6,67 cm

Archivo editorial

1. **Determina la diferencia entre el volumen de un balón de fútbol y el de una pelota de béisbol.**
2. **Calcula la diferencia entre el área de un balón de baloncesto y el área de una pelota de tenis.**
3. **Supón que un balón de fútbol se asemeja exactamente a una esfera. ¿Cuántos metros cuadrados de cuero se necesitarían para fabricar 8 balones de fútbol?**
4. **Si la densidad de la resina fenólica es 1,07 g/cm^3, ¿cuál es la masa aproximada que una bola de billar obtiene de esta resina? (Considera que la densidad es igual a la razón entre la masa y el volumen).**
5. **Observa la ilustración. Luego, determina la diferencia entre el volumen de la caja y la suma de los volúmenes de las bolas de billar, sin considerar el grosor de la madera de la caja. (Considera que el diámetro máximo de una bola de billar es 5,71 cm).**

Diseño de envases

Los envases son recipientes que sirven para contener, proteger, manipular, distribuir y presentar productos, en cualquier etapa de su proceso productivo, de distribución o venta. El envase puede ser de vidrio, de plástico o de cartón, entre otros materiales.

El vidrio se utiliza generalmente para productos líquidos, como por ejemplo aceite, bebidas, licores, medicamentos, etcétera. Puede estar inserto en otro envase o estuche de cartón que cumple la función de protegerlo y presentar el producto de manera atractiva para los potenciales clientes.

Por este motivo, los estuches de cartón se diseñan con creatividad e ingenio para que sirvan de enganche para la compra del producto, ya que cada producto que se ofrece en el mercado cuenta con una amplia competencia. Por otra parte, se debe considerar la cantidad de material utilizado en el envase para que no encarezca excesivamente el precio final.

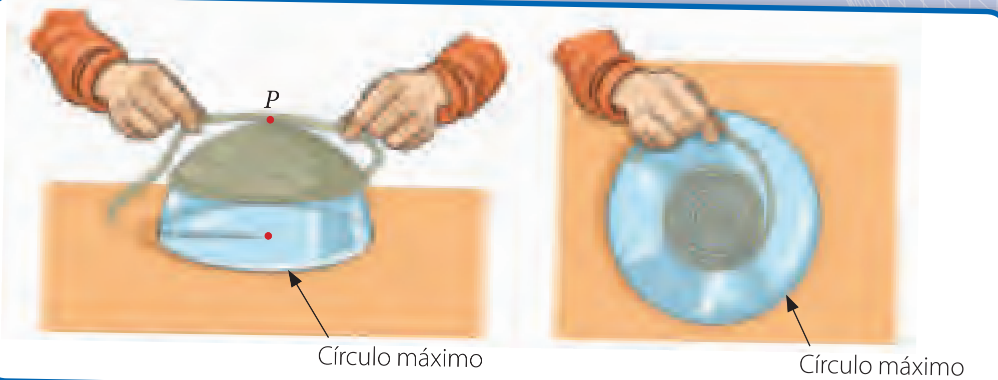
Archivo editorial

1. **Observa las botellas de la fotografía. Supón que te han encargado diseñar un envase de cartón para cada una de ellas.**
   a. ¿Qué forma podría tener el envase, en cada caso?, ¿por qué?
   b. ¿Cuáles son las dimensiones relevantes en cada caso?, ¿qué otras características son importantes de considerar? Explica.
2. **Forma un equipo con dos compañeros más. Analicen las propuestas de envases ideadas por cada uno, compárenlas y determinen cuál de ellas cumple con las condiciones de proteger adecuadamente el envase de vidrio, con la menor cantidad de cartón utilizado.**
3. **Busquen en sus hogares un frasco o botella de forma irregular, como por ejemplo una alcuza, un frasco de colonia o una botella decorativa. Midan sus dimensiones y detallen otras características que sean relevantes para el diseño.**
4. **Diseñen tres envases de cartón para la botella que escogieron. Utilicen distintos cuerpos geométricos para cada uno.**
   a. Dibujen cada uno de los envases detalladamente, registrando todas las medidas.
   b. Dibujen la correspondiente red del envase y calculen su área.
   c. Según las características de la botella, diseñen una marca para su producto y la decoración que podría tener el envase.
   d. Construyan con cartón o cartulina un ejemplo de cada envase.

Área de una esfera

Para hallar el área de la superficie de la esfera de una forma práctica no rigurosa, se realizan los siguientes pasos:

1. **Primero, se enrolla una cuerda desde el punto P, de tal forma que cubra toda la superficie de la semiesfera.**
2. **Luego, se mide la longitud de la cuerda utilizada.**
3. **Finalmente, se enrolla la cuerda en forma de espiral desde el centro C del círculo máximo y se mide.**



Al comparar las medidas, se puede observar que la longitud de la cuerda utilizada para cubrir la superficie del círculo máximo, es el doble de la longitud de la cuerda que se utilizó para cubrir la superficie de la semiesfera. Por tanto, si πr^2 es el área del círculo máximo, entonces, el área de la superficie de la semiesfera es $A_S = 2\pi r^2$, de donde se deduce que el área total de la superficie de la esfera es $A_T = 4\pi r^2$.

Envasando galletas

El producto más vendido por la fábrica de dulces La Golosa son unas galletas circulares de 6 cm de diámetro y un grosor de 5 mm.

Las galletas se comercializan en paquetes de 40 unidades, envueltas en papel de celofán, y se venden en cajas con forma de paralelepípedo que contienen cuatro paquetes en cada caja. Las cajas van recubiertas con el mismo papel de celofán que los paquetes.

La producción de galletas diaria se estima en unas 10 000 unidades, y el departamento financiero está evaluando la conveniencia de que la forma de la caja sea un ortoedro.

1. **¿Crees que si la caja tuviera otra forma se podría aprovechar mejor el espacio?**
2. **¿Qué cantidad de cartón ahorrarían diariamente?**

Unidad

5 Datos y azar

Latinstock

Antes aprendí a:

- Relacionar y aplicar los conceptos de variable aleatoria discreta, función de probabilidad y distribución de probabilidad.
- Determinar la media, varianza y desviación estándar de variables aleatorias.
- Usar la distribución binomial para analizar situaciones o experimentos.
- Emplear elementos básicos del muestreo aleatorio simple para inferir sobre la media de una población finita.

El tiro con arco es un deporte en el que se utiliza un arco para lanzar flechas, las cuales deben incrustarse en unos objetivos llamados dianas. Las dianas se forman con anillos concéntricos de distintos colores y un círculo justo en el centro. Cada uno de los anillos otorga un puntaje diferente, del 1 al 10, donde el puntaje máximo se otorga al apuntar justo en el área que comprende el círculo central.

La probabilidad de obtener el puntaje máximo, es decir, 10 puntos, corresponde a la razón entre el área del círculo interior de color amarillo y el área de la diana.

1 **Si lanzas una flecha, ¿en qué color es más probable que caiga?, ¿por qué?**

2 **Averigua en Internet las dimensiones de una diana oficial de tiro con arco. ¿Cuál es el área que ocupa cada color?, ¿y el área total de la diana?**

3 **¿Cuál es la probabilidad de acertar al círculo central?, ¿y a la región de color blanco?**

4 **Busca en Internet más información acerca de este deporte. En Chile, ¿quiénes son los principales exponentes del tiro con arco?**

En esta unidad podré:

- Relacionar y aplicar los conceptos de función de densidad y distribución de probabilidad para el caso de una variable aleatoria continua.
- Conocer y aplicar la distribución normal en diversas situaciones.
- Describir los resultados de un experimento aleatorio, aplicando las distribuciones normal y binomial.
- Aproximar la probabilidad de la binomial por la probabilidad de la normal.
- Realizar conjeturas sobre el tipo de distribución al que tienden las medias muestrales.
- Estimar intervalos de confianza para la media de una población con distribución normal y varianza conocida.

Lo utilizaré para:

- Modelar situaciones utilizando la distribución normal.

Para recordar

Observa los siguientes cuadros que te permitirán recordar los prerrequisitos para activar tus conocimientos previos y resolver los ejercicios que se proponen en las páginas 282 y 283.

Relacionar y aplicar los conceptos de variable aleatoria discreta, función de probabilidad y distribución de probabilidad.

- Una variable aleatoria es una función que asigna a cada elemento de un espacio muestral un número real. Por ejemplo, en el experimento aleatorio "lanzar dos monedas", podemos definir la variable aleatoria X: cantidad de caras que aparecen.
- Las variables aleatorias se simbolizan generalmente con letras mayúsculas: X, Y o Z.
- Si X es una variable aleatoria, $P(X = x)$ corresponde a la probabilidad de que la variable aleatoria X tome el valor específico x.
- Si X es una variable aleatoria y sus funciones de probabilidad y de distribución acumulada son $f(x)$ y $F(x)$, respectivamente, entonces $f(x) = P(X = x)$ y $F(x) = P(X \leqslant x)$.

Determinar la media, varianza y desviación estándar de variables aleatorias discretas.

- La media o esperanza μ de una variable aleatoria X que puede tomar valores $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es:

$$\mu = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n).$$

  Por ejemplo, en el experimento aleatorio de lanzar dos monedas, se define la variable aleatoria X: *cantidad de caras que aparecen*. Luego, los valores posibles que puede tomar X son {0, 1, 2}. Para cada valor de X, sus probabilidades son:

  $P(X = 0) = \frac{1}{4}$, $P(X = 1) = \frac{1}{2}$, $P(X = 2) = \frac{1}{4}$

  Finalmente, la media de X corresponde a:

$$\mu = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1)\ 2 \cdot P(X = 2) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

- Si una variable aleatoria X puede tomar valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cada uno con probabilidades $P_1, P_2, \ldots, P_n$, respectivamente, la varianza σ^2 de la variable aleatoria X es:

$$\sigma^2 = (x_1 - \mu)^2 \cdot P_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot P_2 + \ldots + (x_n - \mu)^2 \cdot P_n$$

  Donde μ corresponde a la esperanza de la variable aleatoria X.
- La desviación estándar σ corresponde a la raíz cuadrada de la varianza.

Usar la distribución binomial para analizar situaciones o experimentos.

- Un **ensayo de Bernoulli** es un experimento aleatorio en el que solo existen dos posibles resultados, usualmente identificados como éxito o fracaso, donde la probabilidad de éxito es p y la de fracaso es $1 - p$.
- Un **proceso de Bernoulli** es un experimento aleatorio, que consiste en repetir, una cantidad finita de veces, un ensayo de Bernoulli.
- Si una variable aleatoria X cuenta el número de éxitos que se observan en un proceso de Bernoulli, con n repeticiones, cada una con probabilidad de éxito p, tenemos que:

$$P(X = x) = C_x^{\,n} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x} \qquad \text{con } x = 0, 1, 2, ..., n.$$

$C_x^{\,n}$ corresponde a la cantidad de combinaciones de x elementos de un total de n.

En tal caso, se dice que la variable aleatoria X tiene **distribución binomial** y se denota $X \sim B(n, p)$. Su función de probabilidad está dada por $f(x) = C_x^{\,n} \cdot p^x\,(1 - p)^{n-x}$, con $x = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Emplear elementos básicos del muestreo aleatorio simple para inferir sobre la media de una población finita a partir de muestras extraídas.

- Población: es el conjunto de elementos del que queremos estudiar alguna de sus características.
- Muestra: es un subconjunto de la población que estudiamos.
- Dada una población con n elementos, se puede determinar la cantidad de muestras de tamaño k que se pueden extraer de dicha población, de la siguiente manera:
  - Si es sin reposición, la cantidad de muestras es $C_x^{\,n} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$, donde $n!$ es el factorial de n, es decir, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$.
  - Si es con reposición, la cantidad de muestras es $\dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.
- La media muestral es el promedio de los valores de la muestra.
- Si a partir de una población con n elementos se extrae una muestra de tamaño k, la media poblacional μ se puede estimar a partir de la media muestral $\overline{x}$. La estimación es más precisa si k se acerca al valor de n, es decir, si el tamaño de la muestra aumenta.

¿Cuánto sé?

Antes de comenzar, resuelve las siguientes actividades, que te permitirán recordar conceptos y procedimientos necesarios para abordar los contenidos de esta unidad.

1. **En el experimento "escoger al azar una persona en la calle" se define la variable aleatoria X: *edad de la persona*, medida en años.**
   a. ¿Cuáles son los posibles valores que puede tomar la variable aleatoria?
   b. Define otra variable aleatoria para el mismo experimento y determina los posibles valores que esta puede tener.

2. **En el experimento "lanzar dos dados", considera las variables aleatorias X: *suma de los puntos*, e Y: *puntaje menor entre los dos dados*.**
   a. Describe el espacio muestral del experimento.
   b. Calcula las probabilidades $P(X = 7)$, $P(X < 7)$, $P(Y = 3)$, $P(Y > 2)$.

3. **En el experimento "escoger una persona en la calle", se define la variable aleatoria X: estatura de la persona.**
   a. ¿Cuáles son los posibles valores que puede tomar la variable aleatoria?
   b. Define otra variable aleatoria para el mismo experimento.
   c. Explica con tus palabras qué es una variable aleatoria.

4. **Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica las falsas.**
   a. La esperanza siempre es un valor positivo.
   b. La desviación estándar siempre es un valor positivo.
   c. La esperanza de una muestra siempre es uno de los valores de la muestra.
   d. La esperanza siempre es mayor que la varianza.
   e. La varianza siempre es mayor que la esperanza.

5. **Si X es una variable aleatoria que tiene distribución $X \sim B(10; 0{,}7)$, determina:**
   a. μ
   b. σ^2
   c. $P(X = 8)$
   d. $P(X < 3)$
   e. $P(X < 5)$
   f. $P(X > 5)$

6. **Si $X \sim B(n, p)$, con $\mu = 12$ y $\sigma = 3$, determina:**
   a. n
   b. p
   c. $P(X < 14)$
   d. $P(X = 1)$
   e. $P(X < 5)$
   f. $P(X > 5)$

7. **Considera los siguientes resultados de un experimento aleatorio.**

   {1,70; 1,67; 1,72; 1,82; 1,72; 1,73; 1,65; 1,77; 1,66; 1,67; 1,65}

   a. Calcula la media, la varianza y la desviación estándar de los datos.
   b. Dibuja una tabla de frecuencias indicando: frecuencia absoluta, frecuencia relativa y frecuencia acumulada.
   c. ¿A qué experimento aleatorio puede corresponder esta muestra?, ¿cuál sería la variable aleatoria?

8. **Considere los siguientes resultados de un experimento aleatorio.**

   A = {1, 7, 7, 6, 1, 2, 1, 7, 1, 5, 1, 2}

   B = {4, 3, 3, 4, 5, 4, 2, 3, 4, 2, 3, 4}

   a. Sin hacer ningún cálculo, ¿qué muestra consideras tú que tiene mayor desviación estándar?, ¿cómo llegaste a esa conclusión?
   b. Si tanto la muestra A como la muestra B corresponden a notas de dos alumnos distintos, ¿qué estudiante tuvo mejor rendimiento?, ¿por qué?
   c. Agrega tres valores a la muestra A, que no cambien la media de la muestra.

9. **Una ruleta de casino tiene 36 números, un 0 y un 00. Si apuestas un número y la bolita cae en ese número, ganas 36 veces lo que apostaste. ¿Cuánta es la cantidad que puedes ganar si apuestas 100 pesos?, ¿conviene jugar a la ruleta? Justifica tu respuesta.**

10. **Manuel juega al siguiente juego: saca un naipe al azar de una baraja inglesa sin comodín (52 cartas, 13 números, 4 pintas). Si sale un 2, 3, 4 o 5, Manuel gana 5 puntos; si sale un 6, 7, 8, 9 o 10, Manuel pierde 5 puntos; si sale J, Q o K, no gana nada, y si sale un As, gana 20 puntos.**

a. ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?

b. ¿Cuál es la variable aleatoria asociada al juego?

c. Encuentra el "valor esperado" de puntos que ganará Manuel cada vez que juegue.

11. **Una fábrica de ampolletas tiene estimado que el 5 % de sus ampolletas llega defectuosa a las tiendas.**

a. ¿Cuál es la probabilidad de que, al sacar 2 ampolletas, ambas salgan quemadas?

b. Si las ampolletas vienen en cajas de 20 unidades, ¿cuál es el valor esperado de ampolletas defectuosas que vienen en una caja?

12. **A partir de los siguientes datos, desarrolla las actividades.**

{1, 2, 6, 7, 9, 11, 4, 6, 15, 21}

a. ¿Cuántas muestras de tamaño 2 pueden seleccionarse del conjunto anterior?

b. Selecciona 5 muestras al azar de tamaño 2 y calcula la media de ellas.

Marca la opción correcta en los ítems 13 y 14.

13. **Indica cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones es(son) verdaderas respecto de la media de una muestra.**

I. Es posible agregar datos a una muestra sin que cambie la media.

II. El único valor que se puede añadir a una muestra, sin que se altere la media, es el 0.

III. Si m es el valor de la media y agregas ese valor a la muestra, se mantiene la media de la muestra.

A. Solo I

B. Solo I y II

C. Solo II y III

D. Solo I y III

E. I, II y III

14. **¿Cuántas muestras de tamaño 3 pueden extraerse con los siguientes datos con y sin reposición, respectivamente?**

{4, 8, 4, 6, 1, 2, 6, 7}

A. 6 561 y 336

B. 512 y 336

C. 20 160 y 6 561

D. 20 160 y 336

E. 6 561 y 512

Revisa tus respuestas en el solucionario y marca las correctas.

Criterio	Ítems
Relacionar y aplicar los conceptos de variable aleatoria discreta, función de probabilidad y distribución de probabilidad.	1, 2 y 3
Determinar la esperanza, varianza y desviación estándar de variables aleatorias discretas.	4, 7 y 8
Usar la distribución binomial para analizar situaciones o experimentos.	5, 6, 9, 10 y 11
Emplear elementos básicos del muestreo aleatorio simple para inferir sobre la media de una población finita	12, 13 y 14

Si tuviste errores, revisa las páginas 280 y 281 del Texto, aclara tus dudas y corrígelos antes de continuar.

Variable aleatoria continua

Aprenderé a: interpretar el concepto de variable aleatoria continua y de función de densidad de una variable aleatoria continua.

Repaso

1. Menciona un ejemplo de una variable aleatoria discreta.
2. Si se lanzan 4 monedas, ¿cuál es la probabilidad de obtener 3 caras?

Al lanzar un dardo, la probabilidad de acertar en cualquier punto es la misma. Si la diana está dividida en regiones con diferente color, la probabilidad de que el dardo caiga en una región con un color determinado depende del área de la región.

Observa el siguiente blanco con las medidas dadas. Luego, responde.

- ¿Cuál es el área total del blanco?, ¿cuál es el área de la región de color azul?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el dardo caiga en la región de color azul?, ¿cómo lo hiciste?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el dardo caiga en el círculo de color rojo?

En cursos anteriores estudiaste que cada resultado de un experimento puede asociarse a un número real. La función que asocia un número real a cada elemento de un espacio muestral se denomina variable aleatoria. Por ejemplo, al lanzar tres monedas podemos definir la variable aleatoria X: *cantidad de sellos que aparecen*. Luego, los valores posibles que puede tomar X son {0, 1, 2, 3} y a cada resultado del experimento le corresponde uno de los números anteriores. Observa la tabla de la izquierda.

Resultado	Variable aleatoria
(c, c, c)	0
(c, c, s); (c, s, c); (s, c, c)	1
(c, s, s); (s, s, c); (s, c, s)	2
(s, s, s)	3

¿Lo entiendes?

El tiempo de espera en minutos, en un banco, es una variable aleatoria que puede tomar cualquier valor, desde 0 hasta una gran cantidad de minutos. Esta variable aleatoria, ¿es discreta o continua? Justifica tu respuesta.

En forma similar a como se clasificaron variables cuantitativas, las variables aleatorias pueden ser de dos clases: **discretas** y **continuas**.

Una **variable aleatoria discreta (VAD)** es aquella que puede asumir una cantidad finita de valores, o una cantidad infinita numerable de valores, como 0, 1, 2, … Por ejemplo, en una muestra aleatoria de 50 personas, la cantidad de personas que tiene ojos de color café es una variable aleatoria discreta, ya que los posibles valores que puede adoptar son {1 2, 3, ... , 50}.

Una **variable aleatoria continua (VAC)** es la que puede tomar cualquier valor numérico en un intervalo o conjunto de intervalos. Por ejemplo, la estatura de una persona escogida al azar corresponde a una variable aleatoria continua, ya que puede tomar cualquier valor posible en un intervalo.

Observa los siguientes ejemplos de diferentes variables aleatorias discretas y continuas.

Variable aleatoria X	Posibles valores de X	Tipo
Cantidad de respuestas correctas al responder 10 preguntas en una prueba.	0, 1, 2, ..., 10	Discreta
Cantidad de cm^3 completados al llenar con agua una botella de 375 cm^3.	$0 \leq X \leq 375$	Continua
Cantidad de ampolletas defectuosas al revisar 50 ampolletas.	0, 1, 2, 3, ..., 50	Discreta
Cantidad de segundos para armar la primera cara de un cubo de Rubik.	1, 2, 3, 4, ...	Discreta
Tiempo para armar la primera cara de un cubo de Rubik.	$X > 0$	Continua

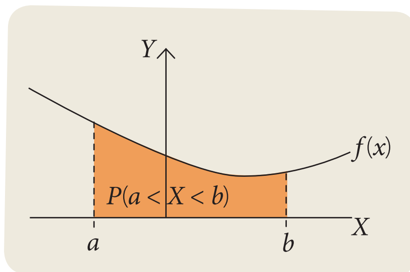
¿Lo entiendes?

¿Cuál es la diferencia entre las variables aleatorias de las dos últimas filas de la tabla? Explica.

En el curso anterior conociste la distribución binomial, que es una distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta. Recuerda que la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta describe cómo se distribuyen las probabilidades de los diferentes valores que puede tomar dicha variable aleatoria.

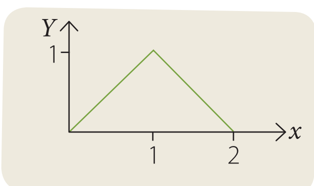
Así, en una variable aleatoria discreta la distribución de probabilidad se describe mediante una función de probabilidad $f(x)$. Esta función proporciona la probabilidad de que la variable tome un valor particular; en las variables aleatorias continuas, la función de probabilidad es llamada **función de densidad de probabilidad** (también se denota $f(x)$). A diferencia de la función de probabilidad, la función de densidad no determina directamente dicha probabilidad, sin embargo, el área bajo la gráfica de $f(x)$ entre dos puntos, a y b, determina la probabilidad de que la variable aleatoria continua tome un valor en dicho intervalo.

En otras palabras, si la variable aleatoria continua X tiene función de densidad $f(x)$, la probabilidad de que X pertenezca al intervalo $[a, b]$ está dada por el área bajo la curva de f entre a y b, tal como se representa en la figura de la derecha.



Para que una función $f(x)$ sea una función de densidad se debe cumplir que:

1. $f(x) >= 0$ para todo valor de x.
2. El área bajo la curva de f en su dominio es igual a 1. Esta propiedad es análoga a aquella que en el caso de variables aleatorias discretas establece que la suma de todas las probabilidades debiera ser igual a 1.



Por ejemplo, la función cuya gráfica está en la figura de la izquierda puede ser una función de densidad de una variable aleatoria continua, pues cumple con las dos propiedades anteriores: $f(x) \geqslant 0$ para cualquier valor de x, y el área bajo la curva es igual a 1. Si te fijas, en este caso el dominio de f es el intervalo [0, 2]. Esto significa que la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor entre 0 y 2 es 1, es decir, un 100 %.

¿Lo entiendes?

Explica por qué el área bajo la curva es igual a 1.

Imagina que escoges aleatoriamente a una persona en la calle y mides su masa. Podríamos preguntarnos cuál es la probabilidad de que la masa de la persona sea 76,43 kg. Esta es una situación compleja ya que, al considerar ese número estamos buscando personas cuya masa, en kilogramos, sea exactamente 76,430000... Sin embargo, al hallar a una persona que mase 76,43 kg, según cierta balanza, es seguro que al utilizar otro instrumento de mayor precisión sigamos observando valores diferentes, por ejemplo, 76,431 kg o 76,43001 kg.

Atención

Como la probabilidad de que una VAC tome un valor fijo es 0, entonces se cumple que:

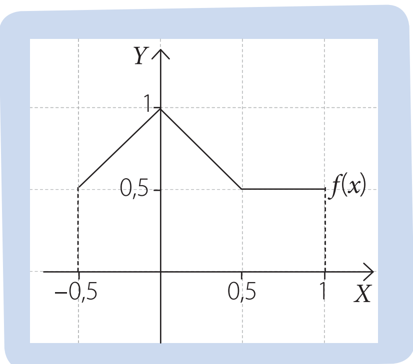
$$P(b < X < a) = P(b < X \leqslant a) = P(b \leqslant X < a) = P(b \leqslant X \leqslant a)$$

En otras palabras, en una variable aleatoria continua X, la probabilidad de que esta tome exactamente un valor a es 0, es decir, $P(X = a) = 0$.

Quizás tiene más sentido preguntarse cuál es la probabilidad de encontrar a una persona cuya masa se ubique, por ejemplo, entre 75 kg y 80 kg. Es decir, en una variable aleatoria continua lo natural es calcular la probabilidad de que la variable aleatoria se encuentre en un intervalo dado. Fíjate en que, a medida que el intervalo se hace cada vez más pequeño, más difícil es encontrar a una persona cuya masa se ubique en ese intervalo.

¿Cómo hacerlo?

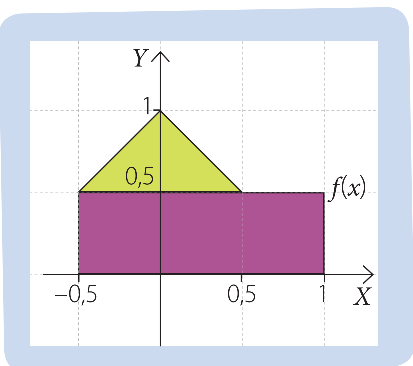
A partir de la función f, definida en el intervalo [–0,5; 1] y cuya gráfica se muestra en la figura de la izquierda:



a. Determina si f puede ser la función de densidad de una VAC.

Para que f pueda ser la función de densidad de una variable aleatoria continua deben cumplirse dos condiciones:

1. $f(x) \geqslant 0$. Si te fijas, esta condición se cumple, ya que la gráfica de f siempre se encuentra sobre el eje X; en otras palabras, los valores que toma $f(x)$ siempre son positivos.
2. El área bajo la curva de f es igual a 1. En este caso, podemos calcular el área bajo la curva a partir del área de los rectángulos y triángulos. Si te fijas, dividimos la superficie bajo la gráfica en un rectángulo de color morado y en un triángulo de color verde. El área del rectángulo es $1{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}75\ \mu^2$, mientras que el área del triángulo es $\frac{1 \cdot 0{,}5}{2} = 0{,}25\ \mu^2$. Luego, el área total bajo la gráfica de f es $0{,}75 + 0{,}25 = 1\ \mu^2$.



Por lo tanto, como se cumplen ambas condiciones, podemos afirmar que f puede ser la función de densidad de una variable aleatoria continua.

b. Calcula $P(X = 0{,}5)$, $P(X < 0)$, $P(0{,}5 < X < 1)$ y $P(X > 2)$.

Como la probabilidad de que una VAC tome un valor fijo siempre es 0, entonces tenemos que $P(X = 0{,}5) = 0$. A su vez, como la funcion está definida en el intervalo [–0,5; 1], cualquier probabilidad fuera de ese intervalo es 0, es decir, $P(X > 2) = 0$.

$P(X < 0)$ es igual al área bajo la curva de f en el intervalo [–0,5; 0], es decir, 0,375. Luego, $P(X < 0) = 0{,}375$.

Finamente, $P(0{,}5 < X < 1)$ corresponde al área bajo la curva de la función f en el intervalo [0,5; 1]. Luego, $P(0{,}5 < X < 1) = 0{,}25$.

Tomo nota

- Una **variable aleatoria continua (VAC)** es una función que, a cada posible resultado de un experimento, le asigna cualquier número real en un intervalo o un conjunto de intervalos.
- La distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua se describe mediante una **función de densidad** $f(x)$, la cual debe cumplir con dos propiedades: para todo x, $f(x) \geqslant 0$, y el área bajo la gráfica de f es igual a 1.
- La probabilidad de que una VAC se encuentre entre dos valores a y b, o sea, $P(a < X < b)$, se calcula a partir del área bajo la gráfica de f en el intervalo $[a, b]$.

Actividades

1. **En cada caso, determina si la variable aleatoria es discreta o continua y, luego, escribe los valores posibles que la variable puede tomar.**
   a. Cantidad de respuestas incorrectas en un examen de 100 preguntas.
   b. Cantidad de automóviles que atraviesan el peaje de una carretera en un tiempo determinado.
   c. Tiempo empleado por los competidores en recorrer el circuito.
2. **Menciona tres ejemplos de variables aleatorias continuas y tres de variables aleatorias discretas.**
3. **De las siguientes funciones definidas en los intervalos dados, determina cuál o cuáles pueden ser funciones de densidad de una VAC. Argumenta tu respuesta en cada caso.**
   a. $f(x) = 1, x \in [0, 1]$
   b. $f(x) = x - 1, x \in [1, 3]$
   c. $f(x) = -1, x \in [0, 1]$
   d. $f(x) = 0{,}5x, x \in [0, 1]$
4. **Dibuja en tu cuaderno la gráfica de una función de densidad y, luego, pídele a tu compañero que la verifique.**
5. CONEXIÓN CON EL DEPORTE ▶ **La función de densidad de la variable aleatoria X, que mide la distancia entre el centro de una diana y la marca dejada por el lanzamiento realizado por una persona, es $f(x) = 0{,}5$, definida en el intervalo $[-1, 1]$, donde los valores positivos de X corresponden a tiros por encima del centro y los valores negativos X corresponden a tiros por debajo del centro.**
   a. Verifica que f sea una función de densidad.
   b. Determina los valores de $P(X \leqslant 0{,}1)$, $P(X = 0{,}8)$, $P(-0{,}5 < X \leqslant 0{,}3)$ y $P(X < -1)$.
   c. Determina un intervalo $[a, b]$ tal que se cumpla que $P(a < X < b) = 0{,}5$.
   d. Si una persona lanza una flecha, ¿cuál es la probabilidad de que la distancia al centro esté a menos de 0,5 unidades por encima?
   e. ¿Cuál es la probabilidad de que un tiro esté a 0,3 unidades alrededor de la diana?

Desafío

¿Para qué valor de a la función $f(x) = ax$, definida en el intervalo $[5, 7]$, puede ser función de densidad para una variable aleatoria continua?

Antes de continuar

1. ¿Cuál es la diferencia entre una variable aleatoria discreta y una continua? Da un ejemplo de cada una.
2. Explica por qué la función $f(x) = 2x$, definida en el intervalo $[-1, 1]$, no puede ser una función de densidad para una variable aleatoria continua.

Distribución de probabilidad normal

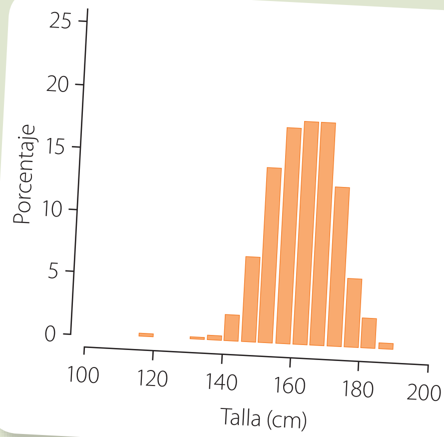
Aprenderé a: conocer la distribución normal.

Repaso

1. Nombra tres situaciones que se representen con una variable aleatoria continua.

Según la Segunda Encuesta Nacional de Salud, la distribución de la estatura de los adultos chilenos se puede representar mediante el siguiente gráfico.

- Describe con tus palabras los datos representados en el gráfico.
- Si eliges a una persona al azar, ¿qué estatura es más probable que esta tenga?, ¿cómo lo supiste?

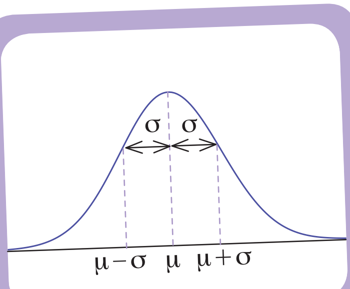


Una de las distribuciones más importantes, cuando se quiere describir una variable aleatoria continua, es la **distribución normal**, ya que tiene muchas aplicaciones en variados contextos; por ejemplo, la estatura y la masa de las personas, mediciones científicas, precipitaciones, puntajes de pruebas, entre muchas otras.

La función de densidad de una variable aleatoria con distribución normal está dada por la expresión:

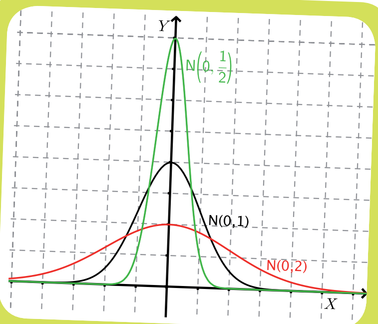
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Donde σ y μ son números reales y, además, $\sigma > 0$.



En este caso, decimos que la variable aleatoria X tiene distribución normal con media μ y desviación estándar σ, y la denotamos como $X \sim N(\mu, \sigma)$. Su gráfica es una curva con forma de campana, tal como se muestra en la figura de la izquierda.

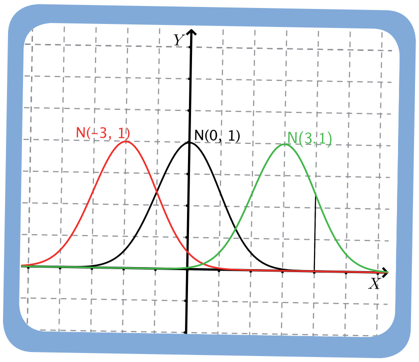
El valor de los parámetros σ y μ influyen en la forma de la gráfica de la función de densidad de la distribución normal. Por ejemplo, las gráficas de la derecha muestran ejemplos de distribuciones con la misma media μ, pero diferente desviación estándar σ.



Si te fijas, la desviación estándar depende de cuán dispersos estén los datos: a mayor desviación estándar, la gráfica es más baja y más ancha, ya que los datos se encuentran más dispersos.

También se puede observar que la función de densidad es simétrica respecto de la media. En los gráficos anteriores, como todas las distribuciones tienen media igual a 0, el eje de simetría de la función es el eje Y.

Por otra parte, las gráficas de la derecha corresponden a las funciones de densidad de tres variables aleatorias con distribución normal, con diferente media y la misma desviación estándar.

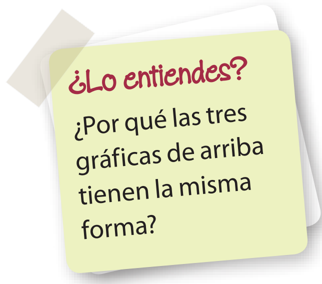


Para una variable aleatoria X con distribución normal se cumple que los valores de la función densidad son simétricos con respecto al valor de la media, que es el valor central y en torno al cual es más probable que la variable aleatoria tome valores, disminuyendo la probabilidad a medida que nos alejemos de ella.

Observa las gráficas de la derecha. Todas tienen la misma forma sin embargo el eje de simetría de las funciones cambia ya que las distribuciones poseen medias diferentes.

Otras propiedades de esta curva son las siguientes:

Los extremos se prolongan de modo indefinido en ambas direcciones y, teóricamente, nunca tocan el eje horizontal aunque se aproximan a él.

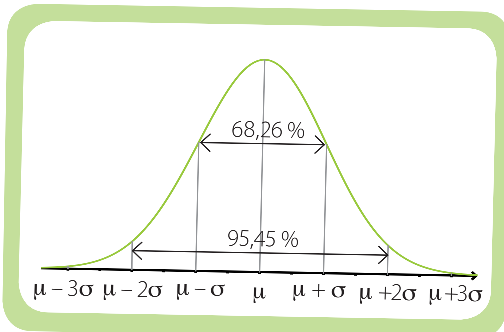


Las probabilidades para la variable aleatoria con distribución normal se definen mediante áreas bajo la curva. Como la curva normal representa una función de densidad, entonces el área total bajo la curva debe ser igual a 1; además, como la distribución es simétrica, el área bajo la curva a la izquierda de la media es 0,5 y el área bajo la curva a la derecha de la media, 0,5.

Para la distribución normal se cumple que:

- El 68,26 % de los valores de una variable aleatoria normal está dentro de más o menos una desviación estándar de su media.
- El 95,45 % de los valores de una variable aleatoria normal está dentro de más o menos dos desviaciones estándar de su media.
- El 99,73 % de los valores de una variable aleatoria normal está dentro de más o menos tres desviaciones estándar de su media.

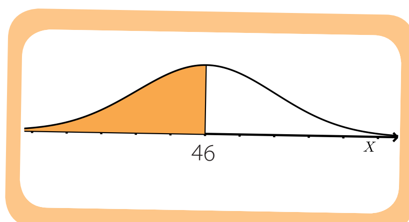
La gráfica de la derecha muestra la situación anterior:



¿Cómo hacerlo?

En un hospital, las estaturas, en centímetros, de los recién nacidos se distribuyen $N(46, 2)$. ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido mida menos de 46 cm?

Como las estaturas de los recién nacidos se distribuyen $N(46, 2)$, significa que la media de la distribución es 46 cm y la desviación estándar, 2 cm. Luego, para calcular la probabilidad de que un recién nacido mida menos de 46 cm, calculamos el área bajo la curva de la función densidad en el intervalo $]-\infty, 46[$, como se muestra en la figura. Sin embargo, como la función es simétrica y el eje de simetría es la media, el área bajo la curva es igual a 0,5. Por lo tanto, la probabilidad de que un recién nacido mida menos de 46 cm es 0,5.



Tomo nota

- Una variable aleatoria continua X tiene una distribución normal si su función de densidad es de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

donde μ es la media y σ, la desviación estándar. Se denota $X \sim N(\mu, \sigma)$.

- La gráfica de una distribución normal es una curva en forma de campana, que es simétrica respecto de la media. El área bajo esta curva es 1.

Actividades

1. **Escribe al menos cuatro experimentos aleatorios en los cuales esperarías que la mayor cantidad de resultados estén concentrados alrededor de la media y que, a medida que te alejas hacia los extremos, la frecuencia baje cada vez más. Menciona, además, cuatro experimentos o situaciones en que esperas que esto no ocurra.**
2. **Determina cuál o cuáles de los siguientes casos se podrían modelar con una distribución normal.**
   a. Sueldos que se pagan en una empresa.
   b. Edad a la que una persona muere.
   c. Masa de los estudiantes de la misma edad de un colegio.
   d. Estatura de una persona en el tiempo.
   e. Velocidad de los vehículos en cierto punto de la carretera.
   f. Notas de los estudiantes en una prueba.
3. **De un colegio mixto egresaron 210 varones y 225 damas. Las estaturas de los varones se distribuyen $N(1{,}71; 0{,}4)$, y las de las damas, $N(1{,}64; 0{,}3)$, en metros.**
   a. ¿Cuántos varones miden más de 1,71 m?
   b. ¿Cuántas damas miden menos de 1,64 m?
   c. Si se selecciona a un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que mida a lo más 1,67 m?
4. **Los tiempos, en segundos, realizados en las prácticas de atletismo del Colegio Cordillera se distribuyen $N(12{,}8; 0{,}8)$ y los tiempos del Colegio Entrelagos, $N(12{,}2; 1)$. Determina qué porcentaje de atletas:**
   a. del Colegio Cordillera demoraron más de 12,8 s.
   b. del Colegio Cordillera demoraron menos de 13,6 s.
   c. del Colegio Entrelagos demoraron más de 10,2 s.
   d. del Colegio Entrelagos demoraron menos de 13,2 s.
5. **La variable aleatoria X tiene distribución normal con media 2 y desviación estándar 1. Escribe su función de densidad.**

Si tenemos una variable aleatoria continua con distribución normal, en la que la media es igual a 0 y la desviación estándar igual a 1, es decir, $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, entonces la variable aleatoria tiene **distribución normal estándar** y se denota $X \sim N(0, 1)$.

Para el cálculo de probabilidades en distribución normal estándar se han construido tablas que presentan las áreas bajo las curvas y, por lo tanto, permiten determinar de manera rápida las probabilidades de que el valor de una variable aleatoria se encuentre en un intervalo. En la página 429 se presenta una tabla que permite calcular la probabilidad de que una variable aleatoria con distribución normal estándar sea menor que un valor dado z, es decir, $P(X < z)$.

Por ejemplo, calculemos la probabilidad de que una variable aleatoria con distribución normal estándar tome un valor menor o igual a 1,41, o sea, $P(X \leqslant 1{,}41)$. Para esto usamos la tabla de la página 429 de la siguiente manera:

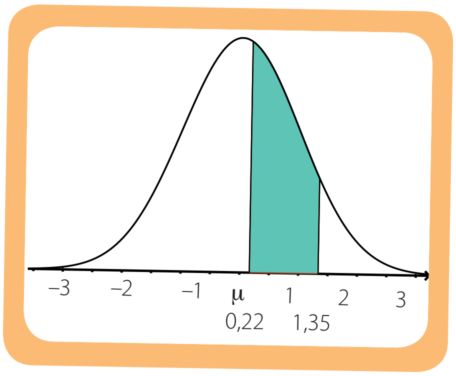
En la primera columna de la tabla ubicamos las unidades y las décimas de z; en este caso, el 1,4. Luego, en la primera fila buscamos las centésimas de z, es decir, el 0,01. Finalmente, intersecamos la fila con la columna correspondiente donde están los valores anteriores. En nuestro ejemplo, obtenemos finalmente el número 0,92073. Es decir, la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor menor o igual a 1,41 es 0,92073.

z	0	0,01	0,02	...
⋮				
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	...
⋮				

¿Cómo hacerlo?

Dada una variable aleatoria continua que distribuye $N(0, 1)$, calcula la probabilidad de que tome un valor entre 0,22 y 1,35.

Para determinar la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor entre 0,22 y 1,35, debemos calcular el área bajo la curva de la función de densidad entre estos dos valores, tal como se muestra en la figura.



Observa que si al área entre $-\infty$ y 1,35 le quitamos el área entre $-\infty$ y 0,22, obtendremos el área sombreada. Entonces, calculamos $P(0{,}22 < X < 1{,}35)$ como $P(X < 1{,}35) - P(X < 0{,}22)$.

Usamos la tabla de la página 429 para calcular los valores de $P(X < 1{,}35)$ y $P(X < 0{,}22)$. Tenemos:

$P(X < 1{,}35) = 0{,}91149$

$P(X < 0{,}22) = 0{,}58706$

z	...	0,05	...
⋮			
1,3		0,91149	...
⋮			

z	...	0,02	...
⋮			
0,2	...	0,58706	...
⋮			

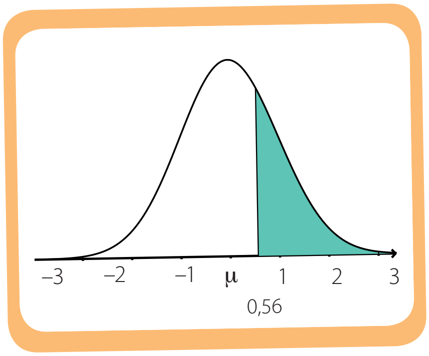
Finalmente, restamos los valores anteriores para calcular la probabilidad pedida:

$$\begin{aligned} P(0{,}22 < X < 1{,}35) &= P(X < 1{,}35) - P(X < 0{,}22) \\ &= 0{,}91149 - 0{,}58706 \\ &= 0{,}32443 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor entre 0,22 y 1,35 es 0,32443.

¿Cómo hacerlo?

Calcula la probabilidad de que una variable aleatoria con distribución normal estándar tome un valor mayor que 0,56.



La figura muestra el área bajo la curva cuyo valor representa la probabilidad pedida. Si te fijas, el área pintada se puede calcular restando el área entre $-\infty$ y 0,56 al área total. Como el área total es igual a 1 y el área entre $-\infty$ y 0,56 corresponde al valor de $P(X < 0{,}56)$, tenemos:

$$P(X > 0{,}56) = 1 - P(X < 0{,}56)$$

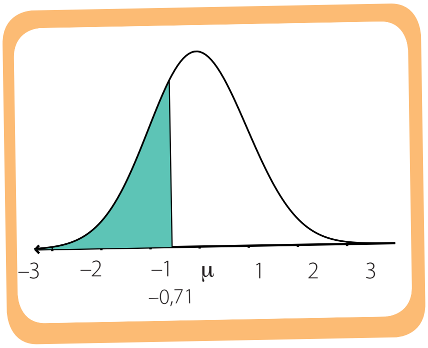
A partir de la tabla de la página 429 determinamos que $P(X < 0{,}56) = 0{,}71226$, y finalmente:

$$\begin{aligned} P(X > 0{,}56) &= 1 - P(X < 0{,}56) \\ &= 1 - 0{,}71226 \\ &= 0{,}28774 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que una variable aleatoria con distribución normal estándar tome un valor mayor que 0,56 es 0,28774.

¿Cómo hacerlo?

Calcula la probabilidad de que una variable aleatoria con distribución normal estándar tome un valor menor que –0,71.



La figura muestra el área bajo la curva cuyo valor representa la probabilidad pedida. Si te fijas, en la tabla de la página 429 no hay valores negativos, pero dado que la distribución normal estándar es simétrica respecto al cero, se cumple que $P(X < -0{,}71) = 1 - P(X < 0{,}71)$. Revisando esta tabla tenemos que $P(X < 0{,}71) = 0{,}7612$

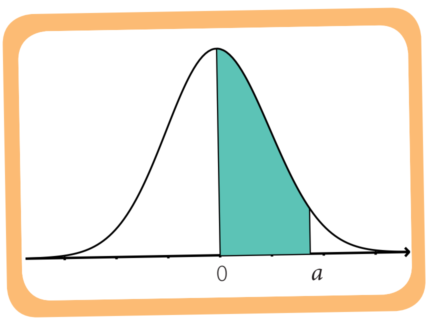
Entonces, remplazando:

$$P(X < -0{,}71) = 1 - P(X < 0{,}71) = 1 - 0{,}7612 = 0{,}2388.$$

Luego la probabilidad pedida es 0,2388.

¿Cómo hacerlo?

Si la gráfica de la figura representa la función de densidad de una VAC que distribuye $N(0, 1)$, determina el valor de a, de modo que el área bajo la curva entre 0 y a sea 0,45907.



El área a la izquierda de la media es 0,5. Luego, si sumamos esta área con el área pintada, tenemos:

$0{,}5 + 0{,}45907 = 0{,}95907.$

Este último valor corresponde al área bajo la curva en el intervalo $]-\infty, a[$ y equivale a $P(X < a)$.

Finalmente, si nos fijamos en la tabla de la página 429, observamos que el valor 0,95907 se obtiene cuando a es igual a 1,74.

z	...	0,04	...
⋮			
1,7		0,95907	...
⋮			

¿Lo entiendes?

¿Por qué el área a la izquierda de la media es 0,5?

Tomo nota

- Una variable aleatoria continua X tiene una distribución normal estándar si su función de probabilidad es una distribución normal en la que la media es 0 y la desviación estándar es 1. Se denota $X \sim N(0, 1)$.
- La gráfica de la funcion densidad de una variable aleatoria continua con distribución normal estándar tiene forma de campana, es simétrica con respecto al eje de las ordenadas (eje Y) y es asintótica al eje de las abscisas (eje X).

Actividades

1. Z es una variable aleatoria con distribución normal estándar. Utilizando la tabla de la distribución normal, encuentra los valores de z tales que:

a. $P(Z < z) = 0{,}5$
b. $P(Z < z) = 0{,}5871$
c. $P(Z > z) = 0{,}2396$
d. $P(Z > z) = 0{,}91149$
e. $P(Z < z) = 0{,}8289$
f. $P(Z > z) = 0{,}07927$

2. Usando la tabla de la distribución normal, calcula las siguientes probabilidades, asumiendo que Z es una variable aleatoria que distribuye $N(0, 1)$.

a. $P(Z < 1{,}34)$
b. $P(Z \leqslant 1{,}34)$
c. $P(Z < -1{,}85)$
d. $P(Z > 1)$
e. $P(2 < Z < 3{,}4)$
f. $P(Z = 1)$

3. Sea X una variable aleatoria con distribución normal estándar.

a. ¿Cuál es la desviación estándar de la distribución?, ¿y la media?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que X tome un valor mayor que 1?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que X tome un valor menor que 0,57?
d. ¿Cuál es la probabilidad de que X sea igual a 1?

4. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas respecto de una variable aleatoria Z con distribución normal estándar. Justifica las falsas.

a. $P(Z = 0)$ es igual a la media de la distribución.
b. $P(Z > 1) = P(Z < 1)$
c. $P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1)$
d. $P(0 < Z < 1) < P(0 \leqslant Z \leqslant 1)$

6. En una fábrica de clavos, la diferencia entre la medida ideal de un clavo y su medida real tiene una distribución normal estándar, considerando las medidas en milímetros.

a. En promedio, ¿cuántos milímetros de diferencia hay entre la medida real del clavo y su longitud ideal? Explica tu respuesta.
b. Si se escoge un clavo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que mida 0,34 mm menos de lo que debiera medir realmente?
c. Si se escoge un clavo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que mida 1,23 mm más de lo que debiera medir realmente?

Antes de continuar

1. ¿Qué tipo de situaciones crees que podrían ser modeladas con la distribución normal? Explica.
2. Si X es una variable aleatoria que distribuye $N(0, 1)$, explica, paso a paso, el procedimiento que usarías para calcular la probabilidad de que X tome un valor que se encuentre entre $-0{,}5$ y $0{,}5$.

Aplicaciones de la distribución normal

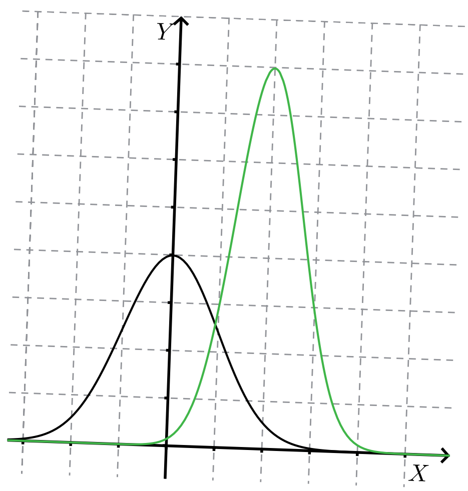
Aprenderé a: aplicar la distribución normal en diversas situaciones.

Repaso

1. Da tres ejemplos de variables aleatorias que distribuyan en forma normal.
2. ¿Cómo identificas la media a partir de la gráfica de una distribución normal?

En la figura se muestran las gráficas de funciones de densidad de dos variables aleatorias continuas con distribución normal.

- ¿En qué se parecen las gráficas?, ¿en qué se diferencian?
- ¿Qué puedes decir acerca de sus medias?, ¿y de sus desviaciones estándar?
- ¿Cuál de las variables aleatorias representadas en las gráficas corresponde a una con distribución normal estándar?, ¿por qué?



En la lección anterior aprendiste que una de las distribuciones más importantes de las variables aleatorias continuas es la distribución normal. Además, aprendiste a calcular probabilidades asociadas a la distribución normal estándar usando la tabla de la página 429. Sin embargo, en la vida diaria la gran mayoría de las situaciones que pueden modelarse usando variables aleatorias con distribución normal no corresponden siempre a la forma estándar, sino que su media y su desviación estándar pueden adoptar cualquier valor.

Para nuestra tranquilidad, la tabla de la página 429 no solo nos permite calcular probabilidades relacionadas con la distribución normal estándar, sino que también podemos calcular probabilidades relacionadas con cualquier distribución normal. Esto se debe a que todas las distribuciones de probabilidades normales se determinan a partir de la normal estándar; es decir, si x es un valor que toma una variable aleatoria X, que tiene una distribución normal con media μ y desviación estándar σ, podemos definir el valor z que toma otra variable aleatoria Z de la siguiente manera:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

En este caso, Z es una variable aleatoria que tiene una distribución normal estándar y, por lo tanto, podemos calcular probabilidades asociadas a Z usando la tabla de la página 429.

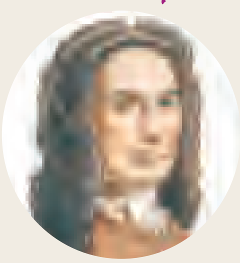
Si te fijas, cuando $X \sim N(0, 1)$, entonces $z = \frac{x - 0}{1} = x$.

Por lo tanto, la variable aleatoria Z toma los mismos valores que X, ya que ambas distribuyen en forma normal estándar.

Cuando $X \sim N(\mu, \sigma)$, el valor de z para $x = \mu$ es $z = \frac{\mu - \mu}{\sigma} = \frac{0}{\sigma} = 0$.

Podemos observar que un valor x igual a la media μ corresponde a un valor z igual a 0, tal como sucede en una distribución normal estándar.

Invitado especial



Archivo editorial

Abraham de Moivre

Fue quien presentó por primera vez la distribución normal en un artículo que publicó en 1733.

Sin embargo, el nombre "campana" lo propuso Esprit Jouffret en 1872, quien la llamó *bell surface* o superficie de campana.

¿Cómo hacerlo?

El resultado de una prueba de 4º medio tiene una distribución $N(5{,}3;\ 0{,}6)$. Si 150 estudiantes rindieron la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que al escoger a un estudiante al azar este haya logrado al menos un 6,0?

Necesitamos obtener $P(X \geqslant 6{,}0)$. Entonces, podemos calcular $P(X < 6{,}0)$ y después restar a 1 el resultado, para conseguir la probabilidad pedida. Dado que la distribución no corresponde a la forma normal estándar, debemos realizar el cambio de variable:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{6{,}0 - 5{,}3}{0{,}6} = \frac{0{,}7}{0{,}6} = 1{,}1\overline{6} \approx 1{,}17$$

Luego, el valor de $P(X < 6{,}0)$ es aproximadamente igual al valor de $P(Z < 1{,}17)$. Utilizamos la tabla de la página 429 para determinar $P(Z < 1{,}17)$, de donde obtenemos que $P(Z < 1{,}17) = 0{,}879$.

z	...	0,07	...
⋮			
1,1		0,879	...
⋮			

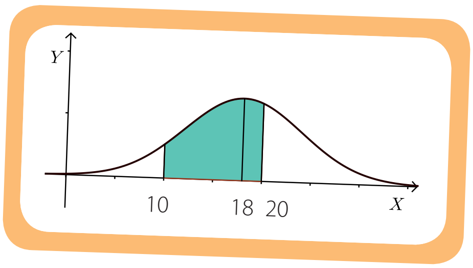
Por lo tanto, $P(X < 6{,}0) = 0{,}879$. Finalmente, la probabilidad buscada es su complemento, o sea:

$P(X \geqslant 6{,}0) = 1 - 0{,}879 = 0{,}121$

En definitiva, la probabilidad de escoger un estudiante con nota igual o mayor que 6,0 es 0,121, o bien se puede decir que el 12,10 % del total de estudiantes logró una calificación mayor o igual a 6,0.

¿Cómo hacerlo?

Se ha calculado que el tiempo de espera en la fila de un banco tiene una distribución $N(18, 6)$, en minutos. Calcula la probabilidad de que una persona tenga que esperar entre 10 y 20 minutos en la fila.



Necesitamos calcular la probabilidad $P(10 < X < 20)$, que equivale a la diferencia entre $P(X < 20)$ y $P(X < 10)$. Luego, calculamos los valores de Z asociados a los valores de X:

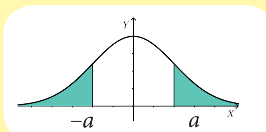
cuando $x = 10$: $z = \frac{10 - 18}{6} = -\frac{8}{6} = -1{,}\overline{3} \approx -1{,}33$

cuando $x = 20$: $z = \frac{20 - 18}{6} = \frac{2}{6} = 0{,}\overline{3} \approx 0{,}33$

Ahora usamos la tabla de la página 429 para calcular las probabilidades $P(Z < -1{,}33)$ y $P(Z < 0{,}33)$.

Para una VAC con distribución normal estándar se cumple que:

$P(X < -a) = P(X > a)$



Por simetría, $P(Z < -1{,}33) = P(Z > 1{,}33) = 1 - P(Z < 1{,}33) = 1 - 0{,}90824 = 0{,}09176$.

Además, $P(Z < 0{,}33) = 0{,}6293$.

Volvemos a la variable original:

$P(X < 20) = P(Z < 0{,}33) = 0{,}6293$ $\quad$ $P(X < 10) = P(Z < -1{,}33) = 0{,}09176$

Finalmente, calculamos la probabilidad buscada:

$P(10 < X < 20) = P(X < 20) - P(X < 10) = 0{,}6293 - 0{,}09176 = 0{,}53754$

Por lo tanto, la probabilidad de que una persona tenga que esperar entre 10 y 20 minutos es de 0,53754, o bien del 53,754 %.

Tomo nota

- Si $X \sim N(\mu, \sigma)$, entonces la variable aleatoria $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ tiene distribución normal estándar, es decir, $Z \sim N(0, 1)$.

Actividades

1. **Para cada una de las siguientes variables aleatorias con distribución normal, escribe el cambio de variable adecuado para que el resultado sea una variable aleatoria con distribución normal estándar.**
   a. $X \sim N(1, 1)$
   b. $X \sim N(1, 2)$
   c. $X \sim N(0, 2)$
   d. $X \sim N(2, 2)$
   e. $X \sim N(-6, 8)$
   f. $X \sim N(-3, 5)$

2. **Considera la variable aleatoria $X \sim N(2, 3)$. Usando la tabla de la distribución normal estándar, calcula las siguientes probabilidades.**
   a. $P(X > 0)$
   b. $P(X < 1{,}1)$
   c. $P(X > 2{,}3)$
   d. $P(X > -1{,}3)$
   e. $P(0 < X < 2{,}3)$
   f. $P(-1{,}3 < X < 1{,}1)$

3. **Considera las variables aleatorias $X \sim N(1, 2)$ y $Z \sim N(0, 1)$. Encuentra valores de a para que se cumpla lo pedido.**
   a. $P(Z < a) = 0{,}5$
   b. $P(Z > a) = 0{,}5$
   c. $P(Z < a) = 0{,}05$
   d. $P(X > a) = 0{,}1$
   e. $P(X > a) = 0{,}5$
   f. $P(X > a) = 0{,}05$

4. **Una variable aleatoria tiene distribución normal con media 80 y desviación estándar 54,8. Determina la probabilidades que la variable aleatoria tome un valor:**
   a. menor que 87,2.
   b. mayor que 76,4.
   c. entre 81,2 y 86.
   d. entre 71,6 y 88,4.

5. **Explica qué significa $X \sim N(a, b)$. ¿Cuál es la media de la variable aleatoria X?, ¿cuál es su varianza?, ¿y su desviación estándar?**

6. **Si $X \sim N(a + b, 2a - 4b)$, determina los valores de a y b, de modo que X tenga distribución normal estándar.**

7. **Los siguientes casos involucran variables aleatorias con distribuciones normales. Determina si la primera probabilidad es mayor, la segunda probabilidad es mayor o las dos probabilidades son iguales.**
   a. La probabilidad de que una variable aleatoria que tiene la distribución normal con media 50 y desviación estándar 10 tome un valor menor que 60, o la probabilidad de que una variable aleatoria que tiene distribución normal con media 500 y desviación estándar 100 tome un valor menor que 600.
   b. La probabilidad de que una variable aleatoria que tiene la distribución normal con media 40 y desviación estándar 5 tome un valor mayor que 40, o la probabilidad de que una variable aleatoria que tiene distribución normal con media 50 y desviación estándar 6 tome un valor mayor que 40.

La distribución normal ocupa un lugar bastante importante en la Estadística, porque, en general, se ajusta a las distribuciones de frecuencia reales observadas en muchos fenómenos, incluyendo características humanas (masa, estatura, coeficiente intelectual, etcétera), resultados de procesos físicos, puntajes de pruebas, entre muchas otras aplicaciones.

¿Cómo hacerlo?

Los puntajes de la PSU están distribuidos en forma normal, en una escala de puntajes con promedio 500 y desviación estándar 110. Si se escoge al azar a una persona que haya rendido la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona haya alcanzado un puntaje inferior a 650?

En este caso, el puntaje distribuye $N(500, 110)$. Luego, para calcular $P(X < 650)$, debemos realizar el cambio de variable, considerando que $x = 650$.

$$z = \frac{650 - 500}{110} = \frac{150}{110} = 1,\overline{36} \approx 1,36$$

Usando la tabla de la página 429, obtenemos $P(Z < 1,36) = 0,91308$.

Finalmente, como $P(X < 650) = P(Z < 1,36) = 0,91308$, podemos concluir que la probabilidad de que una persona haya logrado menos de 650 puntos es de 0,91308, es decir, que el 91,308 % de los puntajes estuvo bajo los 650 puntos.

Actividades

1. **La cantidad anual de terremotos a nivel mundial es una variable aleatoria que tiene aproximadamente una distribución normal con $\mu = 20$ y $\sigma = 4,5$. Determina la probabilidad de que en cualquier año de referencia haya:**
   a. exactamente 19 terremotos.
   b. a lo sumo 19 terremotos.
   c. como mínimo 19 terremotos.
2. **El tiempo promedio que emplea un suscriptor de una revista de farándula en leer la publicación es de 49 minutos, con una desviación estándar de 16 minutos. Supongamos que los tiempos de lectura tienen una distribución normal.**
   a. Calcula la probabilidad de que el suscriptor tarde al menos una hora en leer la revista.
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que el suscriptor no demore más de 30 minutos en leer la revista?
   c. Determina la probabilidad de que el lector tarde entre 33 y 65 minutos en leer la revista.
3. **La cantidad promedio de agua caída en una ciudad en el mes de abril es de 35 mm. Supón que la cantidad de lluvias es una variable aleatoria distribuida normalmente y con una desviación estándar de 8 mm. ¿Cuál es la probabilidad de que en un año cualquiera la cantidad de agua caída en la ciudad sea menor que 20 mm?**

Antes de continuar

1. Explica cómo lo harías para calcular la probabilidad de que una variable aleatoria que distribuye $N(7,2; 3,4)$ tome valores entre 7 y 9.

Proyecto de la unidad

El proyecto que aquí te presentamos deberás desarrollarlo por etapas a medida que avances en la unidad. Su objetivo es utilizar herramientas tecnológicas para simular variables aleatorias con distribución normal y aplicarlas al cálculo de medias muestrales e intervalos de confianza.

Con lo que has aprendido hasta aquí puedes avanzar en la etapa 1. Reúnete con un compañero y sigan las instrucciones.

Etapa 1

1. **Abran una planilla de cálculo y realicen las siguientes actividades.**
   a. Simulen 50 datos de una distribución normal de media 30 y desviación estándar 6, copiando el comando **=distr.norm.inv(aleatorio();30;6)** en las 50 casillas, desde A1 hasta A50.
   b. Seleccionen las casillas, luego la opción "copiar" y, situándose sobre la celda B1, seleccionen "edición-pegado especial" y marquen "valores"; de esta forma, en las nuevas celdas quedarán fijos los 50 datos simulados.
   c. En la celda C1 escriban **=(B1-30)/6** y presionen **Enter**. Luego, seleccionen la celda C1 y acerquen el *mouse* a la esquina inferior derecha de la celda seleccionada. Cuando la flecha cambie a una cruz negra, hagan clic y, sin soltar el botón, arrastren el *mouse* hasta la casilla C50.
   d. Expliquen qué representan los datos que aparecen en las celdas C1 a C50.
   e. En la celda D1, escriban el comando **=contar.si(C1:C50;"<0")**. Esta función permite contar los números del rango C1 a C50 menores que cero. ¿Cuántos esperarían que fueran?, ¿se parece su estimación a la cantidad real?
   f. En la celda E1, escriban el comando =**promedio(C1:C50)** para obtener la media m de la muestra. ¿Cómo es la media de la muestra respecto de la media real?
   g. En la celda F1, escriban el comando **=desvest(C1:C50)** para obtener la desviación estándar "s" de la muestra. ¿Cómo es la desviación estándar de la muestra respecto de la desviación estándar real?
   h. Con el comando **=contar.si(C1:C50:"<E1+F1")** obtendremos la cantidad de valores menores que $m + s$, y con el comando **=contar.si(RANGO;"<"E1-F1")**, los valores menores que $m - s$. Restando el segundo resultado al primero obtenemos la cantidad de valores que están entre $m - s$ y $m + s$.
   i. ¿Qué porcentaje de los datos se encuentra entre $m - s$ y $m + s$? Este resultado, ¿concuerda con el de una distribución normal? Justifiquen su respuesta.
   j. Guarden el archivo en el que trabajaron para que lo puedan utilizar en la etapa 2.

Etapa 2

1. **Abran el archivo con el que trabajaron en la etapa 1 y realicen las siguientes actividades.**
   a. En la celda G1, escriban =**promedio(C1:C5)** y presionen **Enter**. Luego, seleccionen la celda G1 y acerquen el *mouse* a la esquina inferior derecha de la celda seleccionada. Cuando la flecha cambie a una cruz negra, hagan clic y, sin soltar el botón, arrastren el *mouse* hasta la casilla G20. Los valores obtenidos entre G1 y G20 corresponden a las medias de 20 muestras de tamaño 5.
   b. Determinen el promedio de las medias muestrales obtenidas anteriormente. ¿Qué resultado obtuvieron?, ¿cómo es ese resultado comparado con el valor de la celda E1?, ¿y con la media de la distribución?
   c. Realicen el procedimiento anterior para calcular el promedio de las medias muestrales para medias con tamaño 6, 8, 10 y 12. ¿Qué ocurre con el promedio de las medias muestrales?, ¿para qué distribución de medias muestrales su promedio es más cercano al de la población?
   d. Guarden el archivo en el que trabajaron para que lo puedan utilizar en la etapa 3.

Etapa 3

1. **Abran el archivo con el que trabajaron en las etapas 1 y 2, y realicen las siguientes actividades.**
   a. A partir de los resultados obtenidos en las etapas anteriores, encuentren un intervalo de confianza al 95 % y otro al 99 % para el valor de la media de la variable aleatoria, cuya muestra corresponde a los valores obtenidos desde C1 hasta C50.
   b. ¿Cuál es la amplitud de los intervalos de confianza anteriores?
   c. Comparen la amplitud de ambos intervalos. ¿Cuál es más largo?, ¿cómo pueden interpretar esto?
   d. A partir de una muestra de tamaño 25, encuentren un intervalo de confianza al 95 % y otro al 99 % para el valor de la media de la variable aleatoria.
   e. ¿Cómo son los intervalos de confianza obtenidos respecto de los de la pregunta **a**?, ¿qué similitudes y diferencias hay entre ellos? Comenten.

Aproximación normal a la binomial

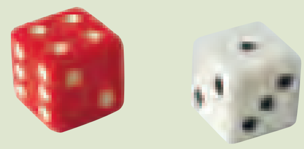
Aprenderé a: aproximar la probabilidad de la binomial por la probabilidad de la normal.

Repaso

1. ¿En qué situaciones se utiliza la distribución binomial?
2. Si X es una variable aleatoria tal que $X \sim B(6, 0{,}5)$, ¿cuál es la media y la varianza de la distribución?

Considera el experimento de lanzar un dado cinco veces y contar cuántas veces obtenemos un punto.

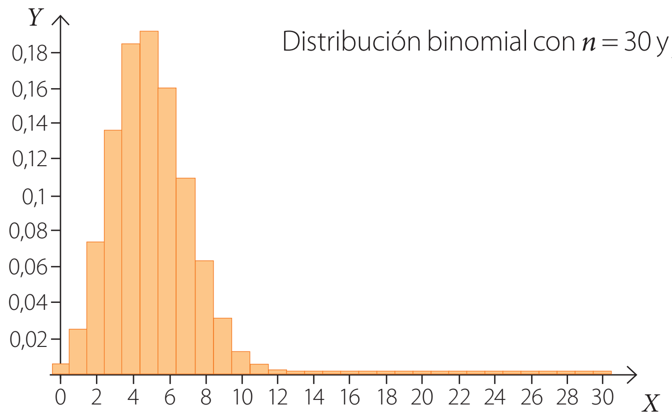
- ¿Qué probabilidad es mayor: obtener una vez un punto, o cinco veces?, ¿por qué?
- Si X es la cantidad de veces que obtenemos un punto, ¿X es una variable aleatoria continua o discreta?, ¿cómo lo supiste?

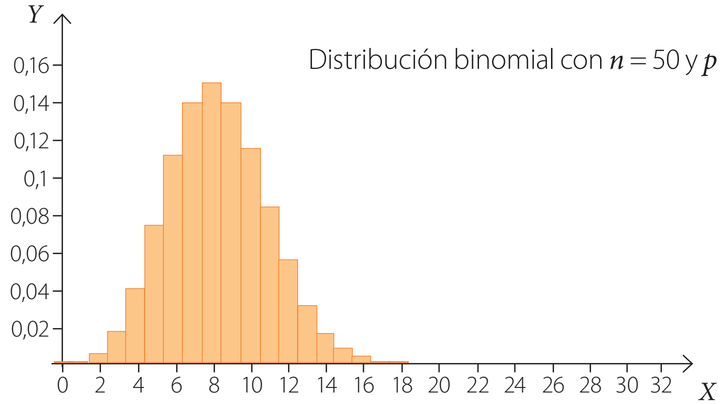


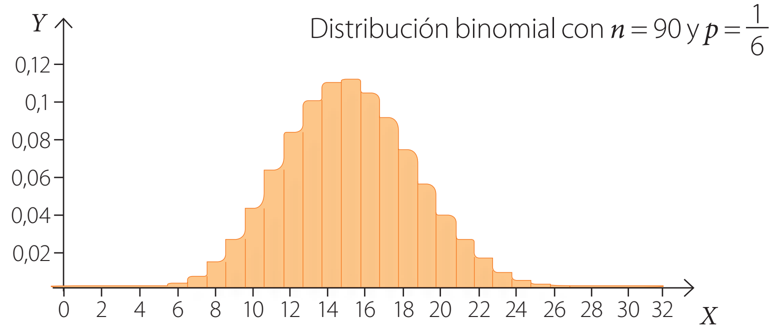
Archivo editorial

En cursos anteriores conociste la distribución binomial, que es una distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta definida como X: la cantidad de éxitos observados en n intentos independientes, con probabilidad p de éxito en cada uno, que se denota $X \sim B(n, p)$. En la actividad inicial, la situación podría modelarse con la variable aleatoria $X \sim B\left(5, \frac{1}{6}\right)$

Si quisiéramos hacer el mismo conteo del contexto inicial, pero esta vez lanzando el dado 30, 50 y 90 veces, obtendríamos los siguientes histogramas que muestran la función de probabilidad en cada caso:







Si te fijas, a medida que la cantidad de lanzamientos aumenta, los gráficos de la distribución binomial se van aproximando a la distribución normal. Luego, si n es lo suficientemente grande, la distribución binomial se puede aproximar por una normal de media $\mu = np$ y una desviación estándar $\sigma = \sqrt{np\,(1-p)}$.

En general, esto ocurre para cualquier distribución binomial en la que n sea un valor grande, y p y $1 - p$ no sean valores muy pequeños. Cuanto mayor es n, mejor se aproxima la distribución binomial a la normal. En la práctica, se estima que la aproximación es buena cuando se cumple que: $n \geqslant 30$, $np > 5$ y $n(1 - p) > 5$.

Por ejemplo, consideremos el gráfico de arriba en el que se representa la distribución para $n = 90$, $p = \frac{1}{6}$. En este caso, tenemos:

$$np = 90 \cdot \frac{1}{6} = 15$$

$$n(1-p) = 90 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) = 90 \cdot \frac{5}{6} = 75$$

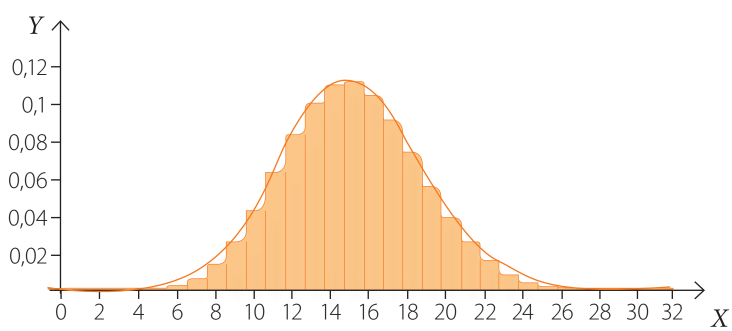
Como los valores anteriores son mayores que 5, entonces la distribución binomial se puede aproximar a una distribución normal de la forma $N(np, \sqrt{np\,(1-p)})$.

Calculamos la media y la desviación estándar de la distribución normal:

$$\mu = np = 90 \cdot \frac{1}{6} = 15$$

$$\sigma = \sqrt{np\,(1-p)} = \sqrt{90 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{12{,}5} \approx 3{,}54$$

Por lo tanto, la distribución binomial $B\left(90, \frac{1}{6}\right)$ se puede aproximar a la distribución normal $N(15; 3{,}54)$. Si te fijas, la gráfica de la función de densidad de una variable aleatoria continua que distribuye $N(15; 3{,}54)$ se ajusta a la distribución binomial $B\left(90, \frac{1}{6}\right)$.



Atención

Recuerda que en una distribución $B(n, p)$, la media es np y la desviación estándar es $\sqrt{np\,(1-p)}$.

¿Lo entiendes?

Explica por qué en las distribuciones anteriores el valor de p es igual a $\frac{1}{6}$.

¿Cómo hacerlo?

Un examen consta de 100 preguntas, cada una de las cuales tiene cuatro posibles respuestas, y solo una es correcta. Si se contesta al azar, calcula la probabilidad de acertar más de 30 preguntas.

Si definimos la variable aleatoria X como la cantidad de respuestas correctas, podemos observar que X sigue una distribución binomial en la que $n = 100$ y $p = 0{,}25$. Entonces, $X \sim B(100; 0{,}25)$.

Dado que X sigue una distribución binomial, para valores suficientemente grandes de n la distribución binomial se puede aproximar a la distribución normal. Luego, verificaremos si con $n = 100$ la aproximación es buena.

$np = 100 \cdot 0{,}25 = 25 > 5$ $\qquad$ $n(1 - p) = 100 \cdot 0{,}75 = 75 > 5$

Se cumplen ambas condiciones, de modo que la distribución normal se ajusta bien a la binomial.

Luego, calculamos los parámetros de la distribución normal a la que se aproxima.

$$\mu = np = 100 \cdot 0{,}25 = 25$$
$$\sigma = \sqrt{np\,(1 - p)} = \sqrt{100 \cdot 0{,}25 \cdot (1 - 0{,}25)} = 4{,}33$$

Entonces, tenemos que $X \sim B(100; 0{,}25) \approx N(25; 4{,}33)$.

Finalmente, para calcular la probabilidad de acertar a más de 30 preguntas usaremos la distribución normal asociada a la distribución binomial, es decir, hallaremos la probabilidad de que la variable aleatoria $X = N(25; 4{,}33)$ tome un valor mayor que 30, o sea, $P(X > 30)$. Dado que estamos aproximando una variable aleatoria discreta por una variable aleatoria continua, debemos aplicar la correcciòn por continuidad, es decir, calcular $P(X > 30{,}5)$ Ahora hacemos el cambio de variables respectivo:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{30{,}5 - 25}{4{,}33} = \frac{5{,}5}{4{,}33} \approx 1{,}27$$

Nos queda que $P(X > 30{,}5)$ equivale a $P(Z > 1{,}27)$. Usando la tabla de la página 429, obtenemos $P(Z < 1{,}27) = 0{,}8980$.

Por lo tanto, $P(Z > 1{,}27) = 1 - 0{,}8980 = 0{,}102$.

En consecuencia, la probabilidad de acertar a más de 30 preguntas es de 10,2 %.

Si hubiésemos calculado la probabilidad anterior a partir de la distribución binomial, hubiésemos tenido que calcular $P(X = 31) + P(X = 32) + ... + P(X = 100)$, lo que hubiera resultado muy largo y engorroso. De esta manera, la distribución normal nos permite calcular más fácilmente la probabilidad de que una variable aleatoria, que tiene distribución binomial, se encuentre en un rango de valores determinado o sea menor o mayor que un valor dado.

Atención

Si X es una variable aleatoria continua, entonces

$P(X = a) = 0$

$P(X < a) = P(X \leq a)$

Atención

Corrección por continuidad

En el caso de variables aleatorias continuas, se tiene que la probabilidad en el punto es 0. Luego, cuando aproximamos una variable aleatoria discreta Y por una variable aleatoria continua X, debemos realizar una corrección, llamada corrección por continuidad, con el fin de incluir o excluir, según sea el caso, valores puntuales.

Es decir:

$P(Y = a) = P(a - 0{,}5 \leq X \leq a + 0{,}5)$

$P(Y \leq a) = P(X \leq a + 0{,}5)$

$P(Y < a) = P(X \leq a - 0{,}5)$

$P(Y \geq a) = P(X \geq a - 0{,}5)$

$P(Y > a) = P(X \geq a + 0{,}5)$

Tomo nota

- Sea X una variable aleatoria discreta tal que $X \sim B(n, p)$. Cuando n es lo suficientemente grande, la distribución binomial se puede aproximar a una distribución normal de media $\mu = np$ y desviación estándar $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.
- Para que $N(np, \sqrt{np(1-p)})$ sea una buena aproximación de $B(n, p)$ debe cumplirse que: $n \geqslant 30$, $np > 5$ y $n(1-p) > 5$.
- Si Y es una variable aleatoria discreta que se aproxima a una variable aleatoria continua X, la corrección por continuidad implica:
  - $P(Y = a) = P(a - 0{,}5 \leqslant X \leqslant a + 0{,}5)$
  - $P(Y < a) = P(X \leqslant a - 0{,}5)$
  - $P(Y > a) = P(X \geqslant a + 0{,}5)$
  - $P(Y \leqslant a) = P(X \leqslant a + 0{,}5)$
  - $P(Y \leqslant a) = P(X \geqslant a - 0{,}5)$

Actividades

1. **Determina si las siguientes distribuciones binomiales pueden aproximarse, usando una distribución normal, de manera aceptable.**
   a. $B(4; 0{,}5)$ b. $B(20, 0{,}6)$ c. $B(50; 0{,}04)$ d. $B(20; 0{,}8)$ e. $B(100; 0{,}995)$ f. $B(75; 0{,}52)$

2. **Si $X \sim B(n, p)$, calcula aproximadamente las siguientes probabilidades con los valores n y p dados. Utiliza la tabla de la página 429.**
   a. $n = 200$, $p = 0{,}4$. $P(X < 120)$
   b. $n = 100$, $p = 0{,}5$. $P(X > 45)$
   c. $n = 200$, $p = 0{,}45$. $P(X > 80)$
   d. $n = 100$, $p = 0{,}6$. $P(50 < X < 70)$
   e. $n = 96$, $p = 0{,}4$. $P(X > 90)$
   f. $n = 50$, $p = 0{,}75$. $P(42 < X < 58)$

3. **Resuelve los siguientes problemas.**
   a. Un jugador de básquetbol lanza 230 tiros libres a lo largo de la temporada. Si su probabilidad de encestar en un lanzamiento libre es de 85 %, ¿cuál es la probabilidad de que enceste más de 185 tiros libres en la temporada?
   b. La probabilidad de que un piloto de carreras sufra un reventón en un circuito es 0,04. Si en la carrera participan 200 conductores, ¿cuál es la probabilidad de que se registren entre 12 y 18 reventones?
   c. El 7 % de los pantalones de una marca tiene algún defecto. Si se empaquetan en cajas de 80 unidades para distribuirlos, ¿cuál es la probabilidad de que en una caja haya más de 10 pantalones defectuosos?
   d. Leonardo y Ximena están jugando al ludo. Leonardo asegura que ha lanzado el dado 60 veces y no le ha salido ningún 5. Ximena afirma que eso es imposible. ¿Es realmente imposible? Justifica tu respuesta.

4. **El 10 % de las personas de una ciudad afirma que nunca ve televisión. Calcula la probabilidad de que:**
   a. escogidas 100 personas al azar, haya al menos 14 personas que no ven televisión.
   b. estas personas sean exactamente 4.
   c. de 250 personas elegidas al azar, menos de la mitad vea televisión.

5. **Una fábrica de componentes elabora 2 000 circuitos electrónicos al día. Si la probabilidad de fabricar un circuito defectuoso es del 1 %, ¿cuál es la probabilidad de que en un día el número de circuitos defectuosos sea mayor que 50?, ¿y menor que 25?**

Antes de continuar

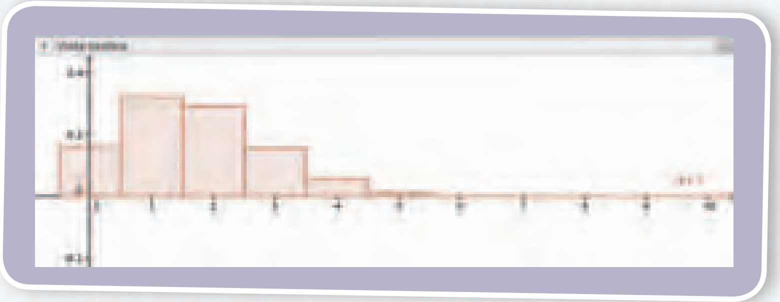
1. Explica qué condiciones debe cumplir una variable aleatoria con distribución binomial para aproximarla por una distribución normal.
2. ¿Por qué es útil aproximar una variable aleatoria binomial por una normal?, ¿para cuál de las dos es más difícil calcular una probabilidad?, ¿por qué?

Uso GeoGebra

EN PAREJAS

En la siguiente actividad utilizarán GeoGebra para simular experimentos aleatorios usando la distribución binomial y normal, y para verificar la aproximación normal de la binomial.

1. **A partir del experimento aleatorio de lanzar un dado 10 veces, definimos la variable aleatoria X como la cantidad de veces que se obtiene 1 punto. Como en cada lanzamiento la probabilidad de éxito es $p = \frac{1}{6}$, la distribución de probabilidad de la variable aleatoria es binomial de la forma $B\left(10, \frac{1}{6}\right)$. Abran el programa y realicen los siguientes pasos para simular la distribución anterior.**
   a. En la barra de entrada escriban **Binomial[10,1/6]**, de esta manera simularán la distribución binomial correspondiente a la variable aleatoria X. Para visualizar mejor la gráfica, hagan clic con el botón secundario sobre alguno de los ejes. Luego, elijan **EjeX : EjeY** y, luego, **5 : 1**. Obtendrán una distribución como la que se muestra a continuación



   b. Describan con sus palabras la distribución que obtuvieron, ¿qué valor es el más probable que tenga X?, ¿por qué?
   c. ¿Qué ocurre con la probabilidad de ocurrencia de X a medida que los valores de X aumentan?
   d. En este caso, ¿cuál es la media de la distribución?, ¿y la desviación estándar?

2. **Considera ahora el experimento de lanzar el mismo dado 50 veces y considera la variable aleatoria X de la actividad 1.**
   a. En este caso, ¿cuál es la probabilidad de éxito en cada lanzamiento?
   b. ¿Qué distribución tiene la variable aleatoria X?
   c. Utiliza el *software* para simular la distribución de probabilidades de la variable aleatoria en este caso. Describan la gráfica que obtuvieron.
   d. A partir de la gráfica, ¿qué valor es el más probable que tome X?, ¿cómo lo supieron?
   e. Calculen la media de la distribución y la desviación estándar. ¿Cómo es el valor que obtuvieron en d respecto de la media de la distribución?, ¿siempre ocurrirá lo mismo?, ¿por qué?

3. **Repitan la simulación del lanzamiento del dado para 100, 500 y 1 000 lanzamientos, considerando la misma variable aleatoria X. ¿Qué ocurre con la distribución a medida que la cantidad de lanzamientos aumenta?**

4. **Ahora, consideren la última distribución binomial que simularon, con 1 000 repeticiones, para aproximarla a una distribución normal.**
   a. Argumenten por qué, en este caso, la media de la distribución es igual a $\frac{1\,000}{6}$ y la desviación estándar es $\frac{25\sqrt{2}}{3}$.
   b. Utilizando los valores de media y desviación estándar anteriores usen el *software* para simular la distribución normal. Para esto escriban en la barra de entrada **Normal[1000/6, 25*sqrt(2)/3, x]**. Ajusten la proporción de los ejes de modo que puedan visualizar bien las gráficas. De esta manera obtendrán una distribución como la que se muestra a continuación.

   c. ¿Cómo es la distribución normal respecto de la distribución binomial?
   d. En este caso, ¿podrían afirmar que la distribución binomial puede aproximarse a la normal?, ¿por qué?
5. **Consideren el experimento aleatorio de lanzar repetidas veces una moneda y sea la variable aleatoria Z: cantidad de caras que aparecen.**
   a. ¿Cuál es la probabilidad de éxito en cada lanzamiento?
   b. Luego de 10 repeticiones, ¿cuál es la distribución de probabilidades de Z?
   c. Usando el programa simulen la distribución anterior. En este caso, ¿cuál es la media de la distribución?, ¿y la desviación estándar?
   d. Usen los valores de media y desviación estándar de la pregunta anterior para simular una distribución normal con dichos parámetros. En este caso, ¿la distribución binomial puede aproximarse a la normal?
   e. Ahora, realiza la simulación considerando 50, 100 y 1 000 lanzamientos y, luego, grafica la distribución normal con la que se puede aproximar. ¿Qué ocurre con la aproximación a medida que la cantidad de intentos aumenta?
6. **En un concurso, una persona debe adivinar el número que aparece en una carta que está boca abajo. Se sabe que el número está comprendido entre 1 y 1 000, y después de cada intento se cambia la carta, es decir, en cada intento hay 1 oportunidad de 1 000 para ganar. Además considera la variable aleatoria Z: cantidad de aciertos.**
   a. ¿Cuál es la probabilidad de éxito en cada elección?
   b. Si el concursante tiene 100 oportunidades, ¿cuál es la distribución de probabilidades de Z?, ¿cuál es su media?, ¿y su desviación estándar?
   c. Grafiquen la distribución binomial y normal asociadas al experimento. ¿Qué ocurre en este caso? La normal, ¿es una buena aproximación de la binomial?, ¿por qué ocurre esto? Comenten.

Practico

Resuelve las siguientes actividades para consolidar los conceptos y los procedimientos que has aprendido.

1. **Describe tres situaciones en las cuales podrías definir una variable aleatoria continua y tres situaciones en las que podrías determinar una variable aleatoria discreta.**

2. **Grafica cada una de las siguientes funciones e indica cuál de ellas define una función de densidad para una variable aleatoria continua.**
   a. $f(x) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$
   b. $f(x) = x$ en $[-1, 1]$
   c. $f(x) = 2$ en el intervalo $[0, 1]$
   d. $f(x) = x$ en el intervalo $[0, 2]$

3. **¿Qué características debe cumplir una función para que pueda ser una función de densidad de una variable aleatoria continua?**

4. **Utilizando la tabla para calcular probabilidades en una distribución normal estándar, y suponiendo que $Z \sim N(0, 1)$, calcula lo siguiente.**
   a. $P(Z < 0{,}46)$
   b. $P(Z < -0{,}78)$
   c. $P(Z < 1{,}29)$
   d. $P(Z > 2{,}18)$
   e. $P(0{,}3 < Z < 0{,}46)$
   f. $P(-0{,}16 < Z < 0{,}2)$

5. **X es una variable aleatoria con distribución normal, cuya media es 7 y cuya varianza es 4.**
   a. Determina la función de densidad de X.
   b. Escribe la transformación que convierte a X en una variable aleatoria Z con distribución normal estándar.
   c. Calcula $P(X < 6{,}3)$, $P(X < 7{,}9)$ y $P(X > 8{,}5)$.
   d. ¿Cuál es la probabilidad de que X tome un número positivo?

6. **¿Qué características debe tener una variable aleatoria con distribución binomial para que sea pertinente aproximarla por una variable aleatoria normal?, ¿cuál es la media y la desviación estándar de esa nueva variable aleatoria?**

7. **Sea Z una variable aleatoria tal que $Z \sim B(150; 0{,}45)$. Usando la tabla para calcular probabilidades de la distribución normal estándar, aproxima las siguientes probabilidades.**
   a. $P(Z < 75)$
   b. $P(Z > 60)$
   c. $P(55 < Z < 60)$
   d. $P(Z > 80)$
   e. $P(50 < Z < 70)$
   f. $P(Z > 145)$

8. **Sea X una variable aleatoria con distribución normal estándar. Encuentra el valor de a en cada caso para que se cumpla lo pedido.**
   a. $P(X < a) = 0{,}5$
   b. $P(X > a) = 0{,}5$
   c. $P(X < a) = 0{,}602$
   d. $P(X > a) = 0{,}398$
   e. $P(X < a) = 0{,}398$
   f. $P(X > a) = 0{,}602$

9. **Claudia posee una cuerda de 3 metros de largo. Si la cuerda se corta en cualquier punto al azar, y todos los puntos tienen la misma probabilidad de cortarse, ¿cuál es la probabilidad de que el trozo izquierdo de la cuerda sea de largo menor o igual a 1 m? Hint: Defina la función densidad correspondiente.**

10. **Explica qué es una variable aleatoria con distribución normal estándar y en qué se diferencia de una normal no estándar.**

11. **Describe dos situaciones que se podrían modelar con una distribución normal, y dos que no tengan distribución normal.**

12. **Explica con tus palabras qué significa "simular un experimento aleatorio", cuál es su importancia y qué simulaciones se hicieron durante el desarrollo de la unidad.**

13. **Da un ejemplo de un experimento aleatorio en el cual definas dos variables aleatorias, una discreta y una continua. Explica qué utilidad puede tener el considerar cada una de esas variables aleatorias.**

14. **De las siguientes afirmaciones, determina cuáles son verdaderas y cuáles son falsas. Justifica las falsas.**
   a. Cualquier función que tenga su área bajo la curva finita es una función de densidad.
   b. El área bajo la curva de una función de densidad siempre es igual a 1.
   c. Para calcular probabilidades de una variable aleatoria con distribución normal se utiliza la binomial, ya que esta es discreta y más fácil de calcular.
   d. $X \sim N(0\ ,\ 1)$ es una forma de representar a una variable aleatoria con varianza 0 y media 1.

15. **Grafica tres funciones que podrían ser de densidad de una variable aleatoria continua y escribe, para cada una de ellas, el cálculo de alguna probabilidad.**

16. **Explica por qué en una variable aleatoria continua la probabilidad $P(X = a)$ es igual a cero para cualquier valor de a.**

17. **¿Qué significa que la función de densidad de la variable aleatoria normal sea simétrica?, ¿cuál es el eje de simetría?**

18. CONEXIÓN CON LOS JUEGOS ▶ **Felipe tiene un blanco para lanzar dardos; su forma es circular, de 15 cm de radio, y está dividido en tres círculos concéntricos de radios 5 cm, 10 cm y 15 cm. Si al lanzar un dardo la probabilidad de que caiga en cada punto del blanco es la misma, ¿cuál es la probabilidad de que caiga dentro del círculo más pequeño?**

19. CONEXIÓN CON LOS ESTUDIOS SOCIALES ▶ **En algunos tests, los puntajes asociados al coeficiente intelectual de una persona se distribuyen en forma normal con media 100 y desviación estándar igual a 16. Si se escoge al azar a una persona, determina la probabilidad de que su coeficiente intelectual:**
   a. sea menor que 110.
   b. se encuentre entre 90 y 110.
   c. sea mayor que 120.
   d. sea mayor que 86 y no supere 113.

20. CONEXIÓN CON LAS CIENCIAS ▶ **Cuando muchas personas miden un mismo objeto, no todas obtienen el mismo resultado. Gauss demostró que el error en las mediciones se distribuye normal y que la media de la distribución corresponde al verdadero valor del tamaño del objeto que se está midiendo. Si en la medición de un objeto el conjunto de valores obtenidos tiene distribución normal con media igual a 64 cm y desviación estándar igual a 2 cm, determina la probabilidad de que el error obtenido sea:**
   a. a lo más de 1 cm.
   b. al menos de 3 cm.
   c. no inferior a 1,5 cm.
   d. superior o igual a 4 cm.

21. **Felipe llega todos los días al paradero a las 7:25 de la mañana y ahí espera el bus que lo lleva a su trabajo, donde debe presentarse antes de las 8:00. El tiempo de espera y traslado del bus, en minutos, distribuye $N(40, 7)$.**
   a. Calcula la probabilidad de que Felipe llegue atrasado a su trabajo.
   b. Si el año laboral tiene 235 días, ¿cuántos días al año llega tarde?
   c. ¿Cuántos días al año llega a su trabajo con menos de media hora de adelanto?
   d. ¿Cuál es la probabilidad de que Felipe llegue entre las 7:45 y las 8:00?

22. CONEXIÓN CON LA BIOESTADÍSTICA ▶ **La estatura de un grupo de 400 personas se distribuye en forma normal con media 168 cm y varianza igual a 144 cm^2.**
   a. Al elegir al azar a una de las personas, ¿cuál es la probabilidad de que mida más de 1,70 m?
   b. Otra persona mide 1,72 m. ¿Cuántas personas más bajas que esta se espera obtener en el grupo?, ¿y cuántas personas más altas?
   c. ¿Cuántas personas del grupo se espera que midan entre 1,6 m y 1,7 m?

Marca la opción correcta en los ítems 23 a 36.

23. ¿Cuál o cuáles de las siguientes propiedades cumplen siempre una función de densidad?

I. El área bajo su curva es 1.
II. Al valorizarla en un punto, resulta la probabilidad de que la variable aleatoria tome ese punto.
III. Es creciente.
IV. Es decreciente.

A. Solo I
B. Solo II
C. Solo III
D. Solo I y IV
E. Solo II y IV

24. ¿Cuál o cuáles de las siguientes propiedades corresponden a la siguiente función?

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

I. Es la función de densidad de una variable aleatoria con distribución normal, cuya media es 1 y su varianza es 1.
II. Es la función de densidad de una variable aleatoria binomial con media 0 y varianza 2.
III. Es la función de densidad de una variable aleatoria con distribución normal estándar.

A. Solo I
B. Solo II
C. Solo III
D. Solo I y II
E. Solo II y III

25. ¿Cuáles son los valores respectivos de la media y la desviación estándar de una variable aleatoria con distribución normal estándar?

A. 1 y 0
B. 0 y 1
C. 1 y 1
D. 0 y 0
E. Ninguna de las anteriores, depende de la distribución.

26. El tiempo, en minutos, en que los estudiantes contestan una prueba de Lenguaje tiene una distribución N(55, 10); con relación a esta situación, es verdadero que:

I. El 68,3 % de los jóvenes demora entre 45 y 65 minutos.
II. El 4,5 % de los jóvenes demora menos de 35 minutos.
III. En un curso de 40 estudiantes quedan aproximadamente seis de ellos después de 65 minutos de haber comenzado.

A. Solo I
B. Solo I y II
C. Solo II y III
D. Solo I y III
E. I, II y III

27. En una industria se observa que la masa, en gramos, de ciertos clavos tiene una distribución N(25, 1) en gramos. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un clavo cuya masa sea menor que 24,5 gramos?

A. 0,5
B. 0,29
C. 0,31
D. 0,69
E. 0,71

28. El tiempo, en minutos, que un estudiante de cuarto año medio dedica al estudio en su casa, cada día hábil, tiene una distribución $N(141, 41)$. Respecto de esta situación, es verdadero que:

I. El 68,3 % de los días estudia entre 100 y 182 minutos.
II. Alrededor del 16 % de los días estudia menos de 100 minutos.
III. Aproximadamente 3 días hábiles al mes estudia más de 182 minutos.

A. Solo I
B. Solo II
C. Solo I y II
D. Solo II y III
E. I, II y III

29. **Sea X una variable aleatoria con distribución normal estándar. ¿Cuál es la probabilidad de que X tome un valor mayor que 1?**

A. 0,9
B. 0,8413
C. 0,5
D. 0,1587
E. 0,1

30. **¿Para qué valor de a la función $f(x) = a$, definida en el intervalo]2, 5[, podría ser una función de densidad para una variable aleatoria continua?**

A. $\frac{1}{2}$
B. $\frac{1}{3}$
C. $\frac{1}{4}$
D. $\frac{1}{5}$
E. $\frac{1}{7}$

A partir de la siguiente situación, responde las preguntas 31, 32 y 33.

En un examen con 20 preguntas, considera la variable aleatoria "cantidad de respuestas correctas, respondiendo al azar". Cada pregunta tiene 3 opciones posibles, con igual probabilidad.

31. **¿Qué distribución tiene la variable aleatoria?**

A. $N\left(20, \frac{1}{3}\right)$
B. $N(20, 3)$
C. $N\left(\frac{20}{3}, \frac{1}{3}\right)$
D. $B\left(20, \frac{1}{3}\right)$
E. $B(20, 3)$

32. **Aproximadamente, ¿cuál es la desviación estándar de la distribución?**

A. $\sigma = 2{,}108$
B. $\sigma = 2{,}582$
C. $\sigma = 4{,}444$
D. $\sigma = 6{,}667$
E. $\sigma = 13{,}333$

33. **¿Cuál es la probabilidad de responder correctamente menos de 6 preguntas?**

A. 0,056
B. 0,3164
C. 0,3745
D. 0,6255
E. 0,6836

34. **$f(x) = ax$ podría ser la función de densidad de una variable aleatoria continua, si:**

(1) $a = \frac{1}{2}$.
(2) f está definida en [0, 2].

A. (1) por sí sola.
B. (2) por sí sola.
C. Ambas juntas, (1) y (2).
D. Cada una por sí sola, (1) o (2).
E. Se requiere información adicional.

35. **Sea X una variable aleatoria con distribución normal estándar. ¿Qué información se necesita para determinar la probabilidad de que X tome un valor menor que p?**

(1) $p = 0{,}9$
(2) $\sigma = 1 + \mu$

A. (1) por sí sola.
B. (2) por sí sola.
C. Ambas juntas, (1) y (2).
D. Cada una por sí sola, (1) o (2).
E. Se requiere información adicional.

36. **Una variable aleatoria se distribuye en forma normal. ¿Qué información se necesita para determinar la probabilidad de que esta tome un valor menor que 10?**

(1) $\sigma = 15$
(2) $\mu = 64$

A. (1) por sí sola.
B. (2) por sí sola.
C. Ambas juntas, (1) y (2).
D. Cada una por sí sola, (1) o (2).
E. Se requiere información adicional.

Evaluación de proceso

Aplica lo aprendido hasta este momento en la unidad y desarrolla las siguientes actividades.

1. **Indica si las siguientes variables aleatorias son discretas o continuas.**
   a. El diámetro de un tornillo producido por un torno electrónico.
   b. La cantidad de respuestas acertadas en un examen de veinte preguntas.
   c. El diámetro de la cabeza de un niño de cinco años.
   d. La cantidad de minutos de espera en un paradero.
   e. La talla de calzado de un grupo de estudiantes de un colegio.

2. **Utilizando la tabla de la página 429, calcula las siguientes probabilidades, asumiendo que Z es una variable aleatoria que distribuye $N(0, 1)$.**
   a. $P(Z < 0{,}78)$
   b. $P(Z > 0{,}07)$
   c. $P(Z < -0{,}88)$
   d. $P(Z > -1{,}23)$

3. **Esboza la gráfica de una variable aleatoria con distribución normal estándar.**

4. **Si una variable aleatoria X presenta una distribución normal estándar, ¿para qué valor de X se cumple que $P(X < 0{,}9)$?**

5. **Supongamos que la estatura en metros de un grupo de personas, se distribuye $N(1{,}65; 0{,}15)$.**
   a. ¿Qué puedes decir sobre la cantidad de gente que mide más de 1,80 m, en relación con la cantidad de gente que mide menos de 1,50 m?
   b. Describe la forma que tendrá la gráfica de la función de densidad. ¿Cuál será su eje de simetría?
   c. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir a una persona al azar, su estatura sea de 1,65 m?
   d. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger a una persona al azar, esta mida entre 1,5 m y 1,7 m?

6. **Considera el experimento aleatorio "lanzar tres monedas al aire" y la variable aleatoria X: *cantidad de caras que aparecen*.**
   a. ¿Qué distribución de probabilidad tiene la variable aleatoria X?, ¿qué valores puede tomar la variable aleatoria?, ¿con qué probabilidades?
   b. La distribución anterior, ¿puede aproximarse a una distribución normal?

7. **Si $X \sim B(n, p)$, calcula aproximadamente las siguientes probabilidades con los valores con n y p dados. Utiliza la tabla de la página 429.**
   a. $n = 30$, $p = 0{,}5$. $P(X < 20)$
   b. $n = 100$, $p = 0{,}4$. $P(X > 50)$
   c. $n = 200$, $p = 0{,}25$. $P(10 < X < 30)$
   d. $n = 150$, $p = 0{,}6$. $P(60 < X < 90)$
   e. $n = 500$, $p = 0{,}8$. $P(300 < X < 400)$

8. **Martín dice que cualquier variable aleatoria con distribución binomial puede aproximarse con una distribución normal. ¿Estás de acuerdo con él?, ¿por qué?**

9. **El 30 % de los trabajadores de una empresa llega en bicicleta. Si se eligen 100 personas al azar, determina la probabilidad de que:**
   a. más de la mitad llegue en bicicleta.
   b. menos de la cuarta parte llegue en bicicleta.
   c. más del 75 % **no** llegue en bicicleta.

10. **La cantidad de palabras por minuto que una persona lee puede modelarse por medio de una distribución normal en la que la media es 150 palabras y la desviación estándar es 24. Determina la probabilidad de que, al escoger a una persona al azar, esta lea:**
   a. menos de 120 palabras por minuto.
   b. más de 130 palabras por minuto.
   c. entre 100 y 200 palabras por minuto.

En los ítems 11 a 18, marca la opción correcta.

11. ¿Cuál de las siguientes variables aleatorias es continua?

A. La cantidad de veces que aparece un 4 al lanzar un dado 10 veces.

B. La cantidad de pisos de los edificios que hay en una ciudad.

C. La cantidad de minutos de espera al llamar por teléfono a una empresa.

D. La cantidad de personas en la fila de un banco.

E. La longitud de un tornillo.

12. Si f es una función de densidad, ¿cuál de las siguientes características tiene esta función?

I. Su recorrido son los números reales.

II. El área bajo la curva es igual a 1.

III. Es una función creciente.

A. Solo I

B. Solo II

C. Solo III

D. Solo II y III

E. I, II y III

13. En un colegio de 4 000 estudiantes, las notas en Matemática se distribuyen $N(5{,}2; 0{,}6)$. ¿Alrededor de cuántos estudiantes tienen promedio sobre 6,0?

A. 903

B. 100

C. 500

D. 96

E. 364

14. En un consultorio se realizó un estudio para determinar la masa corporal de la población femenina de su comuna, y se obtuvo una distribución $N(62, 5)$ en kilogramos. ¿Aproximadamente, qué porcentaje de mujeres de la comuna tiene una masa corporal entre 57 kg y 62 kg kilogramos?

A. 99 %

B. 68 %

C. 24 %

D. 95 %

E. 34 %

15. En la selección de personal para un museo de historia se realizará una prueba de conocimientos básicos de historia de Chile. Se sabe que los puntajes distribuyen $N(132, 18)$ y solo el 10 % de los puntajes más altos será seleccionado. Aproximadamente, ¿a partir de qué puntaje se aceptará a los candidatos?

A. 109

B. 155

C. 159

D. 190

E. 195

16. La vida media de una pila (en horas) tiene una distribución $N(150, 50)$. ¿Cuál es la probabilidad (en porcentaje) de que dure menos de 50 horas?

A. 2 %

B. 16 %

C. 68 %

D. 4 %

E. 8 %

17. El error en una medición puede modelarse con una distribución normal estándar $N(0, 1)$ en milímetros. Si se realiza una medición, ¿cuál es, aproximadamente, la probabilidad de que el error cometido sea mayor que 0,2 mm?

A. 0,42

B. 0,43

C. 0,44

D. 0,57

E. 0,58

18. La probabilidad de que un huevo se rompa dentro de su caja durante el proceso de transporte es de 0,1. ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen más de 75 huevos quebrados en una caja con 1 000 unidades?

A. 0,01

B. 0,02

C. 0,03

D. 0,99

E. 0,1

Mi progreso

Verifica en el solucionario del Texto si tus respuestas son correctas. Si tienes respuestas incorrectas, marca en la tabla el criterio correspondiente y realiza las actividades de refuerzo indicadas.

Criterio	Ítems	¿Qué debo hacer?
Relacionar y aplicar los conceptos de función de densidad y distribución de probabilidad para el caso de una variable aleatoria continua.	1, 11 y 12	Si tuviste menos de 2 ítems correctos, realiza las actividades 1, 4, 10, 11 y 12.
Conocer la distribución normal estándar.	2, 3, 4 y 17	Si tuviste menos de 3 ítems correctos, realiza las actividades 2, 14 y 15.
Aplicar la distribución normal estándar en diversas situaciones.	5, 10, 13, 14, 15 y 16	Si tuviste menos de 4 ítems correctos, realiza las actividades 3, 8, 9, 13 y 16.
Aproximar la probabilidad de la binomial por la probabilidad de la normal.	6, 7, 8, 9 y 18	Si tuviste menos de 3 ítems correctos, realiza las actividades 5, 6, 7 y 17.

Para reforzar

Según los resultados obtenidos en la evaluación de proceso, resuelve las actividades correspondientes para reforzar los contenidos en los que tuviste dificultades.

1. Dado el experimento aleatorio de lanzar una moneda dos veces, realiza lo que se indica a continuación.

a. Escribe el espacio muestral.

b. Define la variable aleatoria X que representa la cantidad de sellos que pueden presentarse en los lanzamientos.

c. Indica qué valores tomaría dicha variable aleatoria.

d. Clasifica la variable en discreta o continua.

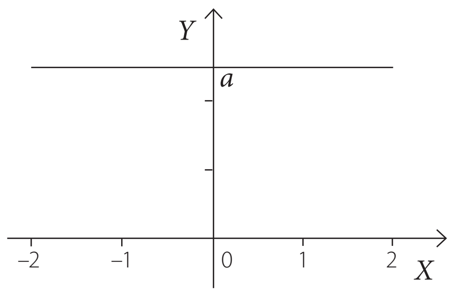
e. Calcula el valor de $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ y $P(X = 2)$.

2. Si X es una variable aleatoria con distribución normal estándar, calcula $P(X < 0)$ y $P(X < 1)$.

3. Sean X e Y dos variables aleatorias continuas tales que $X \sim N(\mu, \sigma)$ y, además, $Y = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$.

¿Cuáles son la media y la desviación estándar de X y de Y?

4. Observa la gráfica de la función f definida en el intervalo [–2, 2] y realiza las actividades.



a. Para que f sea una función de densidad, ¿cuál debe ser el valor de a?

b. A partir de la función de densidad anterior, calcula $P(-1 < X < 0)$.

c. ¿Cuál es la media de la distribución?, ¿cómo lo supiste?

5. Usa la distribución normal para encontrar una aproximación de la probabilidad de obtener 24 caras y 16 sellos en 40 lanzamientos de una moneda no cargada.

6. **De las siguientes variables aleatorias, ¿cuál o cuáles se pueden aproximar fielmente como una distribución normal? Justifica tu respuesta.**
   a. $B(4; 0{,}5)$
   b. $B(3; 0{,}1)$
   c. $B(20; 0{,}3)$
   d. $B(25; 0{,}25)$
   e. $B(40; 0{,}9)$
   f. $B(100; 0{,}42)$

7. **La variable aleatoria X tiene distribución binomial $X \sim B(50; 0{,}45)$.**
   a. ¿Cuál es la media y la varianza de la distribución?
   b. La distribución binomial, ¿puede aproximarse fielmente por medio de una distribución normal? Justifica tu respuesta.
   c. ¿Cuál es la probabilidad de que X tome un valor menor que 20?

8. **La cantidad real de café instantáneo que una máquina llenadora vierte en pocillos de 180 g varía de un pocillo a otro y se puede considerar como una variable aleatoria que tiene una distribución normal con una desviación estándar de 2 g. ¿Cuál debe ser la cantidad media vertida en estos pocillos si solo el 2 % de ellos debe contener más de 200 g de café?**

9. **La cantidad promedio de lluvias en una ciudad en el mes de abril es de 70 mm. Supón que la cantidad de lluvias es una variable aleatoria distribuida normalmente y con una desviación estándar de 1,6 mm.**
   a. ¿Qué porcentaje del tiempo la cantidad de lluvia en el mes de abril es mayor que 60 mm?
   b. ¿Qué porcentaje del tiempo la cantidad de lluvia en el mes de abril es menor que 50 mm?

10. **Dibuja la gráfica de una función que puede ser una función de densidad de una variable aleatoria continua.**

11. **¿Para qué valor de a la función $f(x) = 2x + 1$, en $]1, a[$, puede ser una función de densidad de una variable aleatoria continua?**

12. **Dado el experimento aleatorio “medir el tiempo que tarda una persona en dar una vuelta a una cancha de fútbol“, define una variable aleatoria discreta y una continua.**

13. **Dadas las variables aleatorias continuas:**
   $X \sim N(4, 6)$
   $Y \sim N(-4, 4)$
   $Z \sim N(2, 8)$
   responde las siguientes preguntas.
   a. ¿Cuál de las tres variables aleatorias tiene mayor probabilidad de tomar un valor positivo?
   b. ¿Cuál de las tres variables aleatorias tiene menor probabilidad de tomar un valor menor que 4?
   c. ¿En cuál de las tres variables aleatorias la gráfica de su función densidad es más ancha?
   d. ¿En cuál de las tres variables aleatorias la gráfica de su función densidad está desplazada más hacia la derecha?

14. **Esboza la gráfica de una distribución normal estándar para una variable alatoria X, y pinta el área bajo la curva que representa las siguientes probabilidades.**
   a. $P(X = 2)$
   b. $P(X < 3)$
   c. $P(X > 0)$
   d. $P(X \leqslant 0{,}12)$

15. **Sea $Z \sim N(0, 1)$. Usando la tabla de la página 429, calcula las siguientes probabilidades.**
   a. $P(Z < 0{,}08)$
   b. $P(Z > 0{,}49)$
   c. $P(0{,}7 < Z < 1{,}64)$
   d. $P(-2{,}15 < Z)$
   e. $P(-2{,}74 > Z)$
   f. $P(0{,}8 < Z < 1{,}25)$

16. **En el 4º medio A, los resultados de una prueba tienen una distribución normal con media 5,2 y desviación estándar 0,6. En el 4º medio B, los resultados de la misma prueba se distribuyen $N(5{,}7; 0{,}4)$.**
   a. ¿En qué curso los resultados de la prueba son más dispersos?, ¿cómo lo supiste?
   b. ¿En qué curso es más probable encontrar alumnos con una nota superior a 6,0? Explica cómo lo resolviste.

17. **La variable aleatoria X tiene distribución binomial $X \sim B(120; 0{,}3)$. Calcula la probabilidad de que X tome un valor menor que 46.**

Distribución de medias muestrales

Aprenderé a: realizar conjeturas sobre el tipo de distribución al que tienden las medias muestrales.

Repaso

Dada la población {2, 5, 8}, forma todas las muestras posibles de tamaño 2:

1. **con reposición.**
2. **sin reposición.**

Danilo quiere calcular la masa promedio de las manzanas que hay en el árbol de su casa. Como no quiere quitar todas las manzanas, saca 20 de ellas y registra su masa en gramos. Los resultados son los siguientes:

140	136	184	125	150
165	162	120	150	156
152	154	168	120	114

Archivo editorial

- ¿Cuál es la media y la desviación estándar de la muestra seleccionada por Danilo?
- ¿Podrías afirmar que, en promedio, la masa de las manzanas que hay en el árbol de la casa de Danilo es igual a la media muestral que calculaste en la pregunta anterior? Justifica tu respuesta.

En cursos anteriores aprendiste que, a partir de una población podemos seleccionar muestras de un tamaño dado con el fin de deducir características de dicha población.

Por ejemplo, considera como población el conjunto de números impares positivos de un dígito {1, 3, 5, 7, 9}. Además, considera todas las muestras posibles de tamaño 2 que pueden obtenerse de dicha población, suponiendo que las muestras se efectúan con reposición. En este caso, tenemos:

{1, 1}	{1, 3}	{1, 5}	{1, 7}	{1, 9}
{3, 1}	{3, 3}	{3, 5}	{3, 7}	{3, 9}
{5, 1}	{5, 3}	{5, 5}	{5, 7}	{5, 9}
{7, 1}	{7, 3}	{7, 5}	{7, 7}	{7, 9}
{9, 1}	{9, 3}	{9, 5}	{9, 7}	{9, 9}

¿Lo entiendes?

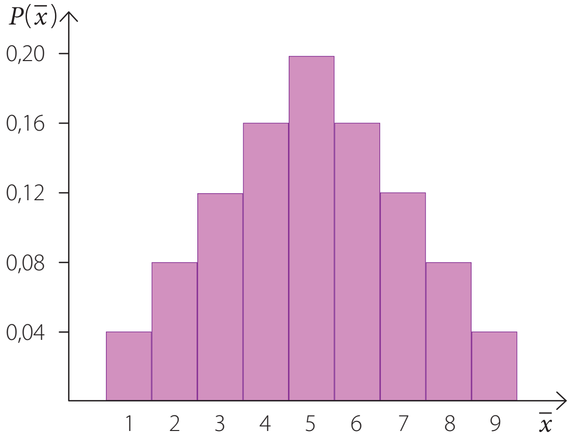
Explica cómo calcularías la cantidad de muestras de tamaño k, con y sin reposición, que se pueden extraer de una población de tamaño n.

Podemos calcular la media de cada una de las muestras anteriores. En este caso, tenemos:

1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8
5	6	7	8	9

Cada una de las muestras anteriores tiene la misma probabilidad de ser seleccionada y, dado que en total hay 25 muestras, la probabilidad de escoger una es $\frac{1}{25} = 0{,}04$.

Ahora, podemos representar gráficamente la distribución de medias muestrales a partir de la probabilidad de ocurrencia de cada una de ellas. Observa.



¿Lo entiendes?

¿Por qué la probabilidad de que $\overline{x} = 3$ es 0,12? Explica tu respuesta.

La distribución anterior corresponde a la **distribución de medias muestrales** de las muestras de tamaño 2 extraídas de la población dada.

Podemos calcular la media de la distribución de medias muestrales ($\mu_{\overline{x}}$). En el ejemplo anterior la media es:

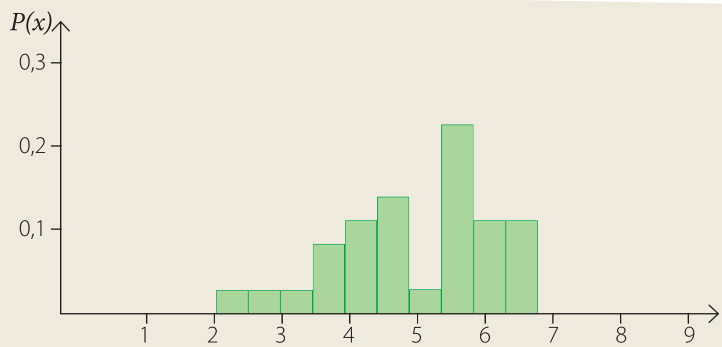
$$\mu_{\overline{x}} = \frac{\textit{Suma de las medias muestrales}}{25} = \frac{125}{25} = 5$$

Por otra parte, si calculamos la media de la población, tenemos:

$$\mu = \frac{1 + 3 + 5 + 7 + 9}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

Luego, tenemos que el promedio de todas las medias muestrales de un tamaño dado que se extraen de una población, con reposición, coincide con la media poblacional.

En el caso anterior resultó sencillo determinar todas las muestras, ya que la población era pequeña. Sin embargo, en la realidad, las poblaciones tienen muchos elementos y es casi imposible obtener todas las muestras de un tamaño dado, o bien, las muestras tienen una mayor cantidad de elementos. Por ejemplo, si consideramos la misma población anterior, es decir {1, 3, 5, 7, 9}, y queremos seleccionar todas las muestras de tamaño 4 que pueden obtenerse de esa población, con reposición, debemos extraer 70 muestras, lo cual resulta poco efectivo. Luego, lo que hacemos es construir la distribución de medias muestrales a partir de algunas muestras. Por ejemplo, el histograma de la derecha representa la distribución de medias muestrales de 30 muestras de tamaño 4 . Si te fijas, las mayores probabilidades se concentran en los valores centrales y disminuyen en los extremos de la distribución. Probablemente, en este caso, el promedio de las medias muestrales no es igual a la media poblacional, pero se acerca a ella. Esta estimación es mayor a medida que el tamaño de las muestras aumenta.

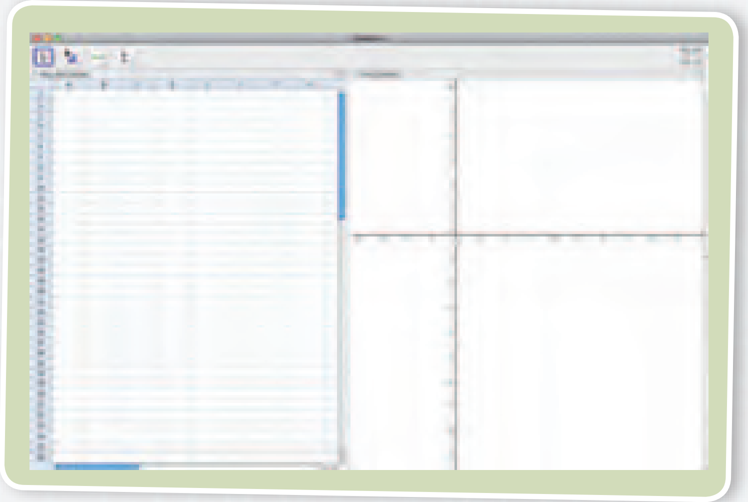


Uso GeoGebra

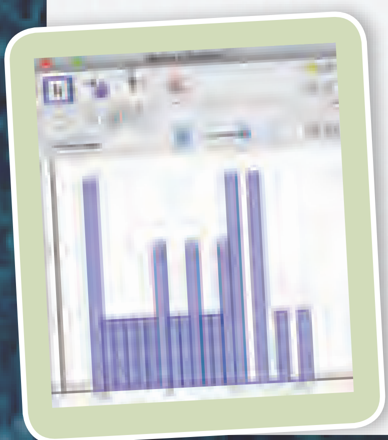
EN PAREJAS

En la siguiente actividad utilizarán GeoGebra para crear distribuciones de medias muestrales. Reúnete con un compañero y realicen las siguientes actividades.

1. **Luego de abrir el programa, seleccionen la opción "Hoja de Cálculo y Gráficos". Aparecerá una pantalla como la siguiente:**



   a. En la celda A1, escriban **AleatorioEntre(1, 100)** y luego pulsen **Enter**. Aparecerá un número entre 1 y 100, elegido al azar.
   b. Seleccionen la celda A1 y, luego, pongan la flecha del *mouse* sobre el recuadro inferior derecho de color azul. Cuando la flecha se transforme en una cruz, hagan clic y, sin soltar el botón, arrastren el ratón hasta la celda A50. De esta manera aparecerán números aleatorios entre 1 y 100 en todas las celdas entre A1 y A50.
   c. Seleccionen las celdas A1 a A50 y, luego, pongan la flecha del *mouse* sobre el recuadro azul que aparece en la parte inferior derecha de la selección. Cuando la flecha se transforme en una cruz, hagan clic y, sin soltar el botón, arrastren el ratón hasta la celda Z50. Este conjunto de números corresponderá a la población en estudio.
   d. En la celda A52, escriban **Media(A1:A50)** y luego pulsen **Enter**. El resultado obtenido corresponde a la media de la muestra conformada por los números de la columna A.



   e. Seleccionen la celda A52 y pongan la flecha del *mouse* sobre el recuadro azul que aparece en la parte inferior derecha de la selección. Cuando la flecha se transforma en una cruz, hagan clic y, sin soltar el botón, arrastren el ratón hasta la celda Z52. Así, obtendrán las medias de todas las muestras formadas por las columnas.
   f. Seleccionen todas las medias muestrales. Luego, hagan clic en el botón ubicado en la parte superior y, en la ventana que aparezca, pulsen **Analizar**. Observarán un histograma de frecuencias con los datos seleccionados, tal como se muestra en la figura de la izquierda. Pueden variar la cantidad de clases del histograma moviendo la barra que se encuentra sobre el gráfico.

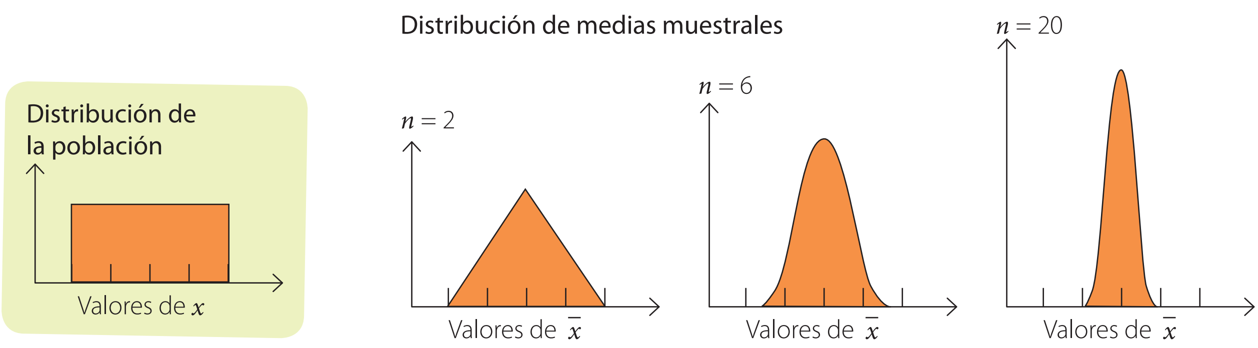
2. **A partir de lo que han realizado hasta el momento, y de lo que observan en el histograma, respondan las siguientes preguntas.**
   a. ¿Cuál es el tamaño de la población total?, ¿cuál es el tamaño de las muestras seleccionadas?
   b. ¿Cuántas muestras utilizaron para representar la distribución de medias muestrales?, ¿qué porcentaje del total de muestras de ese tamaño, posibles de extraer, utilizaron? Expliquen cómo lo calcularon.
   c. ¿Cómo es la distribución de medias muestrales?, ¿qué valores tienen más probabilidades de ocurrir?, ¿cuáles tienen menos?, ¿qué forma tiene la distribución?
   d. A partir de lo anterior, ¿qué tipo de distribución creen que tienen las medias muestrales? Justifiquen su respuesta.
3. **A partir de la misma población anterior, representen la distribución de las medias muestrales en que las muestras sean todos los números que estén en una fila. Luego, respondan.**
   a. ¿Cuántas muestras utilizaron?, ¿de qué tamaño son?
   b. Expliquen, paso a paso, cómo construyeron el histograma que representa la distribución de medias muestrales.
   c. ¿Qué forma tiene la distribución de medias muestrales?, ¿qué ocurre en los valores centrales?, ¿y en los extremos?
   d. ¿En qué se parece esta distribución a la obtenida antes?, ¿en qué se diferencian ambas? Comenten.
   e. ¿Qué tipo de distribución creen que tienen las medias muestrales en este caso?, ¿por qué?
4. **Consideren una población en la que hay 20 números aleatorios entre 1 y 20.**
   a. Utilicen GeoGebra para representar la población anterior. ¿Cómo lo hicieron?
   b. Construyan la distribución de medias muestrales seleccionando 20 muestras de tamaño 2. Luego, construyan otra distribución de medias muestrales a partir de 20 muestras de tamaño 4. ¿En qué se parecen y en que se diferencian las distribuciones que obtuvieron?
   c. Calculen el promedio de las medias muestrales en ambos casos, y también la media poblacional. ¿En cuál de las distribuciones el promedio es más cercano a la media poblacional?, ¿por qué creen que ocurre eso?
   d. ¿Qué sucede con la distribución de las medias muestrales a medida que el tamaño de las muestras aumenta? Verifiquen su respuesta representando la distribución de medias muestrales para 10 muestras de tamaños 6, 10 y 12.
   e. Para cada una de las distribuciones de la pregunta anterior, determinen el promedio de las medias muestrales. ¿En cuál distribución su promedio es más cercano al de la media poblacional?, ¿en cuál distribución su valor es el más alejado?

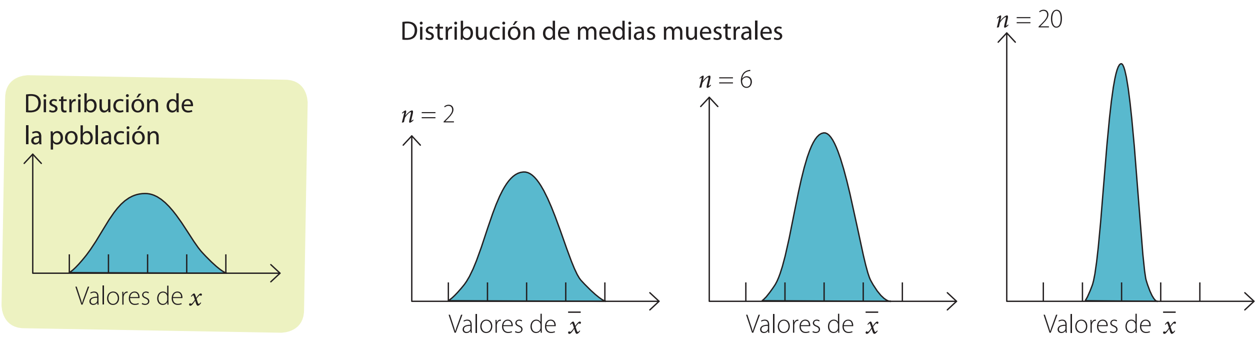
En la actividad de las páginas anteriores, seguramente te habrás dado cuenta de que la distribución de las medias muestrales se asemeja a la distribución normal, ya que concentra la mayor parte de su probabilidad en los valores centrales, mientras que en los extremos la probabilidad disminuye cada vez más. Además, podrás haber notado que a medida que el tamaño de las muestras aumenta, el parecido entre la distribución de las medias muestrales y la distribución normal se hace más evidente.

En general, podemos formalizar lo anterior mediante el **teorema del límite central**.

Teorema del límite central: La distribución de medias muestrales se asemejará cada vez más a la distribución normal a medida que aumente el tamaño de la muestra.

Lo anterior se aplica a la población que no tiene una distribución normal, ya que si una población tiene distribución normal, la distribución de las medias muestrales será normal, sin necesidad de usar el teorema.





Si te fijas, en el primer caso la población se distribuye de manera uniforme, tal como se muestra en el gráfico de la izquierda; sin embargo, la distribución de medias muestrales tiende a la distribución normal. Esta similitud es cada vez más obvia a medida que el tamaño de la muestra crece. Si la población tiene una distribución normal, el teorema del límite central no se hace necesario, pues la distribución de medias muestrales es normal.

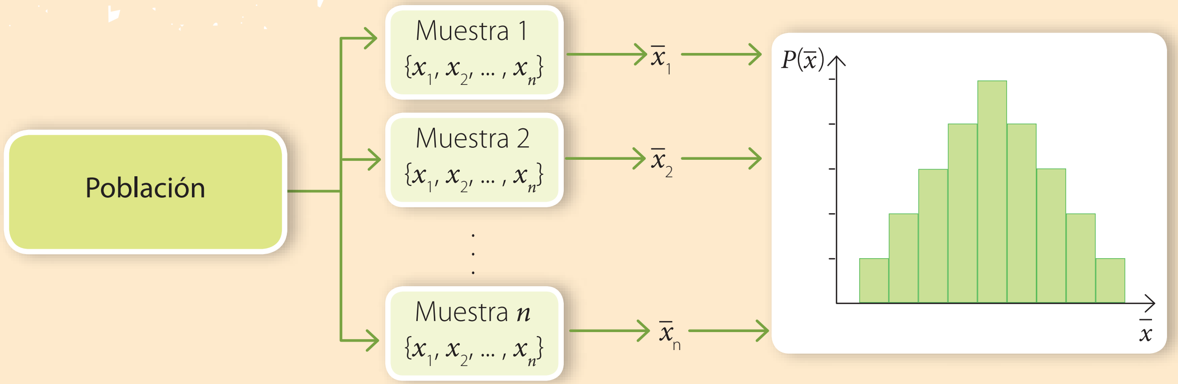
La media y la desviación estándar de la distribución de medias muestrales de **todas** las muestras de tamaño n, que se pueden extraer de una población con media μ y desviación estándar σ, son:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Tomo nota

- La distribución de medias muestrales corresponde a la distribución formada por las medias de las muestras de un tamaño dado que pueden obtenerse a partir de una población.



- La distribución de medias muestrales se aproxima a la distribución normal a medida que el tamaño de la muestra aumenta. Este es el **teorema del límite central.**

Actividades

1. **Considera el conjunto de los números primos menores que 10.**
   a. Haz una lista de todas las muestras de tamaño 2 que pueden extraerse con reposición. ¿Cuántas muestras conseguiste registrar?
   b. Construye la distribución de medias muestrales para las muestras anteriores.
   c. Determina el promedio de la distribución de medias muestrales y compárala con la media de la población. ¿Qué ocurre?

2. **Dada una población con 120 individuos, determina la media y la desviación estándar de la distribución de medias muestrales de tamaño 9 que pueden obtenerse de dicha población, si esta se distribuye como se indica, en cada caso.**
   a. $N(0; 1)$
   b. $N(45; 6)$
   c. $N(1{,}5; 0{,}3)$
   d. $B(120; 0{,}5)$
   e. $B(120; 0{,}6)$
   f. $B(120; 0{,}4)$

3. **En una distribución de medias muestrales, ¿qué ocurre con el promedio de las medias muestrales a medida que el tamaño de la muestra aumenta? Argumenta a partir de los gráficos de la página anterior.**

Proyecto

EN PAREJAS ▶ **Realicen la etapa 2 del proyecto de la unidad de las páginas 298 y 299.**

Antes de continuar

1. Explica, paso a paso, cómo construirías una distribución de medias muestrales a partir de 30 muestras de tamaño 3 que pueden obtenerse de una población de tamaño 100.

Estimación de la media poblacional

Aprenderé a: estimar intervalos de confianza para la media de una población.

Repaso

Pregunta a 10 compañeros por la cantidad de hermanos que tienen y luego determina:

1. **La media de la muestra.**
2. **La desviación estándar de la muestra.**

Se realizó un estudio estadístico sobre la masa, en kg, de los recién nacidos durante un año en un hospital. La masa de 20 de ellos es la siguiente:

3,424	3,123	3,205	2,991	2,754
3,213	2,472	2,986	3,123	3,270
3,205	3,113	2,857	3,004	3,750
2,893	2,994	3,077	3,257	3,321

Archivo editorial

- ¿Cuál es la masa promedio de la muestra? Explica cómo la calculaste.
- Si escoges otra muestra de 20 recién nacidos y registras su masa, ¿obtendrás la misma media?, ¿por qué?

En cursos anteriores aprendiste que cuando desconocemos los parámetros que describen una población los podemos estimar en función de los datos de una muestra.

Un **estimador** es una función de los datos de la muestra que permite dar un valor aproximado de un parámetro poblacional desconocido. En particular, si a partir de una muestra damos un único valor al estimador del parámetro desconocido hablamos de una **estimación puntual.** El estimador puntual más conocido es la media muestral ($\overline{x}$) que permite estimar la media de una población (μ).

Por ejemplo, si quisiéramos estimar la estatura promedio de los recién nacidos en un año en dicho hospital, podríamos seleccionar una muestra aleatoria de 20 recién nacidos, registrar su estatura y calcular la media de la muestra. Supón que los resultados, en centímetros, fueron los siguientes:

53	51	50	52	52	57	48	49	51	53
48	56	55	57	44	50	50	48	53	55

¿Lo entiendes?

Explica cómo calcularías la media muestral usando los datos de la derecha.

Luego, la media muestral es:

$$\overline{x} = \frac{1\,032}{20} = 51{,}6$$

Por lo tanto, la estatura promedio de la muestra seleccionada es 51,6 cm. Luego, este valor es una estimación de la media poblacional. Sin embargo, el resultado anterior no nos permite concluir que la media poblacional sea efectivamente 51,6 cm, ya que si seleccionamos otra muestra, probablemente la media muestral que obtengamos será diferente.

En otras palabras, al construir un estimador puntual, este tendrá un valor diferente dependiendo de la muestra elegida, por lo que puede ser poco fiable. Así, en lugar de utilizar un único valor, vamos a construir un intervalo donde podamos asegurar que se encuentra, con una probabilidad prefijada, el parámetro que queremos estimar.

Un **intervalo de confianza** para un parámetro poblacional es un intervalo de valores que, con cierta probabilidad, contiene al parámetro que se está estimando.

La probabilidad de que el parámetro poblacional se encuentre en un intervalo de confianza dado se llama **nivel de confianza** $(1 - \alpha)$. Generalmente designaremos el nivel de confianza asociado a un porcentaje. Por ejemplo, si el nivel de confianza es del 95 % significa que existe un 95 % de probabilidad de que el valor real del parámetro que se está estimando se encuentre en el intervalo de confianza dado.

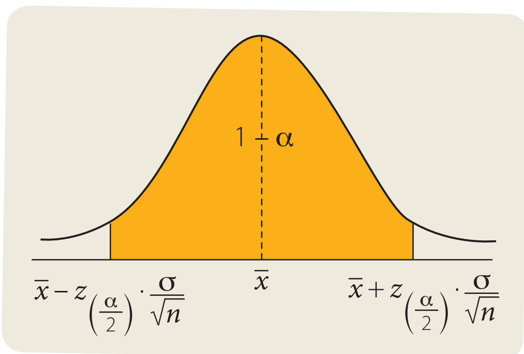
Podemos determinar un intervalo de confianza para la media poblacional con distribución normal, con desviación estándar conocida, con un nivel de confianza $1 - \alpha$, construido a partir de una muestra de tamaño n, mediante la siguiente expresión:

$$\left[\bar{x} - z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

En la expresión anterior, $\bar{x}$ corresponde a la media de la muestra de tamaño n empleada para estimar la media poblacional, σ es la desviación estándar poblacional y $z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ es un coeficiente asociado al nivel de confianza.

En la tabla de la derecha se muestran los valores de $z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ según el nivel de confianza.

En la siguiente imagen se representa gráficamente el intervalo de confianza para una muestra con distribución normal, para un nivel de confianza $1 - \alpha$.



Si te fijas, la amplitud del intervalo es igual a $2 \cdot z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

A partir de esto podemos concluir que, a medida que el nivel de confianza es mayor, la amplitud del intervalo de confianza es más grande, ya que es más probable que la media esté en ese intervalo. Por el contrario, si el intervalo tiene una amplitud menor, entonces la probabilidad de que la media se encuentre en ese intervalo disminuye y, por lo tanto, su nivel de confianza es más bajo.

Por otra parte, el intervalo de confianza tiene menor amplitud si el valor de n aumenta, es decir, el intervalo de confianza es más preciso si la cantidad de muestras que se toman es mayor.

Por último, el intervalo de confianza tiene mayor amplitud si la desviación estándar de la población es mayor. Esto se debe a que si hay mucha variabilidad en los datos, el rango de valores en los que se encuentra la media poblacional aumenta.

Atención

El **nivel de confianza** se representa con la expresión $1 - \alpha$; como se trata de una probabilidad, siempre será un valor entre 0 y 1.

Al valor α se le llama **nivel de significación** y es la diferencia entre la certeza y el nivel de confianza $1 - \alpha$.

Nivel de confianza	$z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$
50 %	0,67
68 %	0,99
75 %	1,15
80 %	1,28
90 %	1,64
95 %	1,96
97 %	2,17
98 %	2,32
99 %	2,58
99,7 %	3,0

Atención

La expresión $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ es conocida como error estándar.

¿Cómo hacerlo?

Para estudiar el consumo de leche, en litros por persona al mes, se ha elegido una muestra de 150 personas cuyo consumo medio es de 22 L. Si dicho consumo sigue una distribución normal cuya desviación estándar es 6 L, determina un intervalo de confianza para la media con un nivel de confianza del 95 %.

A partir de la tabla de la página anterior, dado que el nivel de confianza es de un 95 %, entonces $z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 1{,}96$.

Además, el tamaño de la muestra seleccionada es de 150 personas y la media muestral es $\overline{x} = 22$ L. También sabemos que el consumo de leche de la población se distribuye en forma normal con desviación estándar $\sigma = 6$ L. Luego, remplazamos los valores que tenemos para calcular el intervalo de confianza.

$$\left[\overline{x} - z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[22 - 1{,}96 \cdot \frac{6}{\sqrt{150}}; 22 + 1{,}96 \cdot \frac{6}{\sqrt{150}}\right] \approx [21{,}04; 22{,}96]$$

Por lo tanto, con la muestra seleccionada podemos afirmar que la probabilidad de que la media poblacional se encuentre en el intervalo [21,04; 22,96] es de un 95 %.

¿Cómo hacerlo?

En una fábrica, los artículos eléctricos se embalan en cajas de 500 unidades. La cantidad de artículos defectuosos en cada caja sigue una distribución binomial $X \sim N(500; 0{,}15)$. Si se escogen 10 cajas al azar y se detectan, en promedio, 71 artículos defectuosos, determina el intervalo de confianza en el que se encuentra la cantidad promedio de artículos defectuosos por caja, considerando un nivel de confianza del 90 %.

Como aprendiste en lecciones anteriores, una variable aleatoria X con distribución binomial, es decir, $X \sim B(n, p)$, puede aproximarse con una distribución normal con media $\mu = np$ y desviación estándar $\sigma = \sqrt{np\,(1 - p)}$. En este caso, podemos calcular la desviación estándar de la población como:

$$\sigma = \sqrt{np\,(1 - p)} = \sqrt{500 \cdot 0{,}15(1 - 0{,}15)} = \sqrt{75 \cdot 0{,}85} = \sqrt{63{,}75} \approx 7{,}98$$

Por otra parte, el tamaño de la muestra seleccionada es $n = 10$, con media $\overline{x} = 71$; y dado que el nivel de confianza es del 90 %, entonces $z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 1{,}64$.

Finalmente, remplazamos los valores dados para calcular el intervalo de confianza de la siguiente manera:

$$\left[\overline{x} - z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[71 - 1{,}64 \cdot \frac{7{,}98}{\sqrt{10}}; 71 + 1{,}64 \cdot \frac{7{,}98}{\sqrt{10}}\right] \approx [66{,}86; 75{,}14]$$

Por lo tanto, a partir de la muestra seleccionada podemos afirmar que hay un 90 % de probabilidad de que la media poblacional se encuentre en el intervalo [66,86; 75,14].

¿Lo entiendes?

Calcula la media de la población a partir de su distribución. Este valor, ¿se encuentra en el intervalo de confianza obtenido? Explica.

Tomo nota

- La media de una población se encuentra en el siguiente intervalo de confianza:

$$\left[\overline{x}-z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\overline{x}+z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

donde $\overline{x}$ es la media muestral, $z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ es un coeficiente asociado al nivel de confianza, σ es la desviación estándar de la población y n es la cantidad de elementos que contiene la muestra.

Actividades

1. CONEXIÓN CON LA BIOLOGÍA ▶ **Se supone que la duración de la vida de una determinada especie de tortuga se supone que es una variable aleatoria, con distribución normal de desviación estándar igual a 10 años. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 tortugas y se obtienen las siguientes duraciones, en años:**

46	38	59	29	34
32	38	21	44	34

a. Determina un intervalo de confianza al 95 % para la vida media de dicha especie de tortuga.
b. Si aumentamos el tamaño de la muestra, sin variar el nivel de confianza, la amplitud del intervalo de confianza, ¿aumenta o disminuye? Justifica tu respuesta.
c. Si aumentamos el nivel de confianza a un 98 %, sin cambiar el tamaño de la muestra, la amplitud del intervalo de confianza, ¿aumenta o disminuye? Justifica.

2. **Resuelve los siguientes problemas.**

a. Un estudio realizado sobre una muestra de 200 automóviles indica que la antigüedad media de la muestra es de 7,85 años. Calcula un intervalo de confianza para la antigüedad media de la población, con un nivel de confianza del 95 %, y teniendo en cuenta que la desviación típica es de 2,9 años.
b. CONEXIÓN CON LA BIOESTADÍSTICA ▶ En un hospital se ha tomado la temperatura a una muestra de 64 pacientes, para estimar su temperatura media. La media de la muestra ha sido de 37,1 °C, y la desviación estándar de la población, 1,04 °C. Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 99 %.
c. CONEXIÓN CON LA INDUSTRIA ▶ Para efectuar un control de calidad sobre la duración en horas de un modelo de juguetes electrónicos se elige una muestra aleatoria de 36 juguetes de ese modelo, y se obtiene una duración media de 97 horas. Sabiendo que la duración de los juguetes electrónicos de ese modelo se distribuye normalmente con una desviación estándar de 10 horas, encuentra el intervalo de confianza del 98 % para la duración media de los juguetes electrónicos de ese modelo.

Proyecto

EN PAREJAS ▶ **Realicen la etapa 3 del proyecto de la unidad de las páginas 298 y 299.**

Antes de continuar

1. Explica cómo determinas el intervalo de confianza para la media de una población con distribución normal y varianza conocida, a partir de una muestra y un nivel de confianza dado.

Practico

Resuelve las siguientes actividades, para consolidar los conceptos y los procedimientos que has aprendido.

1. **Considera la población conformada por el conjunto de números naturales menores que 5.**
   a. ¿Qué tamaño tiene la población?
   b. Escribe una lista con todas las muestras de tamaño 2, con reposición, que pueden extraerse de la población anterior. ¿Cuántas muestras obtuviste?
   c. Construye la distribución de medias muestrales para todas las muestras de tamaño 2.
   d. ¿Cuál es la media de la distribución?

2. **Pide a 3 compañeros que cada uno diga 3 números del 1 al 10, al azar, y escríbelos en tu cuaderno. Luego, realiza las siguientes actividades.**
   a. Escribe 20 muestras de tamaño 2 de la población anterior y calcula las medias muestrales.
   b. Construye la distribución de medias muestrales para las muestras de tamaño 2 que seleccionaste.
   c. ¿Cuál es el promedio de las medias muestrales de la distribución que construiste?, ¿cómo es este valor respecto de la media poblacional?

3. CONEXIÓN CON LA BIOESTADÍSTICA ▶ **La masa de los recién nacidos en un hospital sigue una distribución normal $N(3{,}01; 0{,}3)$ en kilogramos.**
   a. ¿Cuál es la media y la desviación estándar de la población?
   b. Al seleccionar una muestra de 25 recién nacidos, ¿cuál es la media y la desviación estándar de la muestra?
   c. ¿Qué tipo de distribución tiene la media de la muestra?
   d. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir una nueva muestra de 25 recién nacidos el promedio del peso de ellos se inferior a 3 kg.?
   e. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir una nueva muestra de 25 recién nacidos el promedio del peso de ellos esté entre 2,9 kg y 3,1 kg?

4. **Lanza un dado 5 veces y registra los valores que obtuviste. Luego construye la distribución de medias muestrales considerando 20 muestras del tamaño que se indica, en cada caso. Considera que las muestras son con reposición.**
   a. Tamaño 2.
   b. Tamaño 3.
   c. Tamaño 4.
   d. Tamaño 5.

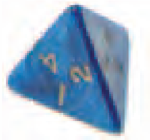
5. **La edad a la que contraen matrimonio los hombres de una ciudad es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de media 35 años y desviación estándar de 5 años. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 hombres de dicha ciudad. Sea $\overline{X}$ la media muestral de la edad de casamiento. ¿Cuáles son la media y la varianza de $\overline{X}$? Explica cómo lo calculaste.**

6. **Uno de los objetivos de un estudio sobre los hábitos deportivos es conocer el promedio de horas que corren las personas diariamente.**

Archivo editorial

   a. Por estudios previos se sabe que la desviación estándar del nº de horas que corre un persona diariamente es 0,3. Para realizar la estimación al 95 % de confianza con un margen de error máximo de 0,01, ¿cuál es el tamaño necesario de la muestra?
   b. ¿Qué ocurre con el tamaño muestral si se aumenta el nivel de confianza a un 99 %, manteniendo el margen de error? Justifica.
   c. ¿Qué sucede con la amplitud del intervalo en el caso anterior?

7. Un dado tetraédrico está numerado del 1 al 4.



a. Calcula la media y la desviación estándar de la población formada por los cuatro números.
b. Forma todas las muestras posibles de tamaño 2 que podemos obtener, con repetición, de esta población.
c. Calcula la media y la desviación estándar de la distribución de las medias de las muestras.

8. El número de horas diarias que dedican a ver televisión los niños de cierta ciudad es una variable aleatoria con distribución normal, cuya desviación estándar es 1,5. Se toma una muestra al azar de 10 niños y se registra el número de horas que vieron televisión un día en particular. Los valores son:

6,0	3,4	5,6	6,3	6,4
5,3	5,4	5,0	5,2	5,5

a. Determina el intervalo de 90 % de confianza para el número medio de horas diarias que ven televisión los niños de esa ciudad. ¿Qué amplitud tiene este intervalo?
b. Si el margen de error hubiese sido de 1 hora, ¿Cuál sería el nivel de confianza que se tendría?
c. ¿Qué tamaño muestral se necesitaría si se considera un margen de error igual al considerado en la pregunta a, y un nivel de confianza igual al de la pregunta b?

9. Con la finalidad de conocer el gasto estimado en útiles escolares durante un año académico, se seleccionó una muestra aleatoria simple de 59 escolares. En promedio, los 59 estudiantes gastaron \$ 81 960 y la desviación estándar fue de \$ 28 320.

a. ¿Cuál es el intervalo de confianza al 95 % para el gasto promedio en útiles escolares durante un año académico?
b. ¿Qué amplitud tiene el intervalo que obtuviste en la pregunta anterior? Explica.

10. La expresión $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ se conoce como error estándar.

a. ¿Qué ocurre con el valor de esta expresión si aumenta el tamaño de la muestra?
b. Al aumentar el tamaño de la muestra, ¿qué sucede con la amplitud del intervalo?
c. Al escoger otra población con una desviación estándar mayor, ¿qué ocurre con la amplitud del intervalo si mantenemos el tamaño de la muestra?
d. ¿Qué relación tiene la amplitud del intervalo con el error estándar?
e. Patricio dice que si tenemos dos poblaciones con diferente desviación estándar, y en ambas extraemos una muestra del mismo tamaño, podemos saber de antemano en cuál el error estándar será mayor. ¿Estás de acuerdo con Patricio?, ¿por qué?

11. Una marca de artículos deportivos está interesada en conocer el promedio de edad de sus clientes. Una muestra aleatoria de 25 clientes arrojó una edad promedio de 19 años, con una desviación estándar de 3 años. Determina el intervalo al 95 % de confianza para la edad promedio de los clientes y su amplitud.

12. Las siguientes notas corresponden a 12 de los 45 estudiantes de un curso. Si se sabe que la desviación estándar poblacional es igual a 1,23, observa y responde:

5,4	3,6	6,8	4,2	5,5	5,5
5,9	3,6	7,0	3,3	6,1	6,3

a. Calcula el intervalo de 95 % y 99 % de confianza para el promedio total del curso.
b. ¿En cuál de los intervalos anteriores la amplitud del intervalo es más pequeña?, ¿por qué?
c. Determina el margen de error que se comete en cada caso.
d. ¿De qué tamaño debería ser la muestra si se considera un margen de error de 0,5 con un 99 % de confianza?
e. ¿Qué ocurre con la amplitud del intervalo si en vez de seleccionar 12 muestras seleccionamos 15?

Marca la opción correcta en las preguntas 13 a 29.

Considera la población formada por los números primos menores o iguales que 5 y todas las muestras de tamaño 2 que pueden seleccionarse, si se realizan con reposición. Luego, responde las preguntas 13 a 17.

13. ¿Cuántas muestras se pueden extraer en total?

A. 2
B. 3
C. 4
D. 6
E. 9

14. ¿Cuál es la media poblacional y el promedio de las medias muestrales respectivamente?

A. $\frac{62}{3}$ y $\frac{10}{9}$
B. $\frac{10}{9}$ y $\frac{62}{9}$
C. $\frac{10}{3}$ y $\frac{62}{3}$
D. $\frac{10}{3}$ y $\frac{62}{9}$
E. $\frac{10}{3}$ y $\frac{10}{3}$

15. De las siguientes medias muestrales, ¿cuál tiene la misma probabilidad de ocurrencia que 2?

A. 3
B. 4
C. 6
D. 9
E. 10

16. ¿Cuál de las siguientes medias muestrales tiene más probabilidades de ocurrir?

A. 3
B. 4
C. 6
D. 7
E. 8

17. ¿Cuál es la probabilidad de que $\overline{x}$ = 6?

A. 0 %
B. 1,11 %
C. 2,22 %
D. 11,11 %
E. 22,22 %

18. Una población tiene distribución normal con $\mu = 27$ y $\sigma = 9$. Si se escoge una muestra de 9 individuos, ¿cuál es la media y la desviación estándar de la muestra, respectivamente?

A. 27 y 9
B. 27 y 1
C. 27 y 3
D. 3 y 9
E. 3 y 3

19. Se supone que la distribución de la temperatura del cuerpo humano en la población tiene como media 37 °C y como desviación estándar, 0,85 °C. Si se eligen al azar 100 personas y se registra su temperatura, ¿cuál es la desviación estándar de la muestra?

A. 0,0085
B. 0,085
C. 0,85
D. 8,5
E. 85

20. La masa de los niños varones de 10 semanas de vida se distribuye normalmente con desviación estándar de 87 g. ¿Cuántos datos son suficientes para estimar, con una confianza del 95 %, la masa media de esa población con un error no superior a 15 g?

A. 11
B. 12
C. 17
D. 129
E. 130

21. Un estudio realizado entre 25 estudiantes universitarios, concluyó, con un nivel de confianza del 95 %, que la media de horas a la semana dedicada al estudio era un valor de intervalo [32, 40]. ¿Cuál es la media muestral?

A. 32
B. 34
C. 36
D. 38
E. 40

22. **Se puede suponer que el coeficiente intelectual de las personas presentes en una sala sigue una distribución normal de media 95 y varianza igual a 81. Si se elige a 9 personas al azar en esa sala, y se calcula la media del coeficiente intelectual, ¿cuál es la probabilidad de que esa media esté entre 86 y 107?**

A. 95,78 %
B. 97,56 %
C. 98,87 %
D. 99,56 %
E. 99,87 %

A partir de la siguiente información, responde las preguntas 23 a 25.

Una variable aleatoria discreta tiene distribución binomial $B(25, 0{,}6)$.

23. **¿Cuál es la media y la desviación estándar de la distribución, respectivamente?**

A. 25 y 0,6
B. 15 y 0,55
C. 25 y 2,45
D. 15 y 2,45
E. 25 y 0,55

24. **Si se selecciona una muestra de tamaño 20, ¿cuál es la media y la desviación estándar aproximados de la muestra?**

A. Media: 15; desviación estándar: 0,55
B. Media: 15; desviación estándar: 2,45
C. Media: 25; desviación estándar: 0,55
D. Media: 25; desviación estándar: 2,45
E. Media: 25; desviación estándar: 0,6

25. **Al seleccionar al azar un elemento de la muestra, ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra cualquiera tenga una media inferior a 14,4?**

A. 0,07493
B. 0,1377
C. 0,42465
D. 0,57535
E. 0,92507

26. **La masa media de una muestra elegida al azar de 196 manzanas es de 320 g, y la desviación típica es de 35 g. ¿Cuál es el intervalo de confianza aproximado de la media poblacional para un nivel de confianza del 95 %?**

A. [315,1; 324,9]
B. [319,65; 320,35]
C. [315,1; 320,35]
D. [315,1; 319,65]
E. [319,65; 324,9]

27. **¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral de una población con $N(125, 7)$ se encuentre en el intervalo [120,952; 127,445], si el tamaño de la muestra es 25 y su media es 124,2?**

A. 95 %
B. 96 %
C. 97 %
D. 98 %
E. 99 %

28. **Una población se distribuye en forma normal. ¿Qué tamaño debe tener una muestra para que, con un nivel de confianza del 90 %, el error estándar no supere 90?**

(1) La media de la muestra es 320.
(2) La desviación estándar de la población es 32.

A. (1) por sí sola.
B. (2) por sí sola.
C. Ambas juntas, (1) y (2).
D. Cada una por sí sola, (1) o (2).
E. Se requiere información adicional.

29. **¿Cuál es la desviación estándar de una muestra seleccionada al azar, sin reposición, de una población que tiene distribución normal $N(9, 2)$?**

(1) La población tiene tamaño 340.
(2) La muestra tiene tamaño 36.

A. (1) por sí sola.
B. (2) por sí sola.
C. Ambas juntas, (1) y (2).
D. Cada una por sí sola, (1) o (2).
E. Se requiere información adicional.

Evaluación de proceso

Aplica lo aprendido hasta este momento en la unidad para desarrollar las siguientes actividades.

1. **Considera el conjunto de números enteros positivos que son divisores de 12.**
   a. Escribe la población por extensión. ¿Cuál es su tamaño?
   b. ¿Cuántas muestras de tamaño 2 pueden extraerse de la población, con reposición?
   c. Construye la distribución de medias muestrales de todas las muestras de tamaño 2 que pueden extraerse de la población anterior.
   d. ¿Cuál es el promedio de las medias muestrales?, ¿cómo es ese valor en relación con la media de la población? Explica.

2. **Determina la desviación estándar de una muestra de tamaño dado extraída, con reposición y de una población con distribución normal cuyos parámetros son los indicados, en cada caso.**
   a. Tamaño de la muestra: 25; población con distribución $N(120, 12)$.
   b. Tamaño de la muestra: 36; población con distribución $N(31\,750, 300)$.
   c. Tamaño de la muestra: 144; población con distribución $N(9\,840, 168)$.
   d. Tamaño de la muestra: 576; población con distribución $N(865, 72)$.

3. **Una variable aleatoria X tiene media igual a 12.**
   a. ¿Es posible que al extraer una muestra de tamaño 10, el promedio de estos datos sea un número distinto de 12? Justifica tu respuesta.
   b. ¿Es posible que al tomar una muestra de tamaño 10 000, el promedio de los datos sea igual a 4?, ¿por qué?
   c. Explica qué pasa con los promedios de las muestras a medida que el tamaño de la muestra aumenta.

4. **Explica con tus palabras el teorema del límite central.**

5. **Considerando como población el conjunto {1, 2, 3, 4}, construye una distribución de medias muestrales de las muestras, extraídas con reposición, del tamaño que se indica en cada caso.**
   a. 12 muestras de tamaño 2.
   b. 15 muestras de tamaño 3.

6. **La estatura de un grupo de personas sigue una distribución normal $N(1{,}67; 0{,}22)$ en metros.**
   a. Al seleccionar una muestra de 40 personas, ¿cuál es la media y la desviación estándar del promedio de esta muestra?
   b. ¿Qué tipo de distribución tiene la media de la muestra? ¿por qué?
   c. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger una muestra, su media sea inferior a 1,70 m?
   d. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger una muestra, su media sea mayor a 1,55 m e inferior a 1,70 m?

7. **Una variable aleatoria tiene distribución binomial $B(120, 0{,}4)$.**
   a. ¿Cuál es la media y la desviación estándar de la distribución?
   b. Si se selecciona una muestra de tamaño 64, ¿cuál es, aproximadamente, la media y la desviación estándar de la muestra?
   c. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger una muestra, su media se inferior a 3?

8. **La puntuación media obtenida por una muestra de 81 alumnos de 4º medio en un ensayo PSU fue 506 puntos. Suponiendo que la distribución de las puntuaciones de la población es normal, con desviación estándar igual a 110 puntos, ¿cuál es el intervalo de confianza para la media de la población con un nivel de confianza del 95 %?**

9. **La masa de los usuarios de un gimnasio tiene una media desconocida y una desviación estándar de 5,4 kg. Alberto toma una muestra aleatoria de 100 usuarios y obtiene una media de 60 kg. Luego, Alberto asegura que "la masa media de un usuario de ese gimnasio está comprendida entre 58,6 kg y 61,39 kg". ¿Con qué probabilidad esta afirmación es correcta?**

10. **Se ha estudiado el número de horas semanales dedicadas a practicar deporte por jóvenes entre 14 y 18 años, obteniéndose una variable aleatoria con distribución normal y desviación estándar igual a una hora. Si se toma una muestra aleatoria de 64 jóvenes entre 14 y 18 años, resulta que practican deporte una media de 6 horas semanales.**
    a. ¿Cuál es el error de estimación del tiempo medio que practican deporte los jóvenes, con un nivel de confianza del 98 %?
    b. ¿Qué tamaño muestral mínimo ha de tomarse para que el error en la estimación sea menor que media hora, con un nivel de confianza del 95 %?

11. **Una muestra aleatoria de 81 televisores reportó que el intervalo de confianza para el tiempo promedio de presentación de fallas técnicas (en años) es de [2,113; 2,287]. Considerando que la desviación estándar es de 0,4 años, ¿cuál es el nivel de confianza de este intervalo?**

12. **Las longitudes de unos pernos siguen una distribución normal de media desconocida y desviación estándar 2 mm. Se toma una muestra de tamaño 25 y se obtiene una longitud media de 38 mm. Andrea afirma que, con un nivel de confianza del 95 %, la media de la población es 40 mm. ¿Estás de acuerdo con ella? Justifica.**

Archivo editorial

Marca la opción correcta en los ítems 13 a 15.

13. **Una población tiene distribución normal $N(60, 36)$. Al seleccionar una muestra de 9 individuos, ¿cuál es la media y la desviación estándar de la muestra, respectivamente?**
    A. 60 y 6
    B. 10 y 6
    C. 60 y 12
    D. 60 y 4
    E. 10 y 36

14. **Una población tiene distribución normal con desviación estándar σ. Se extrae una muestra de tamaño n y la media muestral es $\overline{x}$. Si con un nivel de confianza k se obtiene un intervalo de confianza de amplitud A, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?**
    I. Al aumentar el valor de k, A también aumenta.
    II. Al aumentar el valor de n, A también aumenta.
    III. Al aumentar el valor de A, la probabilidad de encontrar la media poblacional en el intervalo es mayor.

    A. Solo I
    B. Solo II
    C. Solo I y III
    D. Solo II y III
    E. I, II y III

15. **Se ha obtenido que el intervalo de confianza de la media poblacional, considerando un nivel de confianza del 95 %, es [6,66; 8,34]. ¿Cuál es, respectivamente, la media y el tamaño de la muestra que se ha estudiado para obtener el intervalo señalado? Considera que la población se distribuye en forma normal con desviación estándar igual a 3.**
    A. 7,5 y 7
    B. 7 y 7,5
    C. 7,5 y 49
    D. 7 y 49
    E. 7 y 7

Mi progreso

Verifica en el solucionario del Texto si tus respuestas son correctas. Si tienes respuestas incorrectas, marca en la tabla el criterio correspondiente y realiza las actividades de refuerzo indicadas.

Criterio	Ítems	¿Qué debo hacer?
Realizar conjeturas sobre el tipo de distribución al que tienden las medias muestrales.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 13	Si tuviste menos de 5 ítems correctos, realiza las actividades 1 y 2.
Estimar intervalos de confianza para la media de una población con distribución normal y varianza conocida.	8, 9, 10, 11, 12, 14 y 15	Si tuviste menos de 4 ítems correctos, realiza las actividades 3, 4 y 5.

Para reforzar

Según los resultados obtenidos en la evaluación de proceso, resuelve las actividades correspondientes para reforzar los contenidos en los que tuviste dificultades.

1. **Observa las siguientes muestras de tamaño 4 extraídas de una población de tamaño 6. Las muestras fueron extraídas con reposición.**

{2, 2, 3, 4}	{2, 3, 5, 6}	{6, 7, 4, 3}
{4, 3, 5, 3}	{5, 4, 4, 7}	{5, 3, 7, 4}
{6, 5, 5, 2}	{7, 5, 3, 4}	{3, 4, 2, 2}
{6, 4 , 3, 7}	{6, 6, 4, 3}	{5, 3, 7, 2}

   a. ¿Cuál es la población? Escríbela por extensión y por comprensión.
   b. Calcula la media de todas las muestras.
   c. De las medias anteriores, ¿cuál se repite más veces?, ¿cuántas veces?
   d. Al elegir una de las medias al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea el número 5? Explica cómo lo calculaste.
   e. Construye la distribución de las medias muestrales.
   f. ¿Cuál es el promedio de las medias muestrales?, ¿cómo es su valor en relación con la media poblacional?
   g. ¿Cuántas muestras de tamaño 4 debes extraer de la población anterior para asegurarte de que el promedio de las medias muestrales sea igual a la media poblacional?

2. **Una variable aleatoria discreta tiene distribución binomial B(120; 0,5).**
   a. ¿Cuál es la media y la desviación estándar de la distribución anterior?
   b. ¿Cuál es la media y la desviación estándar de la distribución de medias muestrales de tamaño 64, con reposición, extraídas de la población anterior? Explica cómo lo calculaste.

3. **Un fabricante produce tabletas de chocolate cuya masa, en gramos, sigue una distribución normal de media 125 g y desviación estándar 4 g.**

Archivo editorial

   a. Si las tabletas se empaquetan en lotes de 25 unidades, ¿cuál es la probabilidad de que la masa media de las tabletas de un lote se encuentre entre 124 g y 126 g?
   b. Si los lotes fuesen de 64 tabletas, ¿cuál sería la probabilidad de que la masa media de las tabletas del lote superase los 124 g?

4. **En un estudio realizado en una autopista se han recogido las siguientes velocidades, medidas en km/h, en un mismo tramo:**

95	108	97	112
99	106	105	100
99	98	104	110
107	111	103	110

Si la velocidad en este tramo sigue una distribución normal con desviación estándar 5 km/h, ¿cuáles son los parámetros de la distribución de la media muestral?

5. **Se supone que la masa de las mujeres de la misma edad de una determinada región sigue una distribución normal de media 64 kg y desviación típica 6 kg. Se toma una muestra al azar de 144 personas y se calcula su media. ¿Cuál es la probabilidad de que esta media sea al menos de 63 kg?**

6. **El tiempo, en horas mensuales, que los jubilados dedican a pasear sigue una distribución normal de media 60 h y desviación típica 20 h. Si se elige una muestra de 36 jubilados, determina la probabilidad de que la media de la muestra elegida esté comprendida entre 59 h y 62 h.**


Archivo editorial

7. **Asumiendo que se extrae una muestra de tamaño n=100, escribe el intervalo de confianza para la media de una variable aleatoria X con distribución normal, según los datos que se entregan. Escribe en cada caso el largo del intervalo.**
   a. Desviación estándar 3, nivel de confianza 95 % y media muestral 8.
   b. Desviación estándar 3, nivel de confianza 98 % y media muestral 10.
   c. Desviación estándar 2, nivel de confianza 0,9 y media muestral 5.

8. **Las puntuaciones obtenidas en unas pruebas de gimnasia rítmica siguen una distribución normal de media desconocida y desviación estándar 1,19. Si se selecciona una muestra al azar de gimnastas y se obtiene el intervalo de confianza [8,601; 8,699] con un nivel de confianza del 90 % para la media, ¿cuál es la media muestral y el tamaño de la muestra elegida?**

9. **El gasto mensual, en miles de pesos, en electricidad por familia, en cierta ciudad, sigue una distribución normal de media desconocida y desviación estándar 1,2.**
   a. A partir de una muestra de 100 familias de esa ciudad, se obtuvo el intervalo de confianza [4.846,4 ; 5.153,6] para el gasto mensual por familia en electricidad. Determina el nivel de confianza con el que se construyó dicho intervalo.
   b. ¿Qué número de familias tendrías que seleccionar al azar, como mínimo, para garantizar, con un nivel de confianza del 99 %, una estimación del gasto medio con un error máximo no superior a 300?

10. **En una población humana se ha comprobado que la estatura se comporta según un modelo normal de probabilidad con una varianza de 64 cm². A partir de una muestra de 289 personas seleccionadas aleatoriamente en dicha población, se ha calculado una estatura media de 164 cm. ¿Estaríamos en lo cierto si afirmamos, con un nivel de confianza de un 95 %, que la estatura media de esa población es distinta de 165 cm? Justifica tu respuesta.**

11. **La estatura de un grupo de jóvenes se distribuye en forma normal con media desconocida y varianza 25 cm². Se extrae una muestra aleatoria, y con un nivel de confianza del 95 %, se determina un intervalo de confianza para la media poblacional, resultando que su amplitud es 2,45 cm. Determina:**
   a. El tamaño de la muestra seleccionada.
   b. ¿Cuál es el intervalo de confianza, con el nivel de confianza del 95 %, si la muestra tomada dio una altura media de 175 cm?

Síntesis

Relacionar y aplicar los conceptos de función de densidad y distribución de probabilidad, para el caso de una variable aleatoria continua.

1. Sea la función $f(x) = 0,5x$, definida en el intervalo [0, 2]. ¿Puede ser f la función de densidad de alguna variable aleatoria continua?, ¿por qué?

- Si f hubiese estado definida en el intervalo [1, 2], ¿tu respuesta cambiaría? Argumenta.

Conocer y aplicar la distribución normal en diversas situaciones.

2. Sea X una variable aleatoria continua que distribuye $N(8, 5)$. Determina la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor menor que 6.

- Explica con tus palabras cómo resolviste el problema planteado.
- ¿Por qué no puedes utilizar directamente la tabla de la página 429 para calcular la probabilidad pedida?

Aproximar la probabilidad de la binomial por la probabilidad de la normal.

3. Sea X una variable aleatoria discreta que distribuye $B(80; 0,5)$.

a. ¿Cuál es la media y la desviación estándar de la distribución normal que se aproxima a la binomial?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor entre 36 y 47?

- ¿En qué casos es conveniente aproximar la distribución binomial por la normal?, ¿por qué?
- ¿Por qué no todas las distribuciones binomiales pueden aproximarse fielmente en una distribución normal?, ¿qué condiciones debe cumplir la binomial para que sí se pueda aproximar mediante una normal?

Realizar conjeturas sobre el tipo de distribución al que tienden las medias muestrales.

4. Construye la distribución de medias muestrales de todas las muestras de tamaño 2 que puedes obtener, con reposición, de la población {3, 5, 6, 8, 2}.

a. ¿Cuál es el promedio de las medias muestrales?

b. ¿Cuál es la diferencia entre las media de las distribuicones muestrales y la media de la población?

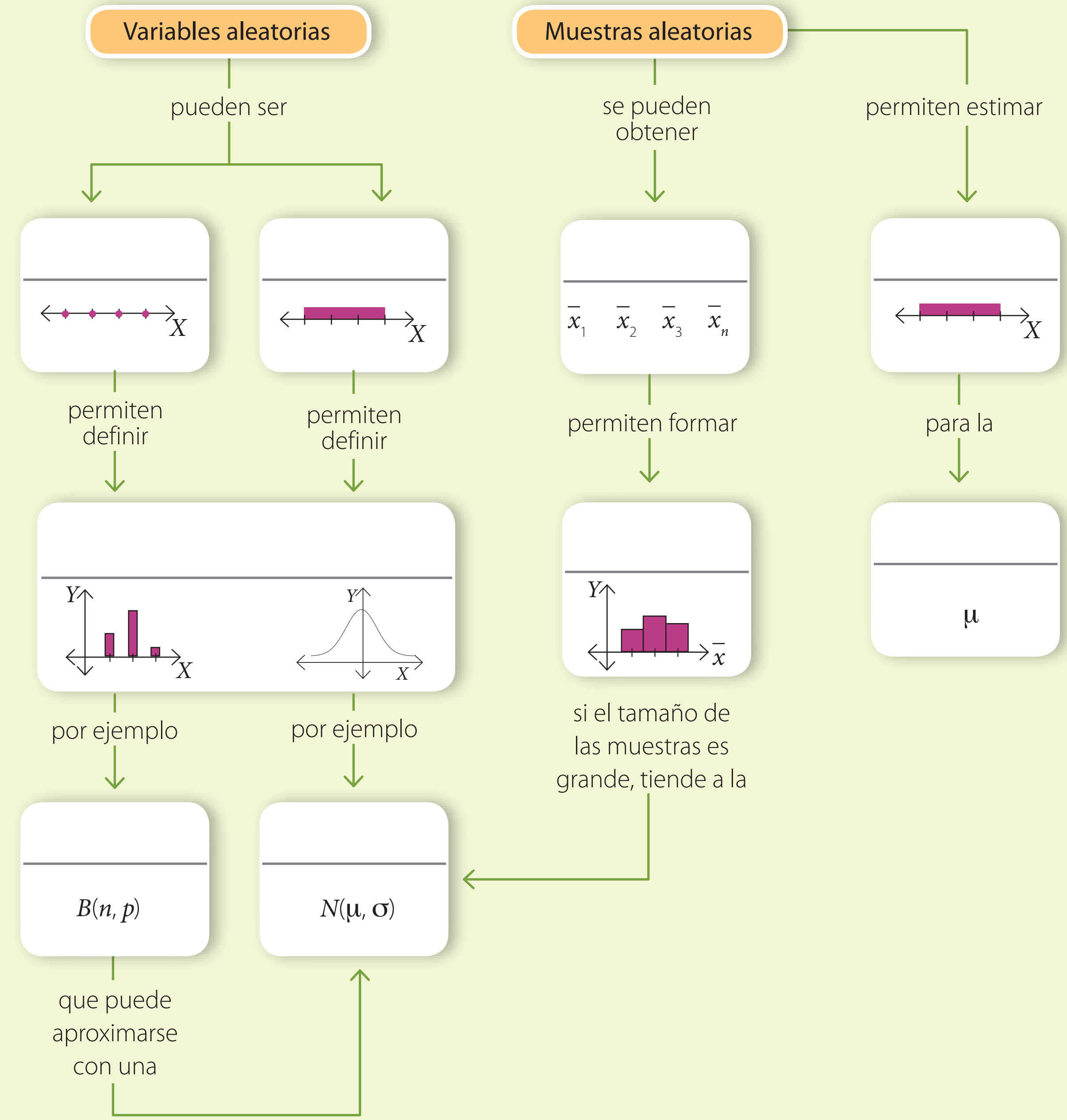
- Explica el procedimiento que realizaste para construir la distribución de medias muestrales.
- ¿Cómo supiste qué cantidad de muestras de tamaño 2 podían obtenerse del conjunto?
- ¿Qué pasaría si las muestras se hubiesen tomado sin reposición?, ¿cambiaría la distribución de las muestras?, ¿y su media?

Estimar intervalos de confianza para la media de una población con distribución normal y varianza conocida.

5. Una muestra aleatoria de 81 televisores reportó que el intervalo de confianza para el tiempo promedio de presentación de fallas técnicas (en años) fue de [2,113, 2,287]. Considerando que la desviación estándar es de 0,4 años, ¿cuál es el nivel de confianza de este intervalo?

- Explica, paso a paso, cómo resolviste el problema anterior.
- Si el tamaño de la muestra aumenta, ¿qué sucede con el nivel de confianza?, ¿y con el valor de la desviación estándar?

6. **Completa el mapa conceptual con los conceptos fundamentales trabajados en la unidad.**



- Compara tu resultado con el de tus compañeros. ¿Hubo diferencias?, ¿cuáles?
- Revisa en el solucionario del Texto los conceptos correctos. ¿Qué otros conceptos agregarías?, ¿en qué lugar del mapa los pondrías?, ¿por qué?

Evaluación final

Aplica lo aprendido en la unidad para desarrollar las siguientes actividades.

1. **Considera la siguiente función definida en el intervalo [0, 5].**

$$f(x) = 0{,}2$$

   a. Construye la gráfica de f.
   b. Demuestra que f puede definir una función de densidad de una variable aleatoria continua.
   c. ¿Cuál es el valor de $P(X = 3)$?
   d. ¿Cuál es el valor de $P(1 < X < 3)$?

2. **Sea Z una variable aleatoria continua con distribución normal estándar. Calcula las siguientes probabilidades.**
   a. $P(z < 1{,}23)$
   b. $P(z > 1{,}23)$
   c. $P(z < -1{,}32)$
   d. $P(z > -0{,}09)$
   e. $P(-2 < z < 3{,}5)$
   f. $P(1{,}44 < z < 3{,}14)$

3. **Sea X una variable aleatoria continua con distribución normal, cuya media es 30 y su desviación estándar es 5. Calcula las siguientes probabilidades.**
   a. $P(x < 39)$
   b. $P(x > 29)$
   c. $P(x < 26)$
   d. $P(x > 40)$
   e. $P(39 < x < 45)$
   f. $P(23 < x < 37)$

4. **En una prueba, cada pregunta tiene 4 alternativas, de las cuales solo una es correcta. Si la prueba tiene 100 preguntas y los alumnos aprueban con más de 50 respuestas correctas, ¿cuál es la probabilidad de que un alumno apruebe marcando todas las alternativas al azar?**

5. **La estatura, en centímetros, de las mujeres mayores de 15 años en Chile tiene distribución normal con varianza 5 cm. Si se tomó una muestra de 49 mujeres mayores de 15 años y el promedio de sus estaturas fue 168 cm, ¿se puede asegurar con un nivel de confianza del 95 % que el promedio de la estatura de las mujeres en Chile es mayor que 165 cm? Justifica tu respuesta.**

6. **Considera el conjunto de los números enteros positivos pares de una cifra.**
   a. Escribe el conjunto por extensión.
   b. Determina la media y la desviación estándar del conjunto anterior.
   c. ¿Cuántas muestras de tamaño 3 puedes obtener del conjunto anterior si son con reposición? Escríbelas.
   d. Construye la distribución de las medias muestrales para muestras de tamaño 3.
   e. ¿Cuál es la media de la distribución?, ¿y la desviación estándar?

7. **Si $X \sim B(50; 0{,}5)$, encuentra aproximaciones normales para $P(X < 20)$, $P(X > 25)$ y $P(10 < X < 30)$.**

8. **Para estimar la cantidad de años de escolaridad de la población mayor de 30 años de una comuna, se decide tomar una muestra de 500 personas. Se sabe que la desviación estándar de la población es 3 años y la media de la muestra es 8 años. ¿Cuál es el error porcentual con un 95 % de confianza?**

9. **Uno de los objetivos de un estudio acerca de los hábitos alimenticios es conocer la cantidad de personas que consumen comida chatarra al menos una vez a la semana.**
   a. Para realizar la estimación al 95 % de confianza, con un margen de error máximo de 0,01 y un desviación estándar de 0,5, ¿cuál es el tamaño necesario de la muestra?
   b. ¿Qué ocurre con el tamaño muestral si se aumenta el nivel de confianza a un 99 %, manteniendo el margen de error? Justifica tu respuesta.
   c. ¿Qué sucede con la amplitud del intervalo en el caso anterior?, ¿por qué crees que ocurre esto?

Marca la opción correcta en los ítems 10 a 14.

10. Si $Z \sim N(0,1)$, ¿qué valor es igual a $P(Z < -1,5)$?

A. $P(Z > -1,5)$
B. $P(Z = -1,5)$
C. $P(Z > 1,5)$
D. $1 - P(Z > 1,5)$
E. $P(Z > -1,5)$

11. ¿Cuántas muestras sin reposición de tamaño 2 pueden obtenerse de una población con 56 individuos?

A. $2 \cdot 56$
B. 2^{56}
C. 2^{55}
D. $56 \cdot \frac{55}{2}$
E. 56^2

12. ¿Cuál de las siguientes funciones definidas en el intervalo dado podría ser una función de densidad de una variable aleatoria continua?

A. $f(x) = -x$, f definida en [–1, 1]
B. $f(x) = -0,5$ f definida en [3, 5]
C. $f(x) = 1$ f definida en [2, 4]
D. $f(x) = 2x$ f definida en [1, 2]
E. $f(x) = x$ f definida en [–2, 0]

13. Si el puntaje de la PSU tiene distribución normal con media 500, entonces:

A. la mayoría de los puntajes se encuentran sobre los 500 puntos.
B. la mayoría de los puntajes se encuentran bajo los 500 puntos.
C. existe la misma cantidad de puntajes sobre 500 puntos y bajo 500 puntos.
D. la mayoría de los puntajes está en 500 puntos.
E. no hay ningún estudiante que obtenga 500 puntos.

14. Cecilia, en su preparación para la PSU de Lenguaje, realizó 10 ensayos y su tiempo promedio fue de una hora y media. Ella sabe que su desviación estándar es de 20 minutos. Si se asume un nivel de confianza del 95 %, el error máximo en tiempo, el día que rinda la prueba, será aproximadamente:

A. 0,14 minutos.
B. 12 minutos.
C. 13 minutos.
D. 3,92 minutos.
E. Ninguna de las anteriores.

Mis logros

Verifica en el solucionario del Texto si tus respuestas son correctas. Si tuviste respuestas incorrectas, marca en la tabla el objetivo de aprendizaje correspondiente y revisa las páginas indicadas.

Criterio	Ítems	¿Que debo hacer si tengo dudas?
Relacionar y aplicar los conceptos de función de densidad y distribución de probabilidad, para el caso de una variable aleatoria continua.	1 y 12	Revisa las páginas 284 a 287.
Conocer y aplicar la distribución normal en diversas situaciones.	2, 3 y 10	Revisa las páginas 288 a 293.
Aproximar la probabilidad de la binomial por la probabilidad de la normal.	4, 7, 13	Revisa las páginas 300 a 305.
Realizar conjeturas sobre el tipo de distribución al que tienden las medias muestrales.	6 y 11	Revisa las páginas 314 a 319.
Estimar intervalos de confianza para la media de una población con distribución normal y varianza conocida.	5, 8, 9 y 14	Revisa las páginas 320 a 323.

Vuelve a la página 279 y lee lo que se esperaba que aprendieras en esta unidad. ¿Crees que lo aprendiste?, ¿por qué? Si aún tienes dudas, acláralas con tu profesor antes de continuar.

Actividades complementarias

Distribución normal y estatura

La estatura es una variable morfológica que depende de la genética y la nutrición. Por esta razón, determinar la variación de la estatura media de una población en cierto período de tiempo sirve como referente para establecer su estado nutricional, lo que permite analizar las condiciones socioeconómicas en una región. Por ejemplo, en algunos países europeos la estatura promedio de los varones aumentó hasta 15 cm entre el siglo XIX y el siglo XXI, debido a los cambios sociales y económicos que permitieron una mejora en la alimentación.

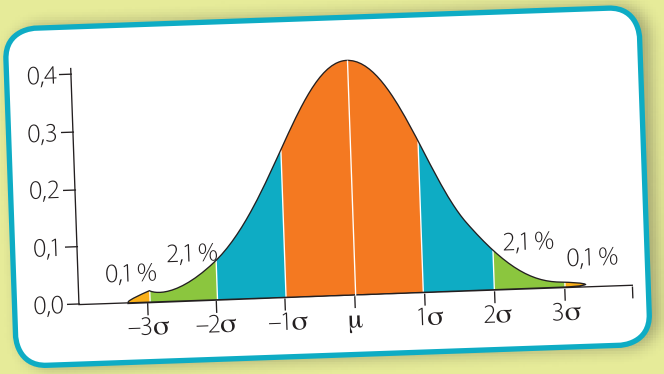
Archivo editorial

En Chile, durante el siglo XX hubo un incremento en la estatura entre 6 y 12 cm, en promedio. Además, se sabe que la diferencia entre la estatura promedio varía debido a los ingresos económicos y a ciertas características raciales.

Para determinar el porcentaje de personas que se ubican en un rango de estatura dado, se utiliza la distribución normal, la cual está dada por la expresión:

$$P(x) = \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2x^2}}$$

donde S es la desviación estándar constante y μ es la media. La gráfica de la distribución normal tiene forma de campana, y el área bajo la curva es 1, lo que equivale al 100 %, como se muestra en la figura.



1. **Consulta las estaturas promedio de hombres y mujeres en dos países diferentes. Luego, escribe las posibles causas por las cuales puede haber diferencias en las estaturas.**
2. **Entre 1945 y 1949, las estaturas promedio de las mujeres y de los hombres eran de aproximadamente 156 cm y 167 cm, respectivamente. Si la desviación estándar era de 1 cm, calcula:**
   a. El porcentaje de mujeres cuya estatura se ubicaba entre los 152 y los 157 cm.
   b. El porcentaje de hombres cuya estatura se ubicaba entre los 166 y los 170 cm.
3. **En tu curso, registren las estaturas de todos los estudiantes y representen la distribución de estas.**
   a. ¿Obtuvieron una distribución parecida a la normal?, ¿por qué?
   b. ¿Cuál es la media y la desviación estándar de la distribución?

Estudios de mercado

Cuando se realiza una expedición o se pasan las vacaciones en un campamento, el saco de dormir es un elemento fundamental, ya que la calidad del sueño influye de manera importante en el rendimiento y las energías que se tienen durante el día; por lo tanto, en este tipo de actividades, desde el humor hasta el éxito en una salida pueden verse afectados por una o muchas malas noches.

Archivo editorial

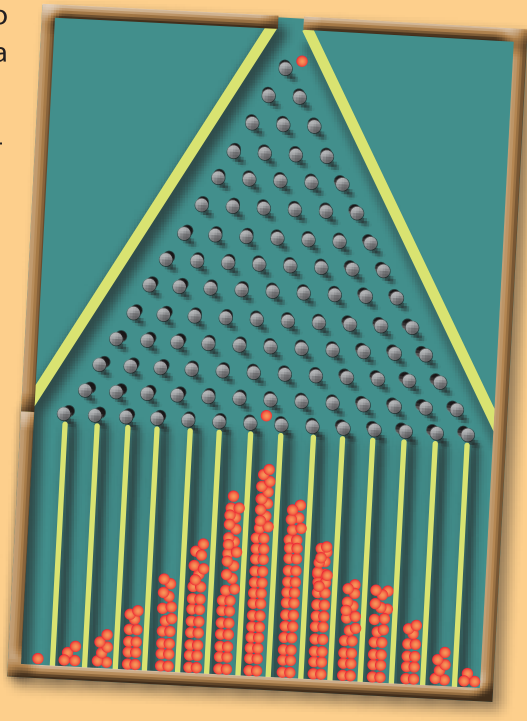
Entre los aspectos que se deben considerar al momento de elegir un saco de dormir, se encuentran sus dimensiones. Es importante tener un poco de libertad en los movimientos dentro del saco, ya que algunos resultados de investigaciones recientes demuestran que alrededor del 70 % de la capacidad térmica es producida por la capa aislante, y cerca del 30 % por el espacio interior del saco, que contiene nuestro aire caliente. En este sentido, es importante que el saco no sea ni muy ancho ni muy estrecho, o perderá una gran parte de sus propiedades. La forma de la capucha, por otro lado, es algo esencial; los sacos de verano pueden tener una capucha muy amplia, pero si la temperatura es menor que 0 ºC es conveniente escoger un saco con capucha totalmente preformada.

En una fábrica de sacos de dormir, los vendedores le comentan al gerente que frecuentemente sus clientes les solicitan sacos con medidas especiales. Él mismo es una persona muy alta. Su estatura está por sobre el 90 % de la estatura de la población, y por eso requiere de un saco de dormir especial, a su medida. Por eso ha pensado que si él tiene este inconveniente, a otras personas también les puede suceder.

1. **En grupos de 4 integrantes, realicen las siguientes actividades.**
   a. Planifiquen un estudio de mercado que permita determinar si para esta fábrica sería rentable fabricar sacos de dormir a la medida. ¿Qué información necesitan obtener?
   b. Diseñen una encuesta para recabar información. ¿Cuáles serían las preguntas contenidas en esta encuesta?
   c. Realicen la encuesta, al menos a 100 personas, para desarrollar el estudio de mercado.
   d. Averigüen cuánto margen debe tener un saco de dormir en relación con la altura de la persona que lo usará.
   e. Elaboren un resumen que incluya los datos obtenidos y sus correspondientes gráficos, en el que presenten sus conclusiones. ¿Qué distribución tienen los datos que obtuvieron?, ¿cómo lo supieron?

Tablero de Galton

El tablero de Galton es un dispositivo formado por un tablero con una serie de clavos que se distribuyen tal como se muestra en la figura.

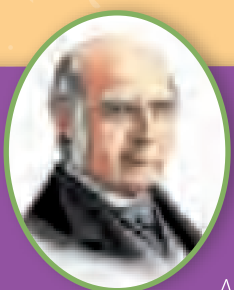


En la parte superior del tablero se ponen unos listones de madera, formando una especie de embudo. Luego, desde arriba se deja caer una bolita y esta pasa a través del "embudo", golpea el clavo superior, que la empuja a la derecha o a la izquierda con la misma probabilidad mientras continúa cayendo. Después choca con otro clavo del nivel inferior y así, sucesivamente, cayendo hacia la derecha o la izquierda de cada clavo, en forma aleatoria, hasta llegar a los compartimentos situados en los espacios bajo la última fila de clavos.

Si realizamos el experimento muchas veces, es decir, dejando caer muchas bolitas, podemos observar que en todos los casos la distribución de bolitas se asemeja a la distribución normal, es decir, los compartimentos con más bolitas se concentran en el medio, mientras que la cantidad de bolitas va disminuyendo hacia los extremos en forma más o menos simétrica.

El tablero de Galton permite visualizar empíricamente el teorema de límite central y, en particular, que la distribución binomial se aproxima a la normal. Esto es más evidente mientras más filas con clavos tenga el tablero, y a medida que se dejan caer más bolitas.

Busca en YouTube experimentos con el tablero de Galton y verifica si las bolas siguen una distribución normal.



Archivo editorial

Francis Galton
1822-1911

Antropólogo y geógrafo inglés. Revolucionó los estudios sobre la herencia con la aplicación de métodos estadísticos. Fue el primero en mostrar que las huellas digitales de cada persona son diferentes a todas las demás.

1. **Cuando una bolita choca con el primer clavo, ¿cuál es la probabilidad de que caiga hacia el lado izquierdo de este?, ¿y hacia el lado derecho?**
2. **En el tablero de la figura, ¿cuál es la probabilidad de que una bolita caiga en uno de sus extremos? Explica cómo lo calculaste.**
3. **En parejas, comenten las siguientes preguntas.**
   a. ¿Cómo se relaciona el tablero de Galton con la distribución binomial?
   b. ¿Cómo se relaciona el tablero de Galton con el teorema del límite central?
4. **Reúnete con tres compañeros, construyan un tablero de Galton y verifiquen si la distribución de las bolitas tiende a la normal.**

El príncipe de los matemáticos

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) nació en Alemania. Es uno de los matemáticos más notables de la historia. Realizó importantes contribuciones en diversas ramas de la matemática y en otras áreas de la ciencia.

En una ocasión , ya en su vejez, Gauss contó la siguiente anécdota a sus amistades cercanas:

Cuando tenía 10 años, el maestro nos propuso en la clase el problema de sumar todos los números desde uno hasta cien. Apenas terminó de enunciarlo, puse mi pizarra en la mesa del profesor y solo al cabo de una hora mis compañeros terminaron el tedioso cálculo. Sus pizarras estaban repletas de sumas, mientras que en la mía solo había un número. Era la única respuesta correcta. Entonces, mi maestro compró con su propio dinero un libro de aritmética y me lo regaló.

En julio de 1796, Gauss demostró que todo entero positivo se puede escribir como la suma de tres números triangulares y lo anotó en su diario como "¡Eureka!". Además, en su tesis doctoral, que escribió a los 21 años, demostró que un polinomio tiene como máximo tantas raíces distintas como indica su grado; este teorema se conoce como teorema fundamental del álgebra.

Su enorme fama aumentó aún más después de su muerte, al descubrirse una gran cantidad de importantes resultados que él no había querido publicar.

Archivo editorial

La curva de la distribución normal también recibe el nombre de **campana de Gauss** en honor a este matemático.

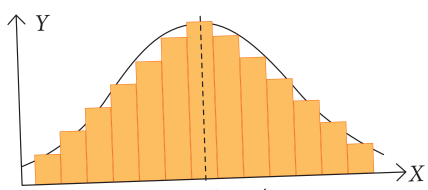
1. **¿Conoces otros aportes de Gauss a las matemáticas?, ¿cuáles? Averigua en Internet.**
2. **¿Cómo calcularías el valor de $1 + 2 + ... + 100$ sin tener que realizar la adición de los 100 sumandos? Averigua cómo lo hizo Gauss y verifica tu solución.**

Teoría de errores

Otra de las aportaciones importantes de Gauss a las ciencias es la teoría de errores.

Cada vez que realicemos una medición habrá errores de diversos tipos. Muchos de ellos son controlables, de modo que podemos desarrollar técnicas con el fin de minimizarlos para que la medida obtenida sea la más cercana posible a la real.

Sin embargo, también hay errores aleatorios que son incontrolables, como por ejemplo la resolución imperfecta del instrumento de medida o las limitaciones de nuestros sentidos al registrar la medición. En estos casos no podemos hacer nada para minimizar el error.



Gauss concluyó que la distribución del error en una sucesión de mediciones está descrita por una distribución normal cuya media representa la medida más probable del objeto.

1. **Reúnete con 3 compañeros y realicen las siguientes actividades.**
   a. Consigan una huincha y midan, en forma independiente, el largo de la sala de clases. Realicen 10 mediciones cada uno.
   b. Organicen los resultados obtenidos en una tabla de frecuencias y luego en un histograma con, al menos, 7 clases. ¿Como es la distribución que obtuvieron?, ¿la pueden aproximar por una distribución normal?, ¿por qué?
   c. A partir de la distribución que obtuvieron, ¿cuál es la longitud más probable de la sala de clases? Comparen su respuesta con las de los otros grupos.

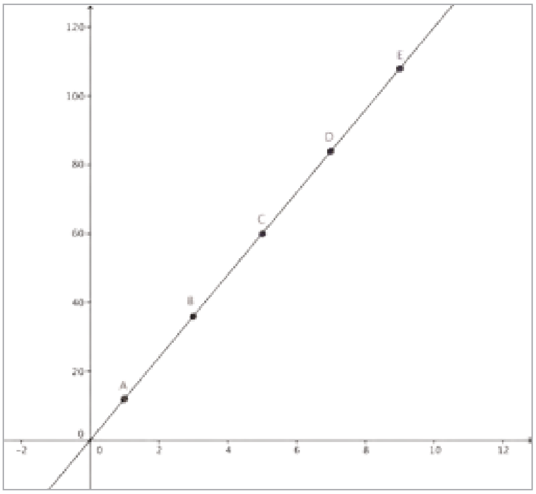
Solucionario

Unidad 1

Páginas 16 y 17

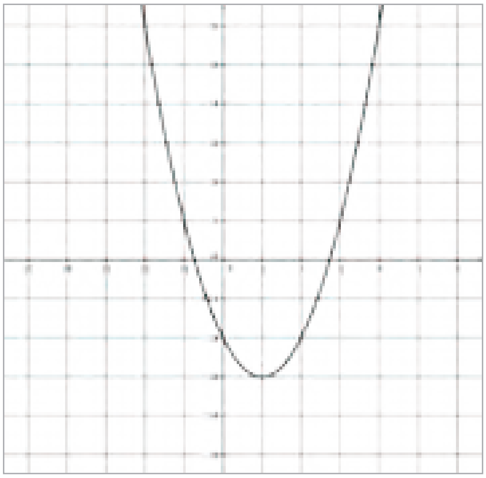
¿Cuánto sé?

1. a. Sí es una función ya que a cada natural le corresponde un único sucesor.
   b. Sí es una función ya que a cada longitud le corresponde una única área.
   c. No es una función ya que cada número racional tiene infinitas representaciones como fracción.
   d. No corresponde a una función ya que dados dos puntos hay infinitas trayectorias que los unen.
2. a. La variable independiente es la longitud de la arista y la dependiente, el volumen del cubo.
   b. La variable independiente es la cantidad de kilogramos de fruta y la dependiente, el precio total a pagar.
3. a. –2
   b. 18
   c. 34
   d. 10
   e. 8
   f. –160
4. a. El dominio de la función son todos números reales entre 0 y 90.
   b. El recorrido de la función son todos los números reales entre 0 y 180.
5. $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$
6. a. $f(t) = 4t + 2$, donde t es el tiempo y cuando $t = 0$, son las 7 a.m.
   b. Es una función afín ya que $n \neq 0$, luego no pasa por el origen.
   c. Para conocer la temperatura al mediodía se calcula $f(5)$. Luego la temperatura máxima fue 22 ºC.
7. a.

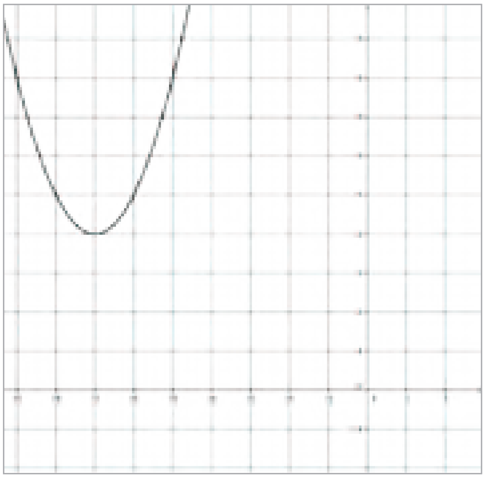


   b. $f(x) = 12x$
   c. 720 m
8. a. 81
   b. $-\frac{1}{8}$
   c. $\frac{16}{25}$
   d. 3
   e. 6
   f. 0
9. Porque, por las propiedades de potencias, cuando el exponente es 0, el valor de la potencia es 1.
10. a. $ 28 384 000
    b. $ 7 096 000
11. a. $10^{19,3}$ ergios.
    b. 10^{25} ergios.
12. a. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$, $rec\ f(x)$ = {números reales mayores o iguales que 4}
    b. $Dom\ f(x)$ = {números reales mayores o iguales que 1}, rec $f(x) = \mathbb{R}^+$
    c. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$, $rec\ f(x) = \mathbb{R}^+_0$.
    d. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}^+_0$, $rec\ f(x)$ = {números reales mayores o iguales que –4}.
    e. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$, $rec\ f(x)$ = {números reales mayores o iguales que –4}.
    f. $Dom\ f(x)$ = {números reales mayores o iguales que –4}, $rec\ f(x)$ = {números reales mayores o iguales que 6}.

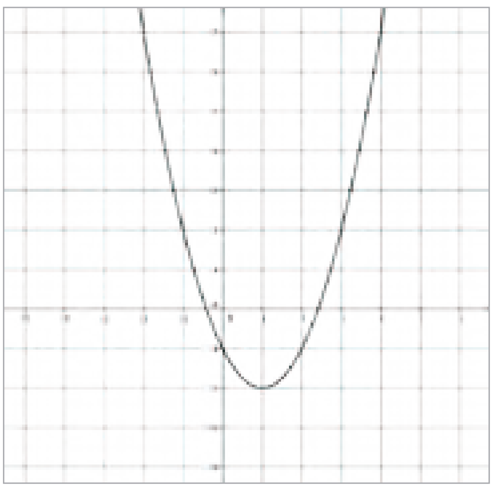
13. a.



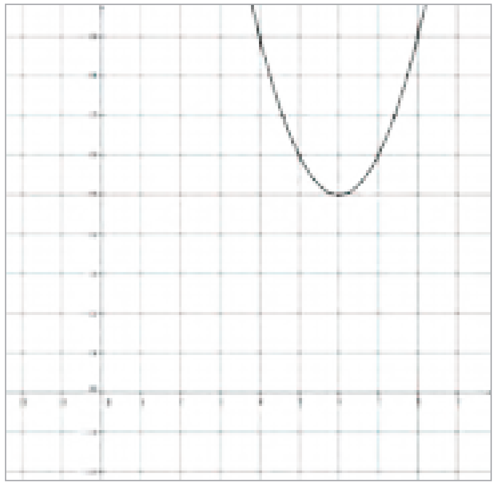
b.



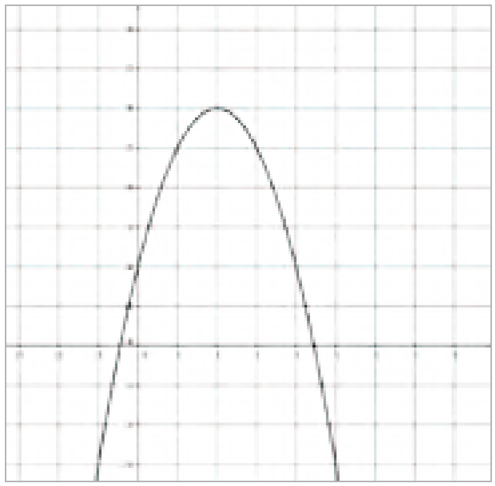
c.



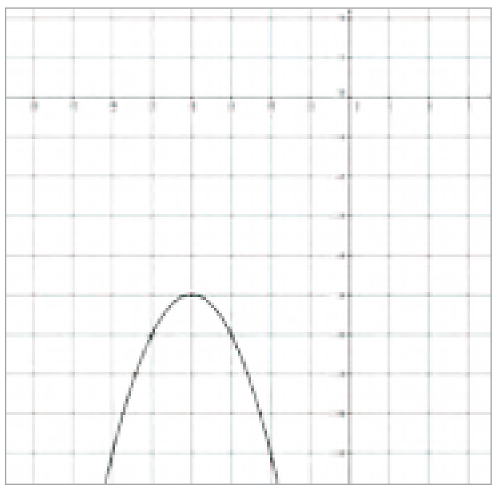
d.



e.



f.



14. a. 3,2 m
    b. 1 s
    c. 2 s

15. $f(x) = -x^2 - 4x - 3$

16. C

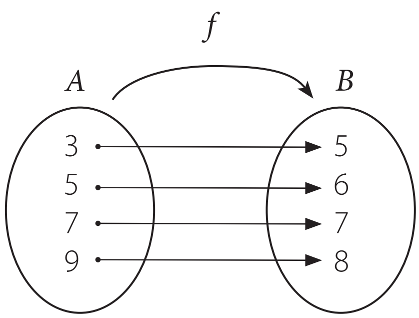
17. B

Página 22

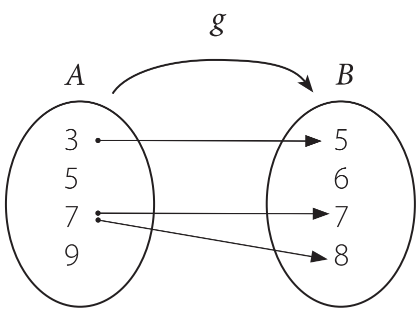
Actividades

1. a. No es función.
   b. Sí es función.
   c. Sí es función.
   d. Sí es función.

2. Por ejemplo, una función es:



Un ejemplo de no función es:



3. a. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$, $rec\ f(x)$ = {números reales mayores que 0 y menores o iguales que 1}.
   b. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$, $rec\ f(x)$ = {números reales mayores o iguales que –1 y menores o iguales que 1}.

4. a. $Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$
   b. $Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{-2\}$
   c. $Dom\ f(x)$ = {números reales mayores que 8}
   d. $Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

5. El dominio de la función tiene al menos 204 elementos, ya que cada elemento del recorrido tiene al menos una preimagen. A su vez, el codominio tiene al menos 204 elementos, ya que es posible que tenga más elementos, pero que no sean imágenes de esta función.

Página 25

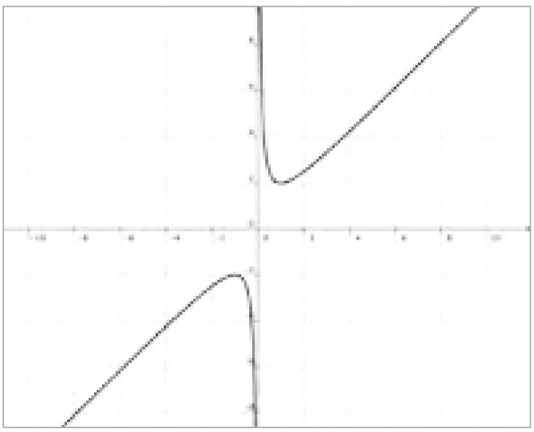
Actividades

1. a. Creciente en valores de x menores que 0 o mayores que 4 y decreciente en valores mayores que 0 y menores que 4.
   b. Creciente en valores de x mayores que 1 y decreciente en valores menores que 1 (con $x \neq 0$, ya que $x = 0$ es asíntota).
   c. Creciente en valores de x menores que –1, o entre 1 y 3 y decreciente en valores entre –1 y 1 o mayores que 3.
   d. Creciente en valores de x menores que –1 y decreciente en valores mayores que –1.

2. a. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}^+$, $rec\ f(x) = \mathbb{R}$.
   b. En todo su dominio.
   c. Nunca.
   d. $x = 0$

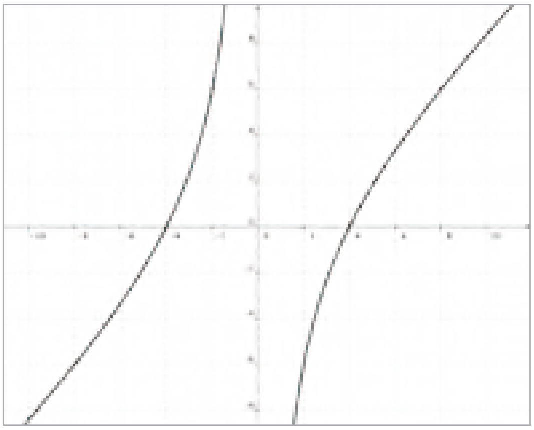
3. Pregunta abierta.

4. a.



   b. $Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$, $rec\ f(x)$ = {números reales menores o iguales que –2 y mayores o iguales que 2}.
   c. Creciente en valores de x menores que –1, o mayores que 1 y decreciente en valores entre –1 y 1, excepto el 0.
   d. Tiene una asíntota en $x = 0$.

e.



Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$, *rec* $f(x) = \mathbb{R}$.
La función es siempre creciente.
Sus asíntotas son $x = 0$.

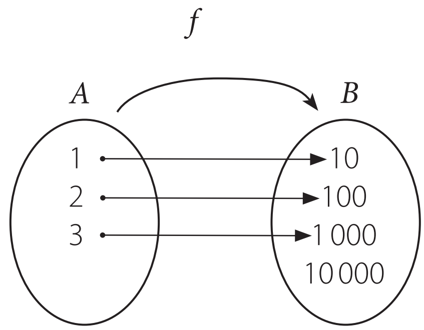
Antes de continuar

1. El codominio corresponde al conjunto de llegada de una función, mientras que el recorrido es un subconjunto del codominio, que contiene a todos los elementos que son imágenes de algún elemento del dominio, para dicha función.
2. Por ejemplo, función exponencial, función identidad, función raíz cuadrada.

Páginas 32 y 33

Actividades

1. a. m es inyectiva, porque a cada elemento del recorrido le corresponde una única preimagen. m no es sobreyectiva, porque 15 pertenece al codominio, pero no al recorrido.
   b. h no es inyectiva, porque 2 tiene dos preimágenes, ni sobreyectiva, porque 1 no tiene preimagen.
   c. s es sobreyectiva, porque el codominio y el recorrido son iguales. s no es inyectiva, porque todos los elementos del dominio tienen la misma imagen.
   d. f es inyectiva, porque a cada elemento del recorrido le corresponde una única preimagen y es sobreyectiva, porque el codominio y el recorrido son iguales.
   e. r es inyectiva, porque a cada elemento del recorrido le corresponde una única preimagen y es sobreyectiva, porque el codominio y el recorrido son iguales.
   f. p es sobreyectiva, porque el codominio y el recorrido son iguales, pero no es inyectiva, ya que tanto 10 como 20 tienen dos preimágenes.
2. Las funciones r y f son biyectivas.
3. a.



   b. (1, 10), (2, 100), (3, 1 000)
   c. f es inyectiva, pero no sobreyectiva, luego, tampoco es biyectiva.
4. a. Sí es inyectiva, porque a cada elemento del recorrido le corresponde una única preimagen.
   b. No es inyectiva, porque para cada elemento del recorrido existen infinitas preimágenes, ya que la función es periódica.
   c. No es inyectiva, porque para casi todos los elementos del recorrido existen dos preimágenes.
5. a. V
   b. F, para que una función sea biyectiva debe ser inyectiva y sobreyectiva.
   c. V
   d. V
6. a. Sí es inyectiva, porque al desarrollar la expresión se obtiene $f(x) = 2x + 1$, y toda función lineal o afín es inyectiva.
   b. No es inyectiva, porque para casi todos los elementos del recorrido existen dos preimágenes.

c. Sí es inyectiva, porque para cualquier x_1 y x_2 se tiene que si $3 + e^{x_1} = 3 + e^{x_2}$, se cumple que $x_1 = x_2$.

d. Sí es inyectiva, porque por propiedades de logaritmos, cuando $\log x_1 + 2 = \log x_2 + 2$ se cumple que $x_1 = x_2$.

7. a. Sí es sobreyectiva, porque el codominio y el recorrido son iguales.
   b. Sí es sobreyectiva porque el codominio y el recorrido son iguales.
   c. No es sobreyectiva, porque el recorrido es $\mathbb{R}^+$.
   d. Sí es sobreyectiva porque el codominio y el recorrido son iguales.

8. a. Observando si toda recta horizontal interseca solo una vez la gráfica de la función.
   b. Analizando si existen valores que no puedan ser representados por la función, por ejemplo, valores negativos en el caso de una función cuadrática con $a > 0$.

9. a. Por ejemplo, $f(x) = x + 1$
   b. Por ejemplo, $f(x) = |x|$
   c. Por ejemplo, $f(x) = x^3 - 4x$
   d. Por ejemplo, $f(x) = e^x$

10. a. $ 3 000 005
    b. $\mathbb{N}$
    c. No, porque no es sobreyectiva.

11. a. $M(x) = \dfrac{6}{x} + 3x + 4$
    b. $Dom\ M$ = {números reales positivos menores que 2}.
    c. No es inyectiva, ni sobreyectiva.

Antes de continuar

12. Por ejemplo, en una función inyectiva las preimágenes de elementos iguales deben ser iguales y en una función sobreyectiva las imágenes de los elementos del dominio deben cubrir todos los elementos del codominio.

13. Debe ser inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Página 34

Repaso

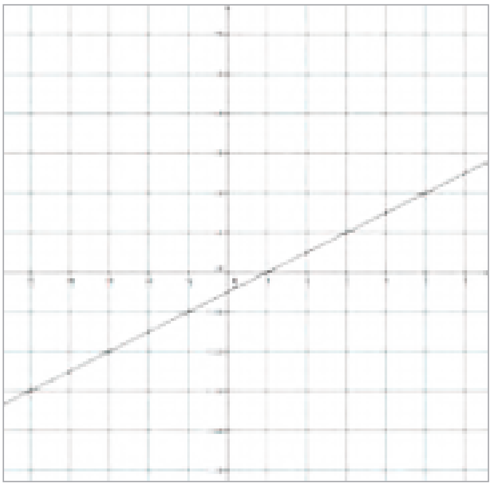
1. Cada elemento del conjunto de partida debe tener una única imagen.

2. $f \circ g(x) = 6x + 2$ y $g \circ f(x) = 6x + 1$

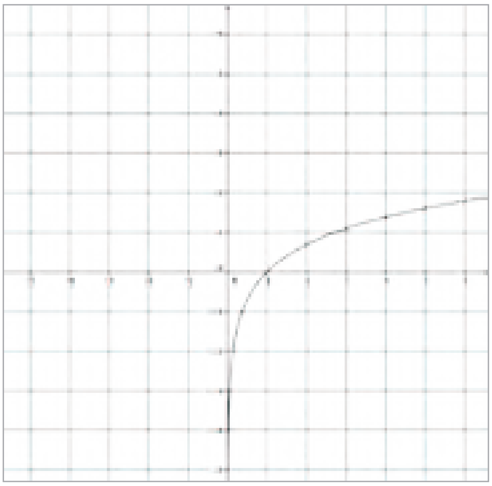
Página 37

Actividades

1. a.



   b.



2. a. La función debe ser biyectiva.
   b. Sí.

3. a. Sí tiene inversa, $f^{-1}(x) = \dfrac{x-4}{3}$
   b. Sí tiene inversa, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{2}}$
   c. No tiene inversa.
   d. Sí tiene inversa, $f^{-1}(x) = 10^x + 5$
   e. Sí tiene inversa, $f^{-1}(x) = \ln(1 - x)$
   f. No tiene inversa.

4. a. p es inyectiva, ya que:

$$p(t_1) = p(t_2)$$
$$30000000 - 2000000t_1 = 30000000 - 2000000t_2$$
$$-2000000t_1 = -2000000t_2$$
$$t_1 = t_2$$

p es sobreyectiva, porque es una función lineal, luego, p es biyectiva.

b. $p^{-1}(t) = \dfrac{30\,000\,000 - t}{2\,000\,000}$.

Se puede interpretar como estimar los años de un automóvil, si se conoce su precio.

5. a. $f(x) = 36x$
   b. $g(x) = \dfrac{x}{36}$
   c. f y g son funciones inversas.
6. a. $T^{-1}(t) = \dfrac{1}{ln\,0{,}97} \cdot ln\left(\dfrac{y - T_0}{T_1 - T_0}\right)$
   b. 22 horas y 45 minutos, aproximadamente.

Antes de continuar

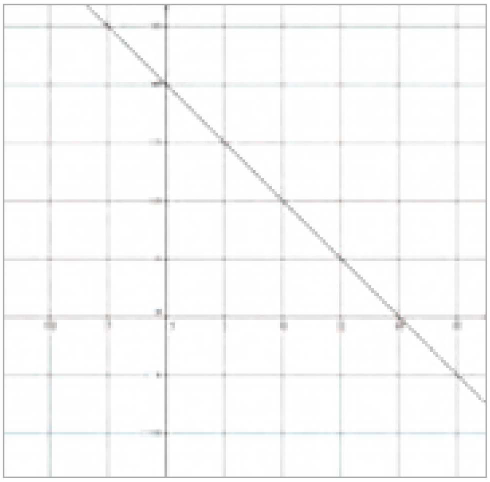
1. Debe ser inyectiva para que a cada elemento del dominio de f^{-1} (recorrido de f) le corresponda una única imagen (preimagen de los elementos del recorrido de f) y debe ser sobreyectiva para que exista la función f^{-1} para todo elemento del dominio de f^{-1} (recorrido de f) .
2. Verificando que $f(f^{-1}(x)) = x$.

Páginas 38 a 41

Practico

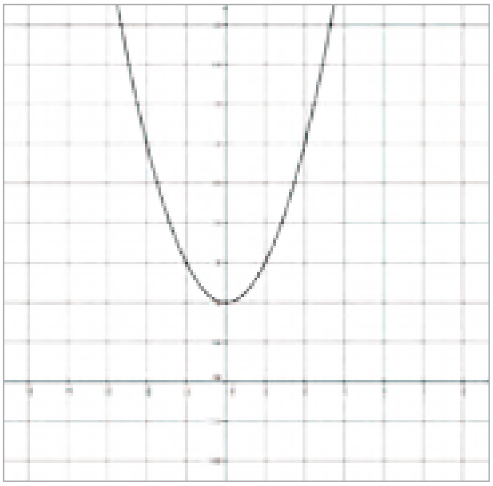
1. a. $f(x) = 6x$.
   b. Si el precio es \$ a cada metro, $f(x) = ax$.
   c. Si el precio de cada entrada es \$ 3 500, $f(x) = 3\,500x$.
   d. Si el interés es de 5%, $f(x) = 1{,}05x$.
2. a. F, ya que casi todos los elementos del recorrido tienen dos preimágenes.
   b. V
   c. F, la función $g: X \rightarrow Y$ es sobreyectiva si $rec\ g = Y$.
   d. F, debe ser inyectiva también.

3. a. Por ejemplo, $h(x) = x - 1$
   b. Por ejemplo, $f(x) = |x|$
4. a.



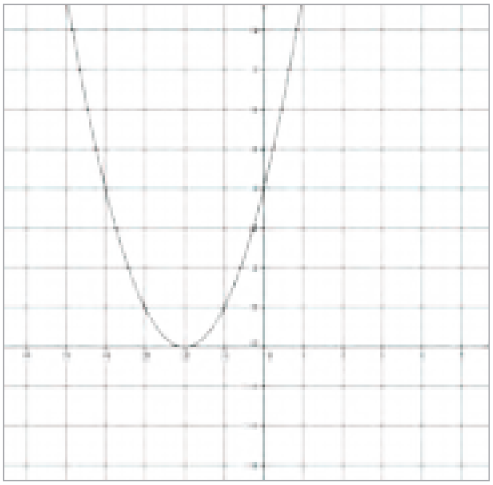
Nunca, $f(x)$ es siempre decreciente.

b.



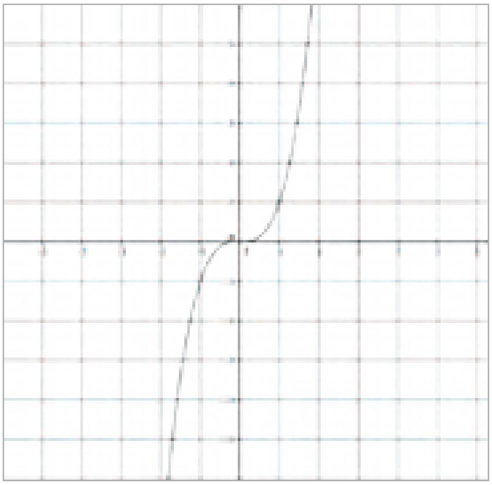
$f(x)$ es creciente para valores de x mayores que 0.

c.



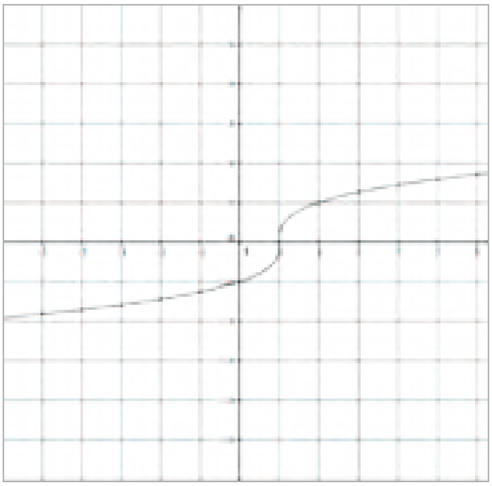
$f(x)$ es creciente para valores de x mayores que –2.

d.



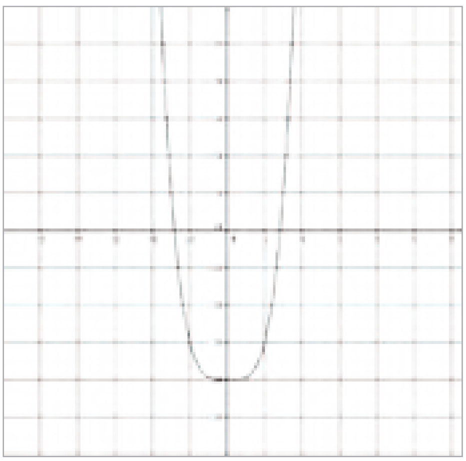
$f(x)$ es siempre creciente.

e.



$f(x)$ es siempre creciente.

f.



$f(x)$ es creciente para valores de x mayores que 0.

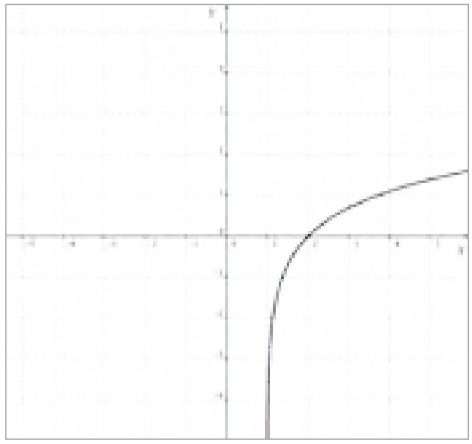
5. Sí, porque para valores de x mayores que 8 la función es siempre creciente. Por lo tanto, es sobreyectiva e inyectiva en ese intervalo.

6. Si $f(x) = e^x$, $dom\, f^{-1}(x) = \mathbb{R}^+$, $rec\, f^{-1}(x) = \mathbb{R}$

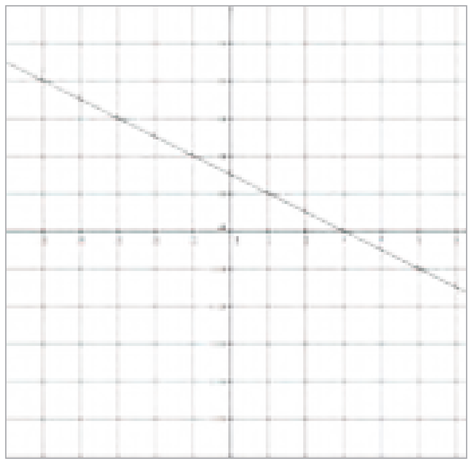
7. $Dom\, f(x)$ = {números reales mayores que -5}.

8. $A = \{2, 3, 4, 5\}$

9. a.



b.



10. a. $V^{-1}(t) = 40\left(1 - \sqrt{\dfrac{t}{100}}\right)$.

Representa los minutos que han transcurrido para que quede cierto volumen de agua en el recipiente.

b. 3 minutos y 7 segundos.

11. a. No tiene inversa. Al trazar una recta horizontal, es posible que interseque más de una vez la gráfica.

b. Sí tiene inversa. Al trazar una recta horizontal, nunca interseca más de una vez la gráfica.

c. No tiene inversa. Al trazar una recta horizontal, es posible que interseque más de una vez la gráfica.

d. Sí tiene inversa. Al trazar una recta horizontal, nunca interseca más de una vez la gráfica.

12. a. $D^{-1}(q) = \frac{q - 300}{26}$

b. $D^{-1}(600) = 11$, ya que la cantidad vendida debe ser un número natural.

c. D^{-1} representa el precio de un producto en función de la cantidad vendida del producto.

13. a. $V(x) = 15\,000 + 2\,000x$

b. $V^{-1}(x) = \frac{x - 15000}{2\,000}$

c. $V^{-1}(21\,000) = 3$

d. Con V^{-1} se puede determinar la cantidad de ingredientes que se agregaron a la pizza, si conocemos su precio.

14. a. $V(x) = x\,(30 - 2x)^2$

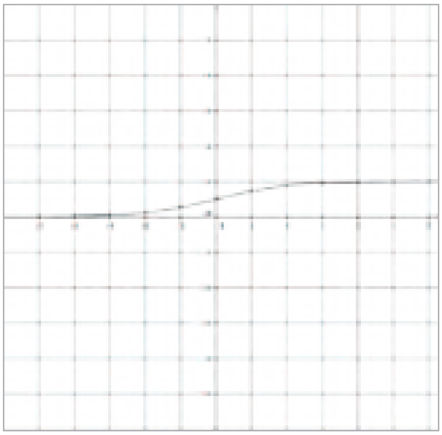
b. $Dom\ f(x) =$ {números reales entre 0 y 15}, $rec\ f(x) =$ {números reales entre 0 y 2 000}, ya que ni la longitud ni el volumen de la caja pueden tener valores negativos y además están limitados por las dimensiones de la pieza de cartón.

c. Es creciente para los valores de x menores que 5 o mayores que 15 y decreciente para los valores de x entre 5 y 15.

d. 10 cm

e. No puede expresarse, ya que la función no tiene función inversa, porque no es una función biyectiva.

15. a.



b. La función P es creciente.

c. $Dom\ P = \mathbb{R}$, $rec\ P =$ {números reales entre 0 y 1}.

d. Sí, $x = 0$ y $x = 1$.

e. La función P es inyectiva, pero no es sobreyectiva.

f. $P^{-1}(t) = -ln\left(\frac{1-y}{y}\right)$.

Representa en qué momento se alcanza cierto crecimiento en la población de animales o de la propagación de la enfermedad.

g. $Dom\ P^{-1} =$ {números reales entre 0 y 1}, $rec\ P^{-1} = \mathbb{R}$.

16. a. Porque si no fuera inyectiva, la inversa no sería función, ya que habría al menos un elemento que tendría más de una imagen.

b. Porque si no fuera sobreyectiva, la inversa no sería función, ya que habría elementos en el dominio que no tendrían imagen.

17. $a = -1$ o bien, $a = \frac{2}{9}$

18. D

19. E

20. C

21. D

22. D

23. B

24. A

25. A

26. D

27. A

28. C

29. C

30. E

31. B

32. C

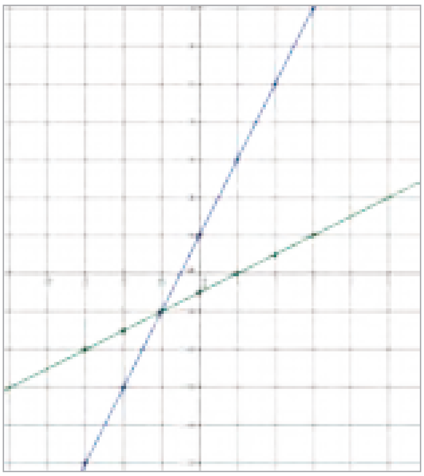
33. C

Páginas 42 y 43

Evaluación de proceso

1. a. Sí es función, porque cada elemento del dominio tiene una única imagen.
   b. No es función, porque existe un elemento del dominio que no tiene imagen.
   c. No es función, porque existe un elemento del dominio que tiene más de una imagen.

2. a. F, $g(8) = 1$
   b. V
   c. V
   d. F, $h(7) = 3$
   e. F, $g(10) = \frac{7}{5}$
   f. F, $f^{-1}(49) = 5$
   g. F, f tiene un mínimo relativo.
   h. F, $Dom\ g(x) = \mathbb{R}$
   i. F, $Dom\ h(x)$ = {números reales mayores que -2}.

3. a. 
   b. $f(x) = 2x + 1, g(x) = \frac{x-1}{2}$
   c. Las funciones f y g son ambas crecientes.
   d. $\frac{59}{2}$

4. Las funciones f y g son ambas biyectivas.

5. Sí, son inversas. porque al calcular $f \circ g$ (o bien $g \circ f$) se obtiene la función $h(x) = x$.

6. a. Es creciente para valores de x entre -5 y 4, y decreciente para valores de x menores que -5 o mayores que 4.
   b. Sí, cuando $x = -5$
   c. Sí, cuando $x = 4$.
   d. Por ejemplo, $(-2, -1)$, $(0, 0)$, $(4, 2)$.
   e. 3,7, aproximadamente.

7. No, porque no cumple con el criterio de la recta horizontal.

8. $Dom\ h = \{3, 4, 5, 6\}$, $rec\ h = \{6, 8, 10, 12\}$, $codom\ h = \{6, 8, 10, 12, 14, 16\}$.

9. h es inyectiva, pero no es sobreyectiva, porque el codominio y el recorrido no son iguales. Luego, tampoco es biyectiva.

10. La función h no tiene inversa. Redefiniendo el codominio como $\{6, 8, 10, 12\}$, existe h^{-1}. $h(x) = 2x$

11. $A = \{0, 1, 2, 3\}$

12. a. No tiene inversa, ya que su gráfica es una parábola, luego, no es inyectiva.
    b. No se puede determinar.
    c. A los 0,2 s y 1,8 s aproximadamente.
    d. 2 segundos.

13. f^{-1} es creciente, porque como es inyectiva, preserva el crecimiento de la función.

14. Pregunta abierta.

15. C

16. E

17. A

18. C

Página 44 y 45

Para reforzar

1. a. V
   b. F, el recorrido de la función $f: X \rightarrow Y$ es un subconjunto del codominio Y.
   c. V
   d. F, en una función f, cada elemento de su dominio debe ser la preimagen de solo un elemento de su recorrido.

2. La función es creciente para los valores de x entre 0 y 2, y también entre 6 y 8; es constante para los valores de x entre 2 y 5; y decreciente para los valores de x entre 5 y 6, así como entre 8 y 10.

3. a. $F(r) = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$
   b. Variable independiente: la distancia que separa los planetas, considerando que se analiza la fuerza entre dos planetas dados, luego la masa de cada planeta es constante, así como la constante de gravitación universal.
   Variable dependiente: la fuerza de atracción entre los planetas.
   c. $Dom\ F = \mathbb{R}^+$, $rec\ F = \mathbb{R}^+$

4. Una función solo inyectiva es $f(x) = e^x$, mientras que una solo sobreyectiva es $f(x) = x^3 - 4x^2$.

5. a. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}^+_0$, $codom\ f(x) =$ {números reales menores o iguales que 3}.
   b. $Dom\ f(x) =$ {números reales mayores o iguales que –3}, $codom\ f(x) = \mathbb{R}^+_0$
   c. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$, $codom\ f(x) = \mathbb{R}^+$
   d. $Dom\ f(x) =$ {números reales mayores que 4}, $codom\ f(x) = \mathbb{R}$

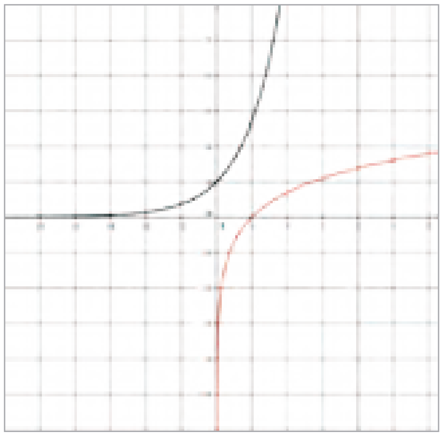
6. a. f es inyectiva, porque cada elemento del recorrido tiene una única preimagen.
   b. t es sobreyectiva, porque el recorrido y el codominio son iguales.
   c. h es biyectiva, porque es inyectiva y también sobreyectiva.
   d. g es inyectiva, porque cada elemento del recorrido tiene una única preimagen.

7. a. f es biyectiva.
   b. f es biyectiva.
   c. f es biyectiva.
   d. f es biyectiva.
   e. f es sobreyectiva.
   f. f es biyectiva.

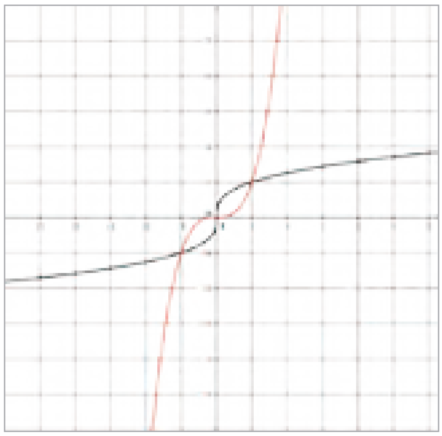
8. a. $f^{-1}(x) = -x + 6$
   b. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 4}$
   c. $f^{-1}(x) = \frac{1 - x}{2}$
   d. $f^{-1}(x) = e^{x + 10}$
   e. $f^{-1}(x) = \frac{ln\ (x - 5)}{2}$
   f. $f^{-1}(x) = 2^x - 5$

9. a. $f(x) = 1{,}19\ x$
   b. $ 2 201 500
   c. $f^{-1}(x) = 0{,}84\ x$

10. a. Sí son inversas.
    b. No son inversas.



    c. No son inversas.

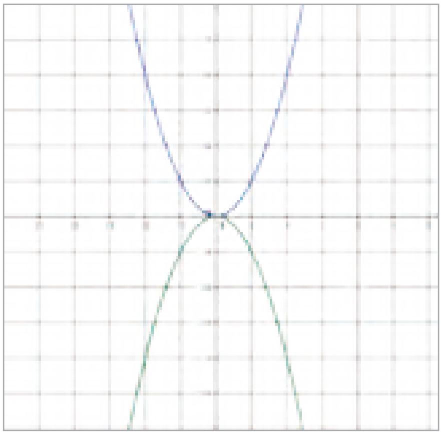


11. La función debe ser biyectiva.

Página 46

Repaso

1. Es una línea curva y simétrica, tiene una rama creciente y otra decreciente. La gráfica recibe el nombre de parábola.

2. 

$f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2$

Página 49

Actividades

1. a. Sí es función potencia.
   b. Sí es función potencia.
   c. Sí es función potencia.
   d. Sí es función potencia.
   e. No es función potencia, es una función polinomial.
   f. No es función potencia, es una función exponencial.

2. a. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$, $rec\ f(x) = \mathbb{R}^+_0$
   b. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$, $rec\ f(x) = \mathbb{R}^-_0$
   c. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$, $rec\ f(x) = \mathbb{R}$
   d. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$, $rec\ f(x) = \mathbb{R}$
   e. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$, $rec\ f(x) = \mathbb{R}^+_0$
   f. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$, $rec\ f(x) = \mathbb{R}$

3. a. Las gráficas son semejantes por su concavidad, es decir, la forma de su curva y tienen el mismo vértice, pero son diferentes en su orientación. Son simétricas respecto al eje X.
   b. Las gráficas son semejantes porque tienen el mismo vértice, pero son diferentes en su orientación y en su concavidad, es decir, la forma de su curva.
   c. Con la misma concavidad que h, pero con la orientación de g.

4. a. Las gráficas son semejantes por su concavidad, es decir, la forma de su curva, y tienen el mismo vértice, pero son diferentes en su orientación. Son simétricas respecto al eje X.
   b. Las gráficas q y r son semejantes porque tienen el mismo vértice y la misma orientación, pero son diferentes en su concavidad.
   c. Con la misma concavidad que r, pero con la orientación de p.

Página 51

Actividades

1. a. $Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$, $rec\ f(x) = \mathbb{R}^+$
   b. $Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$, $rec\ f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$
   c. $Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$, $rec\ f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$
   d. $Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$, $rec\ f(x) = \mathbb{R}^-$
   e. $Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$, $rec\ f(x) = \mathbb{R}^+$
   f. $Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$, $rec\ f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$

2. a. Las gráficas son semejantes por su concavidad, es decir, la forma de su curva, y tienen la misma asíntota, pero son diferentes en su orientación.
   b. $Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$, $rec\ f(x) = \mathbb{R}^+$,
   $dom\ g(x) = \mathbb{R} - \{0\}$, $rec\ g(x) = \mathbb{R}^-$.

3. a. V
   b. F, f es una función potencia de exponente negativo.
   c. V
   d. F, el dominio de f son todos los números reales, excepto el cero.
   e. V

Antes de continuar

El dominio es $\mathbb{R}$ si el exponente es positivo, y $\mathbb{R} - \{0\}$, en el caso de las potencias con exponente negativo. El recorrido es $\mathbb{R}$ si el exponente es positivo impar, y cuando es positivo par, depende del valor de a, es decir, el recorrido es $\mathbb{R}^+_0$ si $a > 0$, y es $\mathbb{R}^-_0$ si $a < 0$. Cuando el exponente es negativo, no incluye el cero, luego, el recorrido es $\mathbb{R} - \{0\}$ si el exponente es impar, y si es par, el recorrido es $\mathbb{R}^+$ si $a > 0$, y es $\mathbb{R}^-$ si $a < 0$.

Página 52

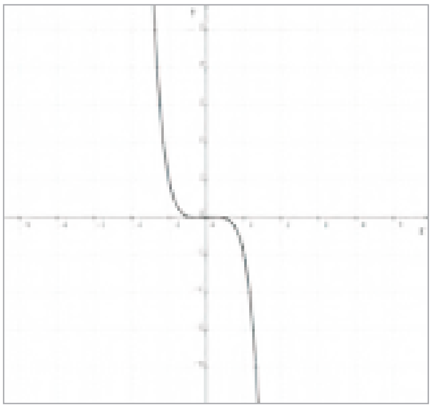
Repaso

1. (0, 3)
2. (5, 0)
3. (–2, 7)

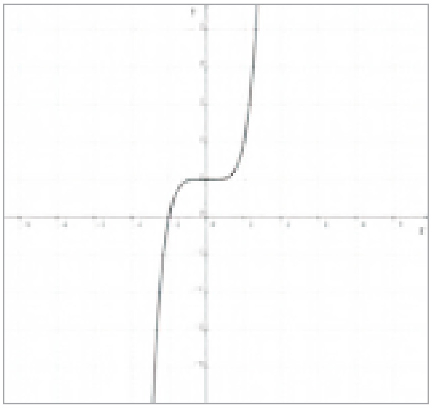
Página 55

Actividades

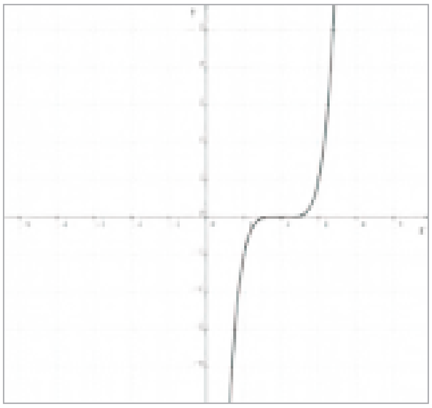
1. a.



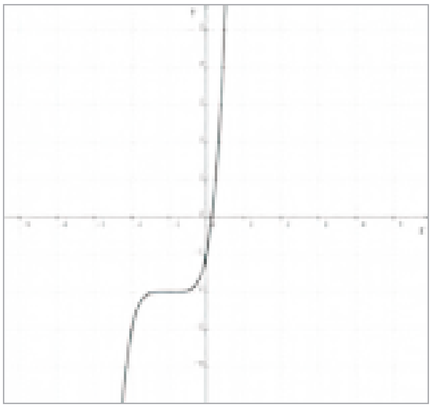
b.



c.



d.



2. a. $f(x) = -0{,}3x^5 - 6$
   b. $f(x) = -0{,}3(x + 4)^5$
   c. $f(x) = -0{,}3(x - 2)^5 + 4$

3. a. (0, 0)
   b. (6, 0)
   c. (0, –17)
   d. (–1,6, 0)
   e. (8, 32)
   f. (–12, 32)

4. a. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$, $rec\ f(x) =$ {números reales mayores o iguales que 5}
   b. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$, $rec\ f(x) = \mathbb{R}$
   c. $Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{8\}$, $rec\ f(x) = \mathbb{R}^-$
   d. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$, $rec\ f(x) = \mathbb{R}$
   e. $Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$,
   $rec\ f(x) =$ {números reales mayores que –4}
   f. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$, $rec\ f(x) =$ {números reales menores o iguales que 13}

5. a. V
   b. F, $b = -5$
   c. V
   d. V
   e. F, f es una función polinomial.
   f. F, solo en el caso de $n = 2$ la gráfica sí corresponde a una parábola.
   g. V

6. $f(x) = 4x^6 - 8$

7. $a = -2$, $b = 4$

8. $x = 3$ e $y = 4$

Antes de continuar

1. Las funciones potencia tienen la forma $f(x) = ax^n$, en cambio las funciones polinominales corresponden a la suma de expresiones de forma ax^n, por ejemplo, $g(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5$.

2. Como la gráfica de $f(x)$ es similar a la de $g(x) = x^4$, pero trasladada 2 unidades hacia la izquierda y 9 hacia abajo, entonces el vértice de $f(x)$ está trasladado de igual manera respecto del de $g(x)$, que se ubica en el (0, 0). Por lo tanto, el vértice de $f(x)$ está en el punto (–2, –9).

Página 56

Repaso

1. Pregunta abierta.

Página 58

Actividades

1. a. 8 053
   b. 22 149
   c. 42 312
2. a. 39 366
   b. 50 388 480
   c. 2 711 943 423
3. a. 8 192
   b. 708 588
   c. 16 777 216
   d. 195 312 500
4. Habrá 3 542 940 bacterias de cierto tipo y 39 546 534 860 bacterias de otro tipo.

Página 61

Actividades

1. a. \$ 6 243
   b. \$ 6 494
   c. \$ 7 574
   d. \$ 8 162
   e. \$ 8 469
   f. \$ 9 441
2. a. F, $dom\ f$ = {números reales mayores que 0}.
   b. V
   c. F, el valor de $f(2)$ corresponde al capital final obtenido con una tasa de interés compuesto de 200%.
   d. V
   e. F, a es un número natural.
   f. F, t es un número natural.
   g. F, f es una función polinomial.
3. a. $f(x) = 32\,000\ (1 + x)^3$, donde x corresponde al porcentaje de interés aplicado, expresado como un número decimal.
   b. Alicia, obtuvo \$ 37 044.
   c. \$ 4 075
4. a. \$ 56 284. Si la tasa fuera el doble, sería \$ 74 405.
   b. Pedro, obtuvo \$ 371 870 más.

Antes de continuar

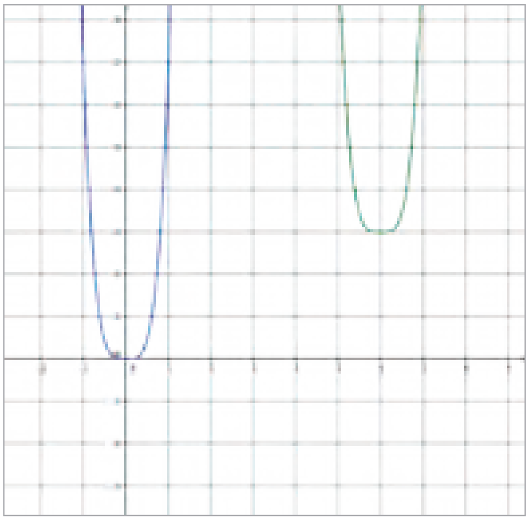
1. Progresiones geométricas y situaciones de interés compuesto.
2. En la función potencia la variable de la función se encuentra en la base de la potencia, en cambio, en la función exponencial, la variable está en el exponente de la potencia.

Páginas 62 a 65

Practico

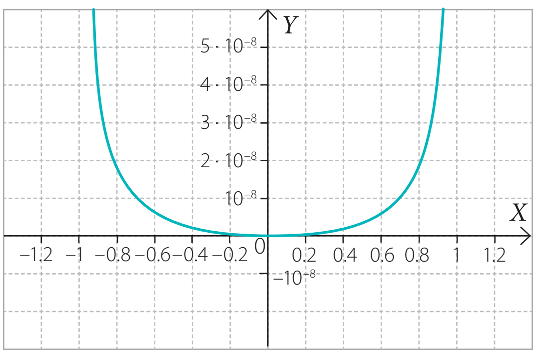
1. a. $V(r) = 2\pi r^3$
   b. $E(v) = \frac{1}{2}mv^2$
   c. $A(a) = \frac{1}{2}a^4$
   d. $P(x) = 12x^7$
   e. $P(u) = 8\pi u^4$
2. Porque al desarrollar la expresión, se obtiene una suma de múltiplos de diversas potencias. Esto corresponde a una función polinomial.
3. a. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$, $rec\ f(x) = \mathbb{R}$
   b. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$, $rec\ f(x) = \mathbb{R}^-_0$
   c. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$, $rec\ f(x)$ = {números reales mayores o iguales que –9}.
   d. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$,
   $rec\ f(x) = \mathbb{R}$
   e. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$, $rec\ f(x)$ = {números reales mayores o iguales que 1}.
   f. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$, $rec\ f(x) = \mathbb{R}$
4. a. (0, 7)
   b. (3, 0)
   c. (0, 5)
   d. (3, 7)
   e. (3, –9)
   f. (–0,5, 2,3)
5. $a = 13$, $b = 4$

6. $f(x) = 7(x - 6)^4 + 3$



7. En rojo, $f(x) = (x + 2)^5$, en azul, $f(x) = (x - 4)^5 + 2$, y en verde, $f(x) = x^5 - 4$.

8. a. (0, 0)
   b. 14 515 200 W/m^2
   c. *Dom* $f(x) = \mathbb{R}^+_0$, *rec* $f(x) = \mathbb{R}^+_0$
   d. Es decreciente para valores de T menores que 0 y creciente para valores de T mayores que 0.
   e.



   f. El primer cuerpo emite 81 veces más energía que el segundo.

9. a. 128
   b. 2 187
   c. 279 936
   d. 340,4825447
   e. 3,5831808
   f. 0,0078125

10. a. $ 216 571
    b. $ 234 331
    c. $ 253 354
    d. $ 318 769
    e. $ 398 512
    f. $ 611 804

11. $f(x) = 200 000\ (1 + x)^8$, donde x corresponde al porcentaje de interés aplicado, expresado como un número decimal.

12. a. No, porque el interés compuesto es una función potencia, luego la diferencia entre 4% y 8% no se traduce en el doble de las ganancias.
    b. Javier retiró $ 190 424, mientras que Andrea retiró $ 151 838.

13. a. $f(x) = 2\pi x^3$
    b. *Dom* $f(x) = \mathbb{R}^+$, *rec* $f(x) = \mathbb{R}^+$, porque la medida del radio y del volumen deben ser positivas.
    c. 2 000π, es decir, 6 208 cm^3, aproximadamente.
    d. El radio basal mide 9 cm. El volumen es 1 458π, 4 580 cm^3, aproximadamente.
    e. La altura también se duplica, mientras que el volumen se octuplica.

14. a. Sí tiene asíntotas, en $x = 0$ y en $y = 0$.
    b. Sí tiene asíntotas, en $x = 3$ y en $y = 0$.
    c. No tiene asíntotas.
    d. Sí tiene asíntotas, en $x = 0$ y en $y = 6$.
    e. Sí tiene asíntotas, en $x = 0$ y en $y = -4$.
    f. Sí tiene asíntotas, en $x = -1$ y en $y = -7$.

15. a. Sí es una función potencia. $h = 10$ y π.
    b. La función es creciente.
    c. *Dom* $f(x) = \mathbb{R}^+$, *rec* $f(x) = \mathbb{R}^+$, porque la medida del radio y del volumen deben ser positivas.
    d. $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$
    e. La capacidad de un envase cilíndrico de 10 cm de altura y 10 cm de radio basal. $f(10) = 3 141$.

16. a. *Dom* $f(x) = \mathbb{R}^+$, *rec* $f(x) = \mathbb{R}^+$, porque la medida de las masas y de la fuerza deben ser positivas.
    b. La función es decreciente.
    c. En el primer caso, la fuerza se reduce a la cuarta parte, en el segundo, aumenta 16 veces.
    d. $3,557 \cdot 10^{22}$ N.

17. E

18. C

19. A

20. C

21. B

22. C

23. E

24. C

25. B

26. E

27. B

28. A

29. B

30. C

31. C

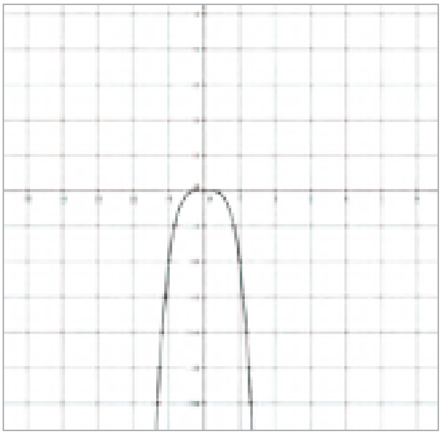
Páginas 66 y 67

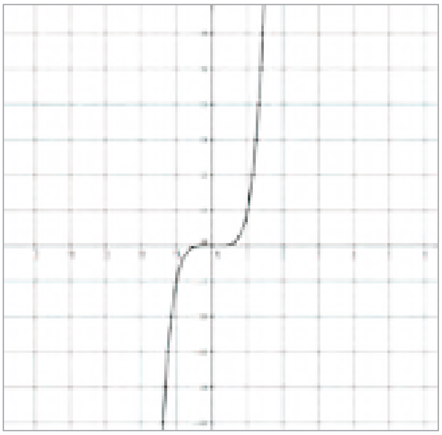
Evaluación de proceso

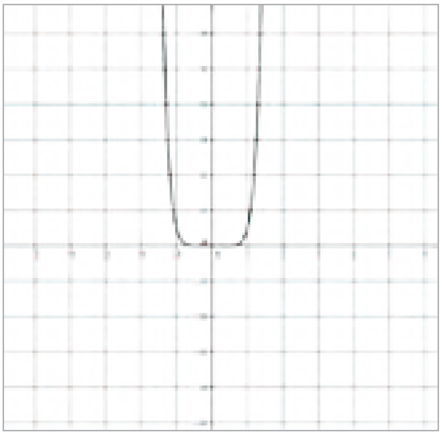
1. a. F, el recorrido de la función potencia $f(x) = ax^n$, con n par y $a > 0$, corresponde a todos los números reales positivos y el 0.
   b. V
   c. F, la función $f(x) = ax^n$, con n impar y $a > 0$, es siempre creciente.
   d. V

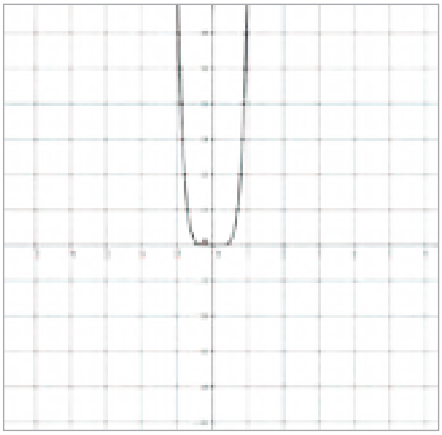
2. a. Sí es función potencia.
   b. No es función potencia.
   c. No es función potencia.
   d. Sí es función potencia.
   e. Sí es función potencia.
   f. No es función potencia.

3. a. Gráfico 2
   b. Gráfico 1
   c. Gráfico 4
   d. Gráfico 3

4. a.


   b.


   c.


d. 

5. La gráfica de color rojo es $f(x) = x^5 + 8$, la de color azul es $f(x) = (x - 6)^5$ y la de color verde es $f(x) = (x + 4)^5 - 6$.

6. a. $Rec\ f(x) = \mathbb{R}$
   b. $Rec\ f(x) =$ {números menores o iguales que –9}
   c. $Rec\ f(x) =$ {números mayores o iguales que 5}
   d. $Rec\ f(x) = \mathbb{R}$
   e. $Rec\ f(x) = \mathbb{R}^+_0$
   f. $Rec\ f(x) =$ {números menores o iguales que 7}

7. a. $f(x) = 3x^4 + 4$
   b. $f(x) = 3(x - 3)^4$
   c. $f(x) = 3(x - 1)^4 + 8$
   d. $f(x) = 3(x + 5)^4 + 2$
   e. $f(x) = 3(x - 9)^4 - 9$
   f. $f(x) = 3(x + a)^4 - b$

8. a. (0, 8)
   b. (0, –9)
   c. (3, 0)
   d. (–5, 0)

9. a. $V(h) = \frac{1}{243}\pi h^3$
   b. Sí, con $a = \frac{1}{243}\pi$, que es constante.
   c. $Dom\ V(h) = \mathbb{R}^+$, $rec\ V(h) = \mathbb{R}^+$, porque tanto la altura como el volumen son números positivos.

10. a. $V(a) = a^3$
    b. $A(d) = \frac{1}{4}\pi d^2$
    c. $V(l) = 12l^3$

11. a. $ 51 197, si la tasa es del 2 %, $ 62 170, si es del 4 %.
    b. 32 000 bacterias del primer tipo y 243 000 del otro tipo.
    c. $ 6077
    d. 2 384 989 110

12. A

13. A

14. B

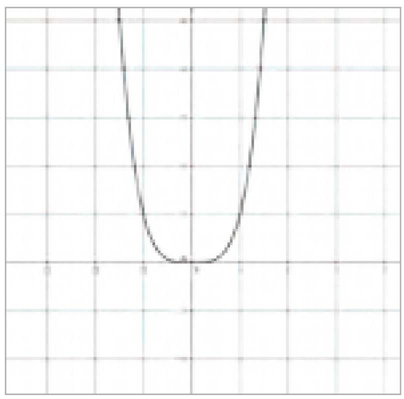
15. A

Páginas 68 y 69

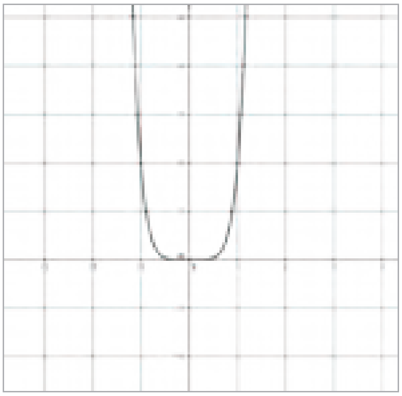
Para reforzar

1. a. V
   b. F, el recorrido de la función potencia $f(x) = ax^n$, con n par y $a > 0$ son todos los números reales positivos y el 0.
   c. F, en la función potencia $f(x) = ax^n$, n debe ser un número entero distinto de 0 y de 1.
   d. F, en toda función potencia $f(x) = ax^n$, con n positivo impar, el recorrido son todos los números reales.

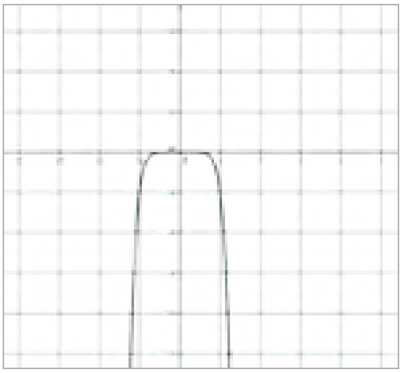
2. a. Porque la variable x está en el exponente, luego, es una función exponencial.
   b. Porque el exponente de la potencia es 1, por lo tanto, es una función lineal.

3. a. 

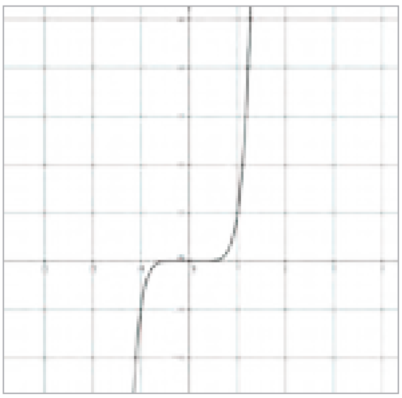
b.



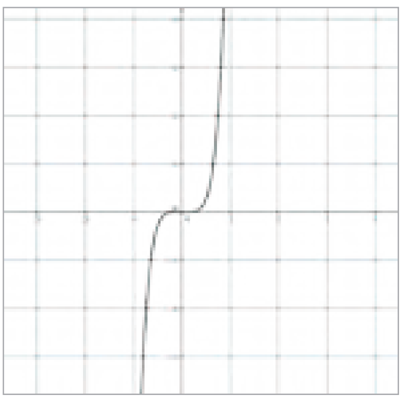
c.



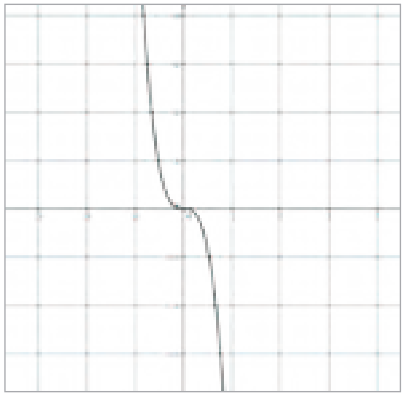
d.



e.



f.



4. a. Se parecen en la forma de la curva, parecida a una parábola, se diferencian en el grado de la curvatura y en la dirección de sus ramas, en el caso de la gráfica obtenida en c.
   b. Se parecen en la forma de la curva, parecida a la gráfica de $f(x) = x^3$, se diferencian en el grado de la curvatura y en su crecimiento, en el caso de la gráfica obtenida en *f*.
   c. Es similar a una parábola. Su dominio es $\mathbb{R}$ y su recorrido depende del valor de a.
   d. Su dominio es $\mathbb{R}$ y su recorrido es $\mathbb{R}$, si el exponente es positivo. Cuando es negativo, el dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$ y su recorrido es $\mathbb{R} - \{0\}$.

5. a. $f(x) = -6(x - 1)^6$
   b. $f(x) = -6x^6 + 1$
   c. $f(x) = -6(x - 2)^6 + 6$
   d. $f(x) = -6(x + 4)^6 + 2$
   e. $f(x) = -6(x - 5)^6 - 3$
   f. $f(x) = -6(x + 6)^6 - 7$

6. (–2, 4), ya que respecto de la gráfica de $f(x) = -6x^6$ está desplazada 2 unidades hacia la derecha y 4 unidades hacia arriba.

7. a. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$, $rec\ f(x) =$ {números reales mayores o iguales que 3}.
   b. Es creciente para los valores de x mayores que –4 y decreciente para los menores que –4.
   c. Las coordenadas del vértice son (–4, 3).
   d. $f(x) = (x + 4)^6 + 3$

8. a. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$, $rec\ f(x) = \mathbb{R}$
   b. Es siempre creciente porque es una función potencia cuyo exponente es impar y positivo.
   c. $f(x) = (x - 1)^3 + 2$

9. $a = -1$, $b = -8$

10. a. $A(a) = a^4$
    b. $P(b) = 3b^3$
    c. $f(x) = 7x^7$
    d. $f(x) = ax^{n-1}$

11. a. $V(l) = 2l^3$
    b. Sí, porque tiene la forma $f(x) = ax^n$, con a constante.
    c. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}^+$, $rec\ f(x) = \mathbb{R}^+$, porque la medida del lado y del volumen deben ser positivas.

12. a. $ 44 583
    b. $ 47 298
    c. $ 53 143
    d. $ 66 648
    e. $ 74 405
    f. $ 125 411

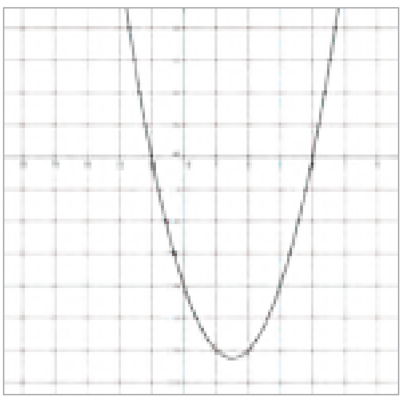
13. a. $ 28 983
    b. No, porque en ese caso habría ganado $ 66 629
    c. Respecto de la tasa del 7%, habría ganado $ 85 766 más.

14. a. 4 096
    b. 354 294
    c. 725 594 112
    d. 62 762 119 218

Páginas 70 y 71

Síntesis

1. a.

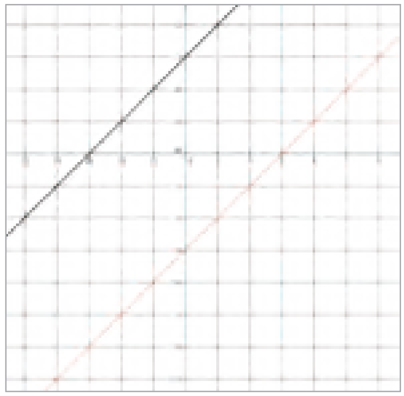


   b. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$, $rec\ f(x) = \{$números reales mayores o iguales que $-\frac{25}{4}\}$.
   c. Para los valores de x mayores que $\frac{3}{2}$.

2. a. No es biyectiva, porque no es inyectiva ni sobreyectiva.
   b. Sí es biyectiva.
   c. No es biyectiva, porque no es sobreyectiva.
   d. Sí es biyectiva.

3. a. No tiene inversa, porque no es biyectiva.
   b. $f^{-1}(x) = \frac{x-4}{3}$
   c. No tiene inversa, porque no es biyectiva.
   d. $f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{\frac{x}{3}}$

4.



5. a. Es función potencia.
   b. Es función potencia.
   c. No es función potencia.
   d. No es función potencia.

6. a. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$, $rec\ f(x) = \mathbb{R}$
   b. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$, $rec\ f(x) = \mathbb{R}^+_0$
   c. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$, $rec\ f(x) = \mathbb{R}^-_0$
   d. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$, $rec\ f(x) = \mathbb{R}$

7. $f(x) = 3(x-3)^5 + 2$

8. $(-5, 6)$

Páginas 72 y 73

Evaluación final

1. a. $Dom\ f(x) = \mathbb{R}$, $rec\ f(x) = \{$números mayores o iguales que $-1\}$
   b. Para valores de x menores que 0.

2. a. $ 3 000 005
   b. $\mathbb{N}$

3. No es inyectiva, ya que según el criterio de la recta horizontal, hay valores de y entre -2 y 0 que tienen más de una preimagen.

4. No, porque no es inyectiva.

5. a. V
   b. F, casi todos los elementos del recorrido tienen dos preimágenes.
   c. V

6. Por ejemplo, $f(x) = e^x$

7. Por ejemplo, $f(x) = x^3 - 9x^2$

8. Por ejemplo, $f(x) = 7x - 4$

9. a. $f^{-1}(x) = \frac{x+4}{3}$

   b. $f^{-1}(x) = 8x - 5$

   c. $f^{-1}(x) = log_4 \frac{x}{3}$

   d. $f^{-1}(x) = 3^x$

10. $f^{-1}(x)$ existe solo si $f(x)$ es biyectiva, es decir, si es inyectiva y sobreyectiva.

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ 3x_1 - 25 &= 3x_2 - 25 \\ 3x_1 &= 3x_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Entonces, $f(x)$ es inyectiva. Además, $f(x)$ es sobreyectiva, porque su recorrido es igual a su codominio.

Por lo tanto, $f(x)$ es biyectiva y $f^{-1}(x)$ sí existe.

11. La composición de dos funciones, si una es la inversa de la otra, resulta igual que x. En este caso,

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(x) &= f^{-1}(f(x)) \\ &= ln((e^x + 1) - 1) \\ &= ln(e^x) \\ &= x \end{aligned}$$

Luego, queda demostrado que si $f(x) = e^x + 1$, entonces $f^{-1}(x) = ln\ (x - 1)$. Las gráficas son simétricas respecto de la recta $f(x) = x$, como puede verse en el gráfico de la página 36.

12. Para los valores de k pares y positivos.

13. a. V
    b. F, es el punto más bajo de la curva solo cuando $a > 0$ y n es par.
    c. V
    d. F, el dominio de tal función potencia es todo $\mathbb{R}$.
    e. V

14. a. En (0, 0) y (1, 2).
    b. La función $f(x)$ es creciente para todos los valores positivos de x, y la función $g(x)$ es creciente en todo su dominio.
    c. $rec\ f(x) = \mathbb{R}^+{}_0$ y $rec\ g(x) = \mathbb{R}$

15. La gráfica de color rojo es $f(x) = 3x^2 - 4$, la de color azul es $f(x) = 3(x + 3)^2$ y la de color verde es $f(x) = (x - 4)^5 + 2$.

16. $f(x) = 7(x - 6)^{-4} + 3$.

17. $a = 7$, $b = -4$

18. Paula tiene $ 15 801 más que Jorge.

19. $a_{20} = 2\,324\,522\,934$

20. 6 000

21. 1 093 500 bacterias.

22. A

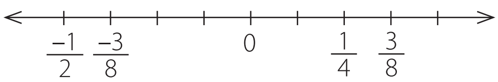
23. E

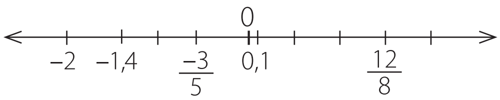
Unidad 2

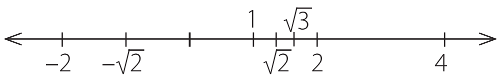
Páginas 82 y 83

¿Cuánto sé?

1. a. >
   b. >
   c. >

2. a. 

   b. 

   c. 

3. a. 4, 5, 6, 7, 8, 9, y 10.
   b. 1, 2, 3, y 4
   c. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y 10.
   d. 4

4. a. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$
   b. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$
   c. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$
   d. $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$
   e. $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$
   f. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$

5. a. {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
   b. {2, 3, 4}
   c. {1, 3, 5, 8, 9}
   d. {3}

6. a. $x = 1$
   b. $x = -10$
   c. $x = \frac{6}{7}$
   d. $x = \frac{16}{11}$

7. a. $x = -4$, $y = 6$
   b. $x = 3$, $y = -1$
   c. Infinitas soluciones.
   d. $x = \frac{8}{13}$, $y = \frac{23}{13}$

8. $a = 12$, $b = 6$

9. a. La pelota costó \$ 6 000, el libro, \$ 4 000 y el chocolate, \$ 2 000.
   b. $m(\sphericalangle\, BAC) = 50°$

10. a. $x = 3$, $y = 4$
    b. 35 cm^2

11. B

12. D

13. E

14. B

15. D

16. E

17. B

18. C

Página 84

Repaso

1. Por ejemplo, 3, 6, 50, 585.

Página 87

Actividades

1. a. $S = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$
   b. $T = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35...\}$
   c. $U = \{-94, -84, -74, -64, -54, -44, -34, -24, -14, 14, 24, 34, 44, 54, 64, 74, 84, 94\}$
   d. $V = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$
   e. $W = \{2\}$

2. a. $O = \{x \in \mathbb{N}$ / x es divisor de 12}
   b. $P = \{x \in \mathbb{N}$ / x es par $\wedge$ x es menor que 12}
   c. $Q = \{x \in \mathbb{N}$ / x es múltiplo de 4 $\wedge$ x es menor que 25}
   d. $R = \{x \in \mathbb{N}$ / x es potencia de 10}
   e. $S = \{x \in \mathbb{N}$ / x es menor que 100 $\wedge$ x termina en 1}
   f. $T = \{x \in \mathbb{N}$ / x es compuesto $\wedge$ x es menor que 10}

3. a. $A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$
   $A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \text{ es divisor de } 20\}$
   b. $B = \{1, 3, 5, 15\}$
   $B = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \text{ es divisor de } 15\}$
   c. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 15, 10, 20\}$
   $A \cup B = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \text{ es divisor de 20 o de } 15\}$
   d. $A \cap B = \{1, 5\}$
   $A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \text{ es divisor de } 5\}$

4. a. $A \cup B = \{-9, -7, -5, -3, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 20\}$
   b. $B \cap C = \{-3, -1, 1, 3, 9\}$
   c. $C \cup A = \{-6, -3, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 20\}$
   d. $(A \cap B) \cup C = \{-6, -3, -1, 1, 3, 5, 6, 9\}$
   e. $(C \cup B) \cup A =$
   $\{-9, -7, -6, -5, -3, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 20\}$
   f. $(B \cap A) \cup (C \cup B) =$
   $\{-9, -7, -6, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 6, 7, 9\}$

5. a. Por ejemplo, $B = \{20, 28\}$
   b. Por ejemplo, $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 9\}$
   c. Por ejemplo, $B = \{1, 5, 8, 40\}$
   d. Por ejemplo, $B = \{5, 9, 15, 19\}$

Antes de continuar

1. Está escrito por extensión cuando se escriben todos los elementos del conjunto, y por comprensión cuando se indica a qué conjunto pertenecen los elementos y se describen sus características.

2. $A = \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
   $A = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x \text{ es mayor que } -10 \text{ y menor que } 10\}$

Página 88

Repaso

1. $a \leq b$ se lee a es menor o igual que b y es una desigualdad que se cumple cuando $a < b$ o bien $a = b$.

Página 89

Actividades

1. a. $m \leqslant 18$
   b. $p \geqslant 15$
   c. $100 < ICAP \leqslant 200$
   d. $64 \leqslant g \leqslant 110$
   e. $n < 6{,}0$
   f. $380 < l \leqslant 780$

2. a. Por ejemplo, el radio de la circunferencia es menor que 6 cm.
   b. Por ejemplo, el tiempo transcurrido no es inferior que 230 s.
   c. Por ejemplo, el perímetro de la figura no puede superar los 5,5 m.
   d. Por ejemplo, el precio de tres pasajes excede los $ 2 500.
   e. Por ejemplo, la suma de dos números distintos es menor que 132.
   f. Por ejemplo, si Nicolás bajara 15 kg, aun tendrá más masa que Marcelo.

3. a. F
   b. V
   c. V
   d. V
   e. V
   f. F
   g. V

4. a. V
   b. V
   c. V
   d. V

5. $19 - 6 < x < 19 + 6$

Página 91

Actividades

1. a. $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
   b. $D = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13...\}$
   c. $E = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
   d. $F = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
   e. $G = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

2. a. $R = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x < 9\}$
   b. $S = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, -8 < x < 1\}$
   c. $T = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, -7 < x < 10 \text{ y } x \text{ es impar}\}$
   d. $U = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 16 < x \text{ y } x \text{ es múltiplo de } 6\}$
   e. $V = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 5 < x < 21 \text{ y } x \text{ es par}\}$
   f. $W = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 12 < x < 40 \text{ y } x \text{ es primo}\}$

3. a. $P \cap Q = \{-4, -2, 0, 2, 4, 6\}$
   b. $R \cup P = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
   c. $(P \cap R) \cup Q = \{-4, -2, 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\}$
   d. $(Q \cup R) \cup P =$
   $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
   e. $(P \cap Q) \cap R = \{2, 4\}$
   f. $(P \cap R) \cup (Q \cup R) = \{-4, -2, 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

4. a. $A = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, -81 < x \leq 19\}$
   b. $B = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, -50 \leqslant x \leqslant 160$ y x es par$\}$
   c. $C = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, -20 < x < 20$ y x es impar$\}$
   d. $D = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x \leqslant 88$ y x es compuesto$\}$

Antes de continuar

1. Cuando la relación establecida se cumple.
2. $b \geq 650$
3. $A = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x$ es mayor que -4 y menor que $8\}$

Página 92

Repaso

1. Por ejemplo, 1,21, 1,221, 1,234, 1,26, 1,2899, 1,2904, 1,356, 1,37, 1,386 y 1,3995.
2. Infinitos.

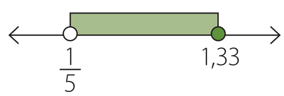
Página 93

Actividades

1. a. Por ejemplo, 0,3, 0,55, 0,879.
   b. Por ejemplo, 3,2, 3,543, 3,921.
   c. Por ejemplo, 1,4112, 1,4135, 1,41415.
   d. Por ejemplo, 0,001, 0,025, 0,068.
   e. Por ejemplo, 1,415, 1,563, 1,7298.
   f. Por ejemplo, –0,0008, –0,0007, –0,0004.

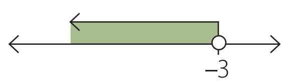
2. a. $]-\infty, -\sqrt{3}[$

   b. $\left]\frac{1}{5}, 1{,}33\right]$

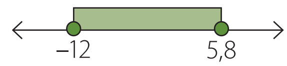


   c. $]0; 0{,}5]$

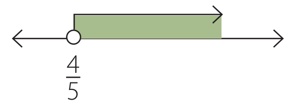
   d. $]-\infty, -3]$



   e. $[-12; 5{,}8]$



   f. $\left]\frac{4}{5}, +\infty\right[$



3. a. Por ejemplo, [0, 4]
   b. Por ejemplo, [10, 18]
   c. [0, 1], [3, 4], [1, 2] y [0, 1], respectivamente.

Página 95

Actividades

1. a. [2, 18[
   b. ø
   c. $\left[-\frac{7}{4}, +\infty\right[$
   d. $\left]0, \frac{5}{3}\right]$
   e. [0, 1[
   f. [0, 20]

2. a. Por ejemplo, $]3, 10[\cup [7, \infty+[$
   b. Por ejemplo, $]-12, 0] \cap \left]-\frac{5}{2}, \infty+\right[$
   c. Por ejemplo, $]-\infty, 25[\cup [15, 100[$
   d. Por ejemplo, $\left[\frac{3}{2}, 20\right[\cap \left[\frac{1}{8}, \frac{19}{3}\right]$

3. a. $]-\infty, 7]$
   b. $]-\infty, 1[\cup [7, +\infty[$
   c. $]-3, 7]$
   d. $]-4, 9[$
   e. $]-3, 1[\cup [7, 9[$
   f. $]-3, 9[$

4. a. $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$, $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0[$
   b. No, porque el intervalo $[0, +\infty[$, que contiene a todo $\mathbb{N}$, contiene además todos los números racionales e irracionales positivos.

Antes de continuar

1. Para representar conjuntos infinitos de números reales que, por compresión, se describen como $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$, con $a < b$, por ejemplo.

2. El intervalo [3, 9] contiene al 3 y al 9, mientras que]3, 9[no los contiene.

Página 96

Repaso

1. No cambia la inclinación de la balanza.

Página 99

Actividades

1. Entre –17 y –3.
2. Entre 34 y 74.
3. Entre $-\frac{7}{2}$ y 1.
4. Su perímetro varía entre 16 cm y 32 cm, mientras que su área aumentada en 2 varía entre 18 cm^2 y 66 cm^2.
5.
$$5 \le t \leqslant 9 \qquad\qquad 5 \leqslant t \leqslant 9$$
$$1 \le t - 4 \leqslant 5 \qquad\qquad 10 \leqslant 2t \leqslant 18$$
$$3 \leqslant 2t - 5 \leqslant 11$$
Multiplicando las desigualdades, ya que ambas son positivas, obtenemos:
$$1 \cdot 3 \leqslant (t-4)(2t-5) \leqslant 5 \cdot 11$$
$$3 \leqslant 2t^2 - 15t + 28 \leqslant 55$$
6. a. Entre los 32 ºF y los 212 ºF.
   b. Entre los 0 ºC y los 100 ºC.
   c. Entre 289,8 K y 297 K.
7. De menor a mayor, $\frac{v+1}{u}, \frac{u+2}{v-1}$.
8. a. F
   b. F
   c. F

Página 101

Actividades

1. En el primer paso, al multiplicar por el número positivo b, ya que así no cambia el sentido de la desigualdad.
2. a. Como $a < 0$ y $b < 0$, por hipótesis, se tiene que $20ab > 0$. Además, el cuadrado de todo número real es siempre positivo.
$$\frac{(2a-5b)^2}{20ab} \geqslant 0$$
$$\frac{4a^2 - 20ab + 25b^2}{20ab} \geqslant 0$$
$$\frac{4a^2 + 25b^2}{20ab} \geqslant \frac{20ab}{20ab}$$
$$\frac{4a^2 + 25b^2}{20ab} \geqslant 1$$
$$\frac{a}{5b} + \frac{5b}{4a} \geqslant 1$$
Luego, queda demostrada la desigualdad.
La igualdad se verifica si $a = \frac{5b}{2}$.
   b. La desigualdad también se satisface para $a > 0$ y $b > 0$, ya que también $20ab > 0$.
3. a.

x	0,95	0,80	0,65	0,20	0,10	0,01
x^2	0,9025	0,64	0,4225	0,04	0,01	0,0001

   b. $x^2 < x$. Si $x \leqslant -1$ o si $x \geqslant 1$ no ocurre lo mismo, en esos casos $x \geqslant x^2$.
   c. Si $0 < x < 1$, entonces $x^2 < x$.
4. Como $a > 0$ y $b > 0$, por hipótesis, entonces $2ab > 0$.
$$2ab > 0$$
$$a^2 + 2ab + b^2 > a^2 + b^2$$
$$(a+b)^2 > a^2 + b^2$$
$$a + b > \frac{a^2 + b^2}{a + b}$$
Luego, queda demostrada la desigualdad.

Antes de continuar

1. Se mantiene.
2. Multiplicar o dividir por un número negativo.
3. Demostrando que es equivalente a algo demostrado anteriormente, o bien justificar que es falsa, usando un contraejemplo.

Páginas 102 a 105

Practico

1. a. F, porque 14 < 18.
   b. V
   c. V

d. V

e. V

f. V

2. a. F, el sentido de una desigualdad de mantiene si se suma o resta un mismo número real negativo en ambos lados de la desigualdad.

b. V

3. a. I = {útiles que se guardan en el estuche}

b. M = {los cinco sentidos}

c. N = {medios de transporte}

d. O = {unidades de medida}

4. a. Por comprensión, ya que se describen sus características.

b. Por extensión, ya que se escriben explícitamente.

c. Por comprensión, ya que se describen sus características.

d. Por extensión, ya que se escriben explícitamente.

e. Por comprensión, ya que se describen sus características.

f. Por comprensión, ya que se describen sus características.

5. a. $C = \{1, 2, 4\}$

b. $D = \{n \in \mathbb{N}$ / n es el antecesor de un múltiplo de 3}

c. $E = \{...-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

d. $F = \{n \in \mathbb{N}$ / n es potencia de 4}

e. $D = \{x \in \mathbb{Z}$ / x es impar y x es negativo}

f. $I = \{10, 12, 24, 20, 30, 40, 60\}$

6. a. $F \cap G = \{6, 18, 54\}$

b. $G \cap H = \{2, 6, 18\}$

c. $F \cap H = \{6, 12, 18, 24\}$

d. $F \cap G \cap H = \{6, 18\}$

e. $(F \cup H) \cap G = \{2, 6, 18, 54\}$

f. $(G \cup H) \cap F = \{6, 12, 18, 24, 54\}$

7. a. $e \geqslant 21$

b. NIS > 50

c. $20 < f < 20\,000$

d. $450 \leqslant d < 500$

8. a. $A = \{x \in \mathbb{Z} / -8 \leqslant x \leqslant 8\}$,
$A = \{-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

b. $B = \{x \in \mathbb{Z} / -3 < x < 5\}$,
$B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

c. $C = \{x \in \mathbb{Z} / 2 \leqslant x \leqslant 15\}$,
$C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

9. Pregunta abierta.

10. a. Por ejemplo, –2, 0, 3.

b. Por ejemplo, 0, 465, 13 567 546.

c. Por ejemplo, –2 748, –735, –18.

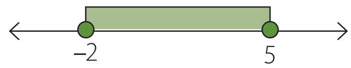
d. Por ejemplo, 2,24, 2,85, 2,986.

e. Por ejemplo, 0, 0,0003, 0,00453.

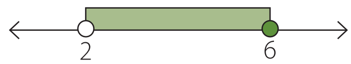
f. Por ejemplo, 1,5, 1,64, 1,7218.

11. a. $]2, 5]$

b. $[-2, 5]$



c. $]2, 6]$



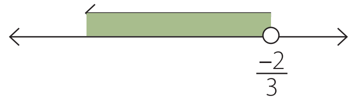
d. $[1, 3[$

e. $[1, 8]$

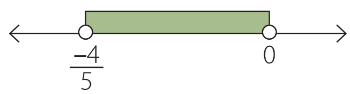
f. $]-4, 4[$

12. a. $]2, +\infty[$

b. $\left]-\infty, -\frac{2}{3}\right[$



c. $\left]-\frac{4}{5}, 0\right[$



d. $[-4, 0[$

e. $]0, \sqrt{2}]$

f. $]7{,}2, 12]$

13. a. $\left[-3, \frac{3}{2}\right[$
  b. $]-\infty, -6]$
  c. $]-5, +\infty[$

14. Entre 2 y 11.

15. Entre 6 cm^2 y 73,5 cm^2.

16. Su volumen varía entre 8 cm^3 y 125 cm^3, el área de una de sus caras varía entre 4 cm^2 y 25 cm^2, y su área total varía entre 24 cm^2 y 150 cm^2.

17. Entre 4 cm y 5 cm.

18. Entre 0 y 5.

19. Enrique necesita $ 6 160, como mínimo y $ 13 520, como máximo.

20. Entre 43,3 pulgadas y 51,1 pulgadas.

21. a. Entre 170 y 493 *sickles* de plata.
  Entre 4 930 y 14 297 *knuts* de bronce.
  b. Mayor que 52 galeones de oro y no superior a 96 galeones de oro.
  Mayor que 25 636 y no superior a 47 328 *knuts* de bronce.

22. D

23. B

24. A

25. A

26. B

27. A

28. D

29. B

30. D

31. E

32. A

33. B

34. B

35. A

36. C

37. C

38. E

39. B

40. C

Páginas 106 y 107

Evaluación de proceso

1. a. $A \cup B = \{-4, -2, 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$
  b. $A \cap C = \{2, 4, 6, 8\}$
  c. $(C \cup B) \cup A = \{-4, -2, 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$
  d. $(B \cap C) \cap A = \{2, 4, 6\}$

2. $A = \{9\}$

3. a. $-2 \leqslant p \leqslant 6$
  b. $0 < k < 10$
  c. $b \leqslant 5$
  d. $-12 \leqslant q < 0$

4. a. F, porque $(-4)^2$ es positivo, mientras que $(-4)^3$ es negativo.
  b. V
  c. V
  d. V

5. a. $[1, 7[$
  b. $[1, 40[$
  c. $\varnothing$
  d. $\mathbb{R}$
  e. $\left[\frac{1}{4}, 5\right[$
  f. $\left[\frac{7}{8}, \frac{8}{7}\right[$

6. a. $[-2, 5]$
  b. $]-\infty, -4]$
  c. $]-\infty, -4] \cup \left[\frac{3}{5}, +\infty\right[$
  d. $\left]-\infty, \frac{9}{4}\right[$
  e. $[8, +\infty[$

7. a. $-8 \leqslant 2p < 10$
  b. $-5 < -p \leqslant 4$

c. $-\frac{23}{15} \leqslant \frac{p}{3} - \frac{1}{5} < \frac{22}{15}$

d. $-21 \leqslant 4p - 5 < 15$

e. $-29 < 6 - 7p \leqslant 34$

f. $-\frac{31}{12} < \frac{3}{4} - \frac{2p}{3} \leqslant \frac{41}{12}$

8. a. $n^2 + 1 \geqslant 2n$
   b. Sí.
   c. Como el cuadrado de todo número natural es positivo,
   $$(n-1)^2 \geqslant 0$$
   $$n^2 - 2n + 1 \geqslant 0$$
   $$n^2 + 1 \geqslant 2n$$
   Luego, queda demostrada la afirmación.

9. a. Entre 60 m^2 y 140 m^2.
   b. Entre 35 m y 51 m.
   c. Entre 11,3 m y 17 m.

10. B

11. D

12. A

13. E

14. C

15. E

16. E

17. A

18. D

19. B

Páginas 108 y 109

Para reforzar

1. a. D = {productos lácteos}
   b. Z = {vocales}
   c. $C = \{x \in \mathbb{N}$ / x es divisor de 16}
   d. $B = \{x \in \mathbb{N}$ / x es cuadrado perfecto}
   e. $A = \{x \in \mathbb{N}$ / x termina en 7 $\wedge$ x tiene dos cifras}
   f. $E = \{x \in \mathbb{N}$ / x es múltiplo de 4 $\wedge$ x termina en 4 $\wedge$ $x < 100\}$
   g. P = {neutro multiplicativo}

2. a. $J = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$
   b. $K = \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 110...\}$
   c. $L = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54...\}$
   d. $M = \{2\}$
   e. $N = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
   f. $I = \{-9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9\}$
   g. $R = \{-99, -89, -79, -69, -59, -49, -39, -29, -19, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99\}$

3. a. $P > A$
   b. $C \leqslant 800$
   c. $v \leqslant 45$
   d. $8 \leqslant T \leqslant 22$
   e. $M + 6 < 17$

4. a. F, el lado izquierdo es igual que 8, mientras que el lado derecho es igual que 16.
   b. V
   c. V
   d. F, son iguales.
   e. V
   f. F, el lado izquierdo es igual que 16, mientras que el lado derecho es igual que 58.

5. Pregunta abierta.

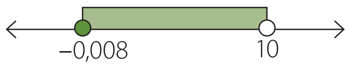
6. a. $R = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1\}$
   b. $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   c. $S = \{0, 1, 2, 3\}$
   d. $X = \{x \in \mathbb{Z} / -2 \leqslant x \leqslant 7\}$
   e. $Y = \{x \in \mathbb{Z}$ / $x \geqslant -4 \wedge x$ es par}

7. a. No.
   b. Sí.
   c. Sí.
   d. No.
   e. No.
   f. Sí.

8. a. $R =]-\infty, 8[$
   b. $S =]0{,}5;\ 6{,}5]$
   c. $T = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right]$
   d. $R =]\sqrt{47}, +\infty[$
   e. $S = [\pi, +\infty[$
   f. $T =]p, q[$

9. a. $]-\infty, 1] \cup]5, +\infty[$
   b. $]5, 15]$
   c. $[-1, 1] \cup]5, +\infty[$
   d. $[-1, 1]$

10. a. 

   b. 

   c. 

   d. 

   e. 

   f. 

11. El perímetro varía entre 9 cm y 12 cm, su altura, entre $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm y $2\sqrt{3}$ cm, y su área, entre $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ cm^2 y $4\sqrt{3}$ cm^2.

12. a. $]0{,}01, +\infty[$
   b. $\left[-5, \frac{18}{4}\right]$
   c. $]-2, \pi]$
   d. $]-\infty, -4]$

13. a. $a > c$
   b. $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
   c. $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

14. Porque al remplazar $k = -3$, lo que ha hecho es multiplicar la desigualdad por un número negativo, y en este caso, cambia el sentido de la desigualdad.

15. a. El menor perímetro sería de 270 m. La menor área sería de 4 050 m^2.
   b. La mayor área sería de 10 800 m^2. El mayor perímetro sería de 420 m.
   c. Entre 45 m y 55 m.

16.
$$1 \leqslant k \leqslant 2 \qquad\qquad 1 \leqslant k \leqslant 2$$
$$0 \leqslant k - 1 \leqslant 1 \qquad\qquad 5 \leqslant 5k \leqslant 10$$
$$8 \leqslant 5k + 3 \leqslant 13$$

Multiplicando las desigualdades, ya que ambas son positivas, obtenemos:

$$0 \cdot 8 \leqslant (k - 1)(5k + 3) \leqslant 1 \cdot 13$$
$$0 \leqslant 5k^2 - 2k - 3 \leqslant 13$$

Página 112

Repaso

1. Es una igualdad que contiene al menos un término desconocido llamado incógnita.

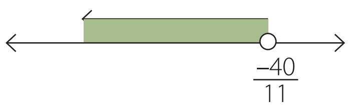
2.
$$2x - 3 = 19$$
$$2x - 3 + 3 = 19 + 3$$
$$2x = 22$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{22}{2}$$
$$x = 11$$

Página 113

Actividades

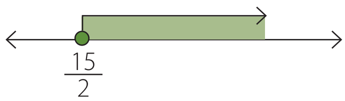
1. a. $]-\infty, 6[$ 

   b. $[1, +\infty[$ 

   c. $\left]-\infty, -\frac{40}{11}\right[$ 

   d. $[-7, +\infty[$ 

   e. $]6, +\infty[$ 

   f. $\left[\frac{15}{2}, +\infty\right[$ 

2. a. 900 m^2
   b. 5,5
   c. 2 cajas.

Página 115

Actividades

1. a. $x = 1$
   b. $x \in \{-3, -2, -1\}$
   c. $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   d. $\mathbb{R}^-$
   e. $x = 1$
   f. ∅
2. Pregunta abierta.
3. a. {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15}
   b. 6 números. {94, 95, 96, 97, 98, 99}
   c. 21
   d. Hay tres soluciones posibles, Gustavo podría tener 5 años, 3 años o 1 año.
   e.]0, 8]
   f. 54 minutos.
4. a. No. Por ejemplo, es posible que al desarrollar la inecuación se cancelen las variables y se obtenga una identidad, si la desigualdad es cierta, o una contradicción, si la desigualdad no se cumple. En este caso, la inecuación no tiene solución.
   b. Además del caso ya descrito, una inecuación podría no tener solución si la solución algebraica no es pertinente al contexto del problema. Por ejemplo, si para una medida de longitud se obtuvieran como solución solo números negativos, la inecuación no tendría solución.

Antes de continuar

1. Una inecuación es una desigualdad que tiene una o más incógnitas.
2. $24 - 5x < 56 \quad / -24$

   $-5x < 32 \quad / : -5$

   $x > -\dfrac{32}{5}$

3. Que las características de los números del conjunto solución sean apropiadas para representar los datos del problema. Por ejemplo, si se está contando el número de personas que cumplen cierta condición, el resultado no podría ser negativo ni tampoco fraccionario, sino que deben ser números naturales.

Página 116

Repaso

1. Consiste en dos o más inecuaciones lineales que deben resolverse simultáneamente.
2. No, porque satisface solo la primera ecuación, y la solución de un sistema de ecuaciones debe satisfacer ambas soluciones simultáneamente.

Página 118

Actividades

1. Pregunta abierta.
2. a. [7, +∞[

   b. [–2, 6[

   c. [3,5, 4,2[

   d.]6, 9]

   e. ∅
   f. ∅
3. {1, 2, 3, 4}
4. a. No existe el valor de a tal que se obtenga ese conjunto solución.
   b. No existe el valor de a tal que el conjunto solución sea vacío.
5. a. 13
   b. 5 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm o 9 cm.
   c. 3 CD y 5 CD, respectivamente.

Página 119

Actividades

1. a. $]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$
   b. $]-\infty, -3[\cup]5, +\infty[$
   c. $]6, +\infty[$
   d. $\left[\frac{4}{5}, 2\right[$

2. Reescribiendo la inecuación como $\left.\begin{matrix} x-1>0 \\ x-2>0 \end{matrix}\right|$ cuando ambos factores son positivos, y $\left.\begin{matrix} x-1<0 \\ x-2<0 \end{matrix}\right|$, cuando son ambos negativos.
   Solución: $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

Antes de continuar

1. Se resuelve cada inecuación por separado y luego se intersecan los conjuntos solución obtenidos. La solución del sistema debe satisfacer ambas inecuaciones simultáneamente.

2. Sí, cuando los conjuntos solución correspondientes a cada inecuación son disjuntos.

Página 120

Repaso

1. $x + 4 = 2x$

2. $5{,}8 < x < 6{,}5$

Página 123

Actividades

1. a. No, porque para ese cuadrado requiere 72 cm de alambre. Para un cuadrado de 10 cm de lado sí le alcanza, porque 40 cm < 62 cm.
   b. 15,5 cm

2. a. 38 m
   b. 14, 15 y 16 años.
   c. En bebidas, pudo venderse $ 31 200 y en jugos, $ 38 800.
   d. –3
   e. 8 m.
   f. En orden de los punteros del reloj, 64 m, 24 m, 47 m, 22 m, 111 m y 46 m.
   g. Entre 1 minuto y 12 segundos, como mínimo, y 2 minutos, como máximo.
   h. Entre 3,52 mg/L y 20,76 mg/L, aproximadamente.

3. Pregunta abierta.

Antes de continuar

1. Pregunta abierta.

Páginas 126 a 129

Practico

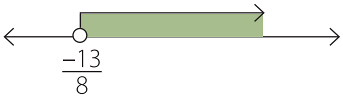
1. a. No. En algunos casos la solución puede ser solo un número o, incluso, es posible que la inecuación no tenga solución en los números reales.
   b. Sí, por ejemplo, cuando la solución de la primera inecuación es $]-\infty, -3]$ y la solución de la segunda inecuación es $[-3, 8]$.

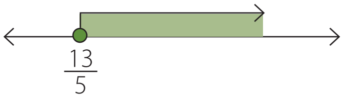
2. a. $]-\infty, 12[$
   b. $]-\infty, -6[$
   c. $\{1, 2, 3, 4\}$
   d. $\left]-\frac{3}{2}, 0\right[$
   e. $\left]-\infty, -\frac{7}{3}\right]$
   f. $\left]-\frac{1}{5}, +\infty\right[$

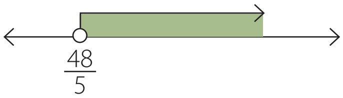
3. a. $]-1, 1]$
   b. $\left]\frac{21}{13}, +\infty\right[$
   c. $]-\infty, 1{,}3]$
   d. $\varnothing$

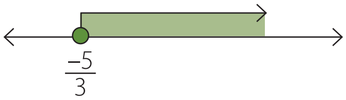
4. a. $]0, 1[$
   b. $\left[-\frac{1}{2}, 3\right[$
   c. $\left]0, \frac{5}{3}\right[$
   d. $]-\infty, -3[\cup]4, +\infty[$

5. a. 

b. 

c. 

d. 

e. 

6. a. Por ejemplo, $\left.\begin{array}{r} x - 17 \leq 0 \\ 2x - 16 > 0 \end{array}\right|$

b. Por ejemplo, $3x + 12 \leq -6$

c. Por ejemplo, $5x - 17 > 18$

d. Por ejemplo, $14x^2 - 19x + 6 \leq 0$

7. a. $]200, +\infty[$ 

b. $[0, 200]$

8. $T < \frac{1}{3}$

9. Las longitudes pueden variar entre 6 cm y 18 cm.

10. 12 años.

11. Podrá ganar $ 6 000 por hora.

12. 17 cm, 19 cm y 24 cm.

13. Entre las 17:00 h y las 17:30 h.

14. Hay varias soluciones posibles: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23}

15. Todo número natural es solución de la inecuación.

16. Ningún número natural satisface la inecuación.

17. 325, 326 y 327.

18. El ancho puede medir a lo más 2,5 m.

19. La altura mide menos de 16 cm.

20. 8 cm

21. 16 cm

22. $ 76 000 para el mayor y $ 38 000 para el menor.

23. $m < 0,00583$

24. a. F, una inecuación es una desigualdad que tiene una o más incógnitas.

b. V

c. F, la solución de un sistema de inecuaciones está dada por la intersección del conjunto solución de cada inecuación.

d. F, también puede ser uno o más números reales que no se ordenen en un intervalo o incluso que el conjunto solución sea vacío.

25. Se diferencian en que la ecuación corresponde a una igualdad, mientras que la inecuación corresponde a una desigualdad. Son similares en el sentido que tienen una o más incógnitas, cuyo valor hay que determinar. En el caso de los sistemas, son similares porque deben cumplirse todas las condiciones simultáneamente, ya sean ecuaciones o inecuaciones. Se diferencian en el procedimiento, ya que un sistema de ecuaciones se resuelve relacionando las distintas ecuaciones, en cambio, en el caso de las inecuaciones, se resuelve cada inecuación por separado y luego se intersecan sus conjuntos solución.

26. $a \neq 0$ y $b = 5$

27. C

28. A

29. D

30. D

31. D

32. B

33. D

34. D

35. B

36. C

37. C

38. E

39. A

40. C

41. B

42. B

43. E

44. C

Páginas 130 y 131

Evaluación de proceso

1. a. No.
   b. Sí.
   c. Sí.
   d. Sí.

2. a. $\left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$
   b. $\left]-\frac{2}{7}, +\infty\right[$
   c. $\left[-\frac{8}{3}, +\infty\right[$
   d. ∅
   e. {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

3. a.]–∞, 1[
   b.]–1, +∞[
   c. ∅
   d. [–3, –2[

4. a. No existe tal valor de b, porque el conjunto solución de la primera inecuación es]–∞, –5[, lo que es incompatible con la condición dada.
   b. $b = 38$
   c. $b = 56$

5. a. Por ejemplo, $\left.\begin{array}{l} 3x - 5 \geq -5 \\ 5x + 7 \leq 17 \end{array}\right|$
   b. Por ejemplo, $\left.\begin{array}{l} 4x - 8 \geq -12 \\ 3x + 5 \leq 10 \\ 3 - 2x < -17 \end{array}\right|$
   c. Por ejemplo, $\left.\begin{array}{l} 2x - 5 \geq 3 \\ 3x + 12 > 12 - x \\ 9 - 2x < -1 \end{array}\right|$

6. a.]0, 6[
   b.]–3, 0]
   c. $\left[-\infty, -\frac{5}{2}\right[\cup \left]\frac{7}{3}, +\infty\right[$
   d. $\left]-\frac{3}{2}, 5\right[$

7. Cuatro números: 10, 11, 12 y 13.

8. No tiene solución. Al resolver la inecuación se obtiene $x < -22$, pero según el contexto, el valor de x debe ser positivo, porque es una medida de longitud.

9. Cuando el novio tenga 30 años y la novia, 22 años.

10. a. Entre 13,9 m/s y 20,8 m/s, aproximadamente.
    b. Entre 2 min 13 s y 6 min 40 s, aproximadamente.

11. E

12. D

13. A

14. A

15. C

16. D

17. B

18. A

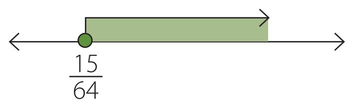
Páginas 132 y 133

Para reforzar

1. a.]–∞, 32]
   b.]–∞, –18[
   c. {1, 2, 3, 4, 5, 6}
   d. ∅
   e.]–∞, –3[
   f. ∅

2. a. 

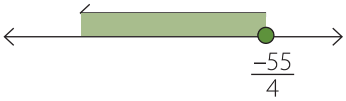
   b. 

   c. 

   d. 

   e. 

f. 

g. 

3. a. 55
   b. Entre 61 kg y 65 kg.
   c. $x^3 = 64$
   d. Las medidas posibles para el largo son: 20 cm, 16 cm, 12 cm, 8 cm y 4 cm.
   e. Entre 12,56 cm y 25,12 cm.

4. $b = 19$

5. No existe el valor de m que cumpla la condición.

6. a. $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{4}x \geq 2 \\ \frac{1}{5}x < 2 \end{array}\right]$

   b. $\left.\begin{array}{l} x \leq 700 \\ x \geq 0{,}5 \cdot 700 \end{array}\right]$

   c. $\left.\begin{array}{l} 2x + (2x + 2) > 62 \\ 2x + (2x + 2) \leq 48 \end{array}\right]$

7. a. $\left[\frac{4}{15}, +\infty\right[$
   b. $]40, +\infty[$
   c. $\left]-\infty, -\frac{4}{7}\right[$
   d. ∅

8. a. 

   b. 

   c. 

   d. Conjunto vacío.

9. a. $\left.\begin{array}{l} 5x - 3 > 2 \\ 10x - 6 < 94 \\ 3 - 2x < 3 \end{array}\right]$

   b. $\left.\begin{array}{l} 4x - 96 < 64 \\ 3x + 18 < 90 \\ 5 - x \geq -25 \end{array}\right]$

   c. $\left.\begin{array}{l} 6x + 21 > -27 \\ 7x + 15 \leq 73 \\ 25 - x > 15 \end{array}\right]$

   d. $\left.\begin{array}{l} 9x - 7 > 56 \\ 9x + 1 \geq 100 \\ 3 - 3x \leq -9 \end{array}\right]$

10. $b = \frac{115}{3}$

11. a. $\left[-3, \frac{1}{4}\right[$
    b. $]0, 1[$
    c. $\left[-\frac{33}{6}, -4\right[$
    d. $]-\infty, -3[\cup]-2, +\infty[$

12. a. Entre 15 m y 25 m.
    b. El menor valor que puede tomar es 50 m y el mayor, $30\sqrt{5}$ m.
    c. $90 + 30\sqrt{5}$ m y 900 m², respectivamente.
    d. El volumen varía entre 27 cm³ y 125 cm³.
    e. Ninguno.
    f. Los del tercer lado son {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33}, los del perímetro, {39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67}, en ambos casos, en cm.
    g. Entre 49,9 kg y 62,4 kg, aproximadamente.
    h. [25,92, 57,65], en segundos.

Páginas 134 y 135

Síntesis

1. A = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72}
2. C = {$x \in \mathbb{N}$ / x es divisor de 54}
3. $p \geq 5\,000$
4. No.

5. [−8, 17[

6. Por ejemplo, −0,99, −0,85, $-\frac{3}{4}$, −0,342, $-\frac{1}{7}$.

7. En 37,68 cm, ya que varía entre 12,56 cm y 50,24 cm.

8. Entre 0 y 12.

9.]−∞, −0,4[

10.]3, 6]

11. Entre 0 y 1,5 m.

Páginas 136 y 137

Evaluación final

1. a. {−8, −6, −4, −2, 0, 2, 3, 4, 6, 8, 9}
   b. {2, 4, 8}
   c. {−8, −6, −4, −2, 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 16}
   d. ∅

2. a. $a > 10$, $e \geqslant 1{,}20$
   b. $25 < \text{IMC} \leqslant 30$
   c. $d \leqslant 10$

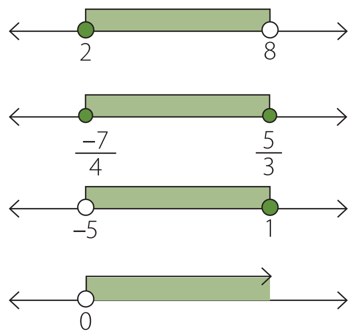
3. a. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid -7 < x < 13\}$
   b. $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ es primo y $x < 45\}$
   c. $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -100 < x < -9$ o $9 < x < 100\}$

4. a. {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}
   b. {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43}
   c. {−99, −98, −97, −96, −95, −94, −93, −92, −91, −90, −89, −88, −87, −86, −85, −84, −83, −82, −81, −80, −79, −78, −77, −76, −75, −74, −73, −72, −71, −70, −69, −68, −67, −66, −65, −64, −63, −62, −61, −60, −59, −58, −57, −56, −55, −54, −53, −52, −51, −50, −49, −48, −47, −46, −45, −44, −43, −42, −41, −40, −39, −38, −37, −36, −35, −34, −33, −32, −31, −30, −29, −28, −27, −26, −25, −24, −23, −22, −21, −20, −19, −18, −17, −16, −15, −14, −13, −12, −11, −10, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99}

5. a.]3, 12[
   b.]−∞, 31[
   c. [8, +∞[
   d.]−∞, 4]
   e.]7, 8[

6. a. $\left]\frac{3}{5}, +\infty\right[$
   b.]−∞, 0]
   c.]−∞, 0[
   d.]−∞, −1]

7. a.
   b.
   c.
   d.



8. a. $-15 \leqslant 5r < 40$
   b. $\frac{-27}{4} \leqslant \frac{r}{4} - 6 < -4$
   c. $-6 \leqslant 5r + 9 < 49$
   d. $-\frac{151}{36} < \frac{2}{8} - \frac{5r}{9} \leqslant \frac{23}{12}$

9. a. ∅
   b. $\left]-2, -\frac{1}{3}\right]$
   c.]−∞, −6,9]
   d. ∅

10. Entre \$ 80 000 y \$ 300 000.

11. Como mínimo necesita \$ 9 880, y como máximo, \$ 35 440.

12. {25, 26, 27, 28}

13. $\left]-\infty, \frac{1}{6}\right]$

14. B

15. D

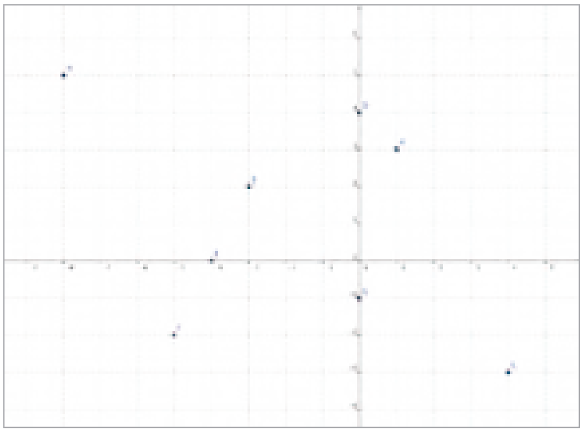
16. C

17. B

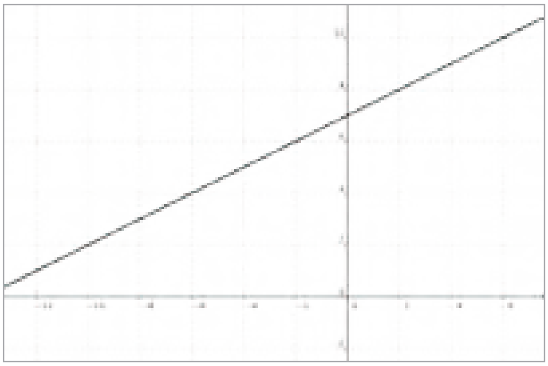
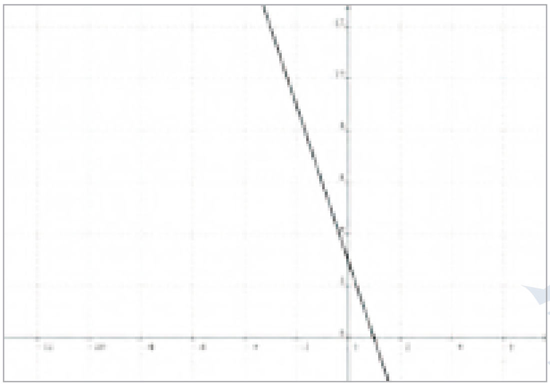
Unidad 3

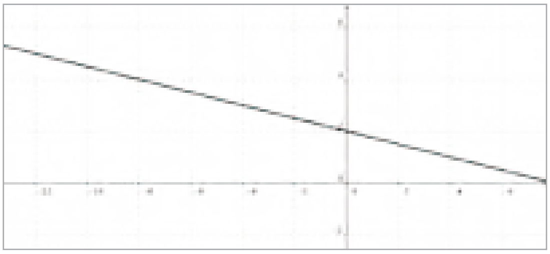
Páginas 146 y 147

¿Cuánto sé?

1. a. I o III cuadrante.
   b. IV cuadrante.
2. Al ubicarlos en un plano cartesiano, los segmentos que unen A con B y C con D son paralelos, así como también los segmentos que unen A con C y B con D.
3. 
4. a. Negativo.
   b. Negativo.
   c. Negativo.
   d. Positivo. En rigor, también negativo si $k > -3$.
5. a. $\sqrt{17}$
   b. 5
   c. $4\sqrt{13}$
   d. 10
   e. $\sqrt{37}$
   f. $\sqrt{130}$
   g. $5\sqrt{2}$
   h. $\sqrt{617}$
6. a. 12
   b. $5 + \sqrt{29} + \sqrt{106}$
   c. $2 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$
   d. $4\sqrt{2} + \sqrt{65} + \sqrt{73}$
7. Si calculamos las longitudes de cada uno de los lados del triángulo, notaremos que se cumple el teorema de Pitágoras, es decir, el triángulo TUV es rectángulo en U. Observa.

$$(d(TU))^2 + (d(UV))^2 = (d(TV))^2$$
$$(\sqrt{49 + 9})^2 + (\sqrt{9 + 49})^2 = (\sqrt{16 + 100})^2$$
$$(\sqrt{58})^2 + (\sqrt{58})^2 = (\sqrt{116})^2$$
$$58 + 58 = 116$$

8. a. $2\,\overrightarrow{AB}$
   b. $\overrightarrow{FB}$
   c. $\overrightarrow{AC}$
   d. $\overrightarrow{AF}$
9. a. No son colineales.
   b. Sí son colineales.
   c. Sí son colineales.
   d. Sí son colineales.
   e. No son colineales.
10. a. $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$
    b. $y = -\frac{6}{7}x + \frac{22}{7}$
    c. $y = \frac{11}{9}x - \frac{62}{9}$
    d. $y = 7$
11. a. 
    b. 

c. 

12. a. $x = 14, y = -14$
    b. No tiene solución.
    c. Tiene infinitas soluciones.

13. C

14. D

15. A

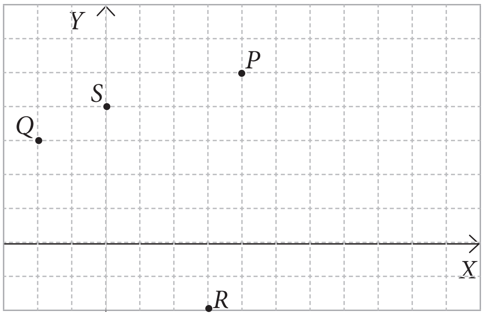
16. C

17. B

18. E

Páginas 148 y 149

Repaso

1. 

Actividades

1. a. Los tres vectores son iguales.
   b. Los vectores azul y verde son opuestos.
   c. Los tres vectores son distintos, aunque tienen igual dirección y sentido.

2. a. Por ejemplo $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{ED}$ y también $\overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{CD}$.
   b. Por ejemplo $\overrightarrow{FA}$ y $\overrightarrow{FE}$.
   c. Por ejemplo $\overrightarrow{DC}$ y $\overrightarrow{EB}$.

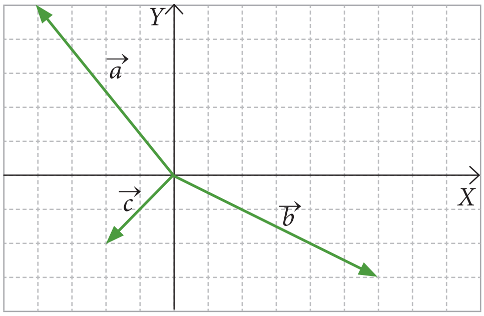
3. Pregunta abierta.

4. a. Verdadero.
   b. Falso.
   c. Verdadero.
   d. Verdadero.
   e. Falso.
   f. Falso.
   g. Falso.
   h. Verdadero.

Páginas 150 y 151

Actividades

1. a. 5
   b. $\sqrt{193}$
   c. 15
   d. $\sqrt{313}$
   e. 1
   f. 4

2. a. 

   b. $\langle 4, 4\rangle$
   c. $4\sqrt{2}$

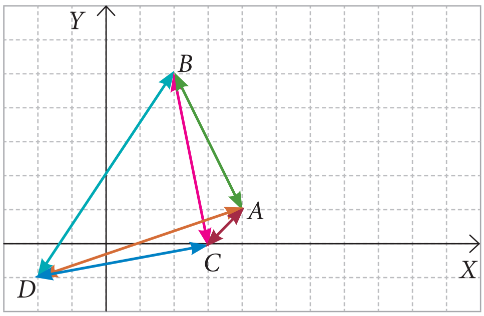
3. a. $\langle -18, 18\rangle, 18\sqrt{2}$
   b. $\langle -4, 25\rangle, \sqrt{641}$
   c. $\langle -23, 2\rangle, \sqrt{533}$
   d. $\langle 18, -18\rangle, 18\sqrt{2}$
   e. $\langle -5, -16\rangle, \sqrt{281}$
   f. $\langle 19, 23\rangle, \sqrt{890}$
   g. $\langle -14, -7\rangle, \sqrt{245}$
   h. $\langle 14, 7\rangle, \sqrt{245}$
   i. $\langle 23, -2\rangle, \sqrt{533}$

4. $\overrightarrow{AC} = \langle 1, 1\rangle$ y $\overrightarrow{CB} = \langle 2, -2\rangle$, $\overrightarrow{AB} = \langle 3, -1\rangle$

5. a. 
   b. 
   c. 
   d. Corresponde a $\vec{0}$.

6. a. $D = (7, 1)$
   b. $\overrightarrow{BD} = \langle 6, -2 \rangle$

7. Considerando los puntos dados como los extremos de los vectores, distinguiendo $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$, se pueden formar doce vectores.
$\overrightarrow{AB} = \langle -2, 4 \rangle$, $\overrightarrow{BA} = \langle 2, -4 \rangle$, $\overrightarrow{AC} = \langle -1, -1 \rangle$,
$\overrightarrow{CA} = \langle 1, 1 \rangle$, $\overrightarrow{AD} = \langle -6, -2 \rangle$, $\overrightarrow{DA} = \langle 6, 2 \rangle$,
$\overrightarrow{BC} = \langle 1, -5 \rangle$, $\overrightarrow{CB} = \langle -1, 5 \rangle$, $\overrightarrow{BD} = \langle -4, -6 \rangle$,
$\overrightarrow{DB} = \langle 4, 6 \rangle$, $\overrightarrow{CD} = \langle -5, -1 \rangle$, $\overrightarrow{DC} = \langle 5, 1 \rangle$.



8. a. $\sqrt{313}$
   b. $\langle -13, 12 \rangle$

Páginas 152 y 153

Actividades

1. a. Aumenta su magnitud, mantiene su dirección y sentido.
   b. Es el mismo vector.
   c. Disminuye su magnitud, mantiene su dirección y sentido.
   d. Es el vector nulo.
   e. Es el vector opuesto, es decir, cambia solo el sentido.
   f. Aumenta su magnitud, mantiene su dirección y cambia de sentido.

2. a. 
   b. 
   c. 
   d. 
   e. 

3. a. $\langle 0, -12 \rangle$
   b. $\langle -14, 31 \rangle$
   c. $\langle 14, -3 \rangle$
   d. $\langle 17, -16 \rangle$

4. a. $\langle 8, -1 \rangle$
   b. $\langle -5, -1 \rangle$
   c. $\langle 0, -13 \rangle$
   d. $\langle -2, -3 \rangle$
   e. $\langle 6, 9 \rangle$
   f. $\langle 7, 4 \rangle$

5. Son opuestos, es decir, tienen igual magnitud, la misma dirección, pero sentido opuesto.

Página 154

Repaso

1. Los dos vectores tienen como punto inicial (0, 0), y comparten los valores el 2 y el 3, pero sus puntos de llegada son distintos, ya que estos valores están en distintas coordenadas.

2. a. Vector vertical de módulo 5.
   b. Vector horizontal de módulo 5.
   c. Vector similar a la diagonal de un cuadrado de lado 3.

Actividades

1. a. $\sqrt{5}$
   b. 5
   c. $\sqrt{21}$
   d. $\sqrt{34}$
   e. $\sqrt{59}$
   f. 13
   g. 9
   h. 13
   i. 25

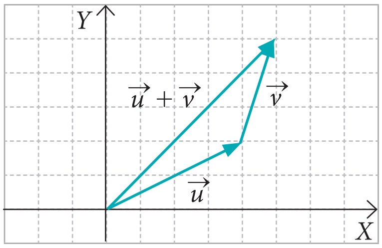
2. a. $\langle 3, -5, -5 \rangle$
   b. $\langle -4, 9, 8 \rangle$
   c. $\langle -4, 7, -4 \rangle$
   d. $\langle 10, -7, 16 \rangle$
   e. $\langle -10, 7, -16 \rangle$
   f. $\langle 1, -15, -22 \rangle$

Página 157

Actividades

1. Pregunta abierta. La igualdad ocurre cuando los tres puntos son colineales, por ejemplo (1, 2, 1), (2, 4, 2) y (3, 6, 3)

2. a. $3\sqrt{3}$
   b. $3 + 3\sqrt{2}$
   c. $3\sqrt{3} \leqslant 3 + 3\sqrt{2}$

3. 

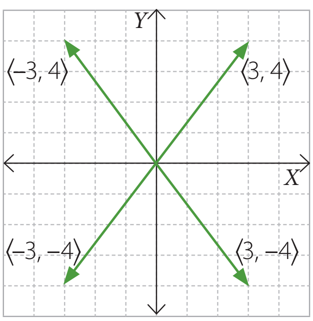
   Se llama desigualdad triangular porque los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} + \vec{v}$ corresponden a los lados de un triángulo, excepto cuando $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son uno el vector ponderado del otro.

Página 158

Actividades

1. $\| \langle x, y, z \rangle \| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ y 5, respectivamente.

2. a. Falsa, por ejemplo, si $\vec{v} = \langle 1, 1, 1 \rangle$ $\vec{w} = \langle 2, 1, 0 \rangle$.
   b. Falsa, por ejemplo, si $\vec{v} = \langle 1, 1, 1 \rangle$ $\vec{w} = \langle 2, 1, 0 \rangle$.
   c. Falsa, por ejemplo, si $\vec{u} = \langle -1, 2, -1 \rangle$, $\vec{v} = \langle 1, 1, 1 \rangle$, $\vec{w} = \langle 2, 1, 0 \rangle$.
   d. Verdadera.
   e. Falsa, por ejemplo, si $\vec{u} = \vec{v} = \vec{w} = \langle 1, 1, 1 \rangle$.
   f. Verdadera.
   g. Falsa, por ejemplo, si $\lambda = -1$, $\vec{v} = \langle 1, 1, 1 \rangle$.
   h. Verdadera.

3. a. Su módulo es 5 y corresponde a su longitud.
   b. 

   c. Los tres vectores tienen módulo igual a 5. Todos tienen igual longitud.

Página 159

Actividades

1. a. $\sqrt{2}$
   b. $\sqrt{5}$
   c. $2\sqrt{2}$
   d. $\sqrt{14}$
   e. $\sqrt{14}$
   f. $\sqrt{17}$

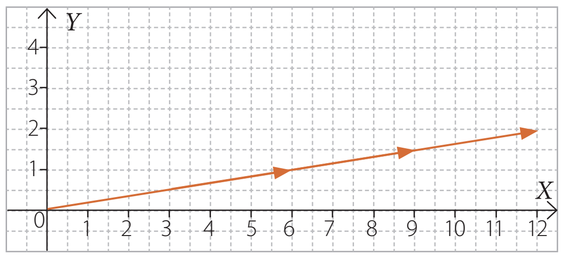
2. Pregunta abierta.

3. a. $\sqrt{7}$
   b. $\sqrt{5}$
   c. $\sqrt{11}$
   d. 0
   e. $\sqrt{7}$

Páginas 162 a 165

Repaso

1. a. b. c.



   d. Los tres vectores tienen la misma dirección.

Actividades

1. Por ejemplo: $\vec{p} = \langle -4, 6 \rangle + \lambda \langle 8, -8 \rangle$

2. Sí se puede y un ejemplo de ecuación vectorial es: $\vec{p} = \langle 1, 1 \rangle + \lambda \langle 3, 3 \rangle$

3. Por ejemplo, (5, 10) , (1, 2) y (9, 18).

4. Una recta paralela puede ser, por ejemplo, $\vec{p} = \langle 1, 3 \rangle + \lambda \langle 1, -4 \rangle$, ya que tiene el mismo vector director y el punto asociado al vector posición no pertenece a la recta dada.

Páginas 166 y 167

Actividades

1. a. $2x - y = 0$
   b. $5x - 3y + 12 = 0$
   c. $6x + y - 16 = 0$
   d. $x - 5 = 0$

2. $3x + 2y - 11 = 0$

3. a. $\langle x, y\rangle = \langle -3, 2\rangle + \lambda \langle 1, 3\rangle$
   b. Solo el punto $(0, 11) \in L$. Al remplazar $\lambda = 3$ en la ecuación se obtiene $(0, 11)$.

4. a. $\langle x, y\rangle = \langle 1, 3\rangle + \lambda \langle 3, 4\rangle$
   b. $\langle x, y\rangle = \langle 2, 1\rangle + \lambda \langle 5, 2\rangle$
   c. $\langle x, y\rangle = \langle 1, 25\rangle + \lambda \langle 1, 7\rangle$
   d. $\langle x, y\rangle = \langle 0, 2\rangle + \lambda \langle 3, 8\rangle$

5. a. Las rectas son paralelas.
   b. Las rectas son secantes.
   c. Las rectas son secantes.
   d. Las rectas son perpendiculares.

6. a. $\langle x, y\rangle = \langle 2, 1\rangle + \lambda \langle 1, 2\rangle$
   b. $\langle x, y\rangle = \langle 2, 1\rangle + \lambda \langle -2, 1\rangle$

7. a. $\langle x, y\rangle = \langle 2, -1\rangle + \lambda \langle 1, 1\rangle$
   b. $\langle x, y\rangle = \langle 2, -1\rangle + \lambda \langle 3, 2\rangle$

Páginas 168 a 170

Repaso

1. El vector posición está asociado a la ubicación de la recta y el vector director explicita la dirección de la recta en el plano.

Actividades

1. Por ejemplo, $\langle x, y, z\rangle = \langle 0, 6, -3\rangle + \lambda \langle -12, 11, -10\rangle$

2. a. No son colineales.
   b. Son colineales y la ecuación puede ser: $\langle x, y, z\rangle = \langle -1, -1, -1\rangle + \lambda \langle 0, 1, 2\rangle$
   c. Son colineales y la ecuación puede ser: $\langle x, y, z\rangle = \langle 0, -1, -2\rangle + \lambda \langle 0, 3, 6\rangle$
   d. No son colineales.

3. a. Pregunta abierta. Por ejemplo:
   $\lambda = 1 \rightarrow (1, 3, 2) \in L.$
   $\lambda = -1 \rightarrow (1, 1, 0) \in L.$
   $\lambda = 0 \rightarrow (1, 2, 1) \in L.$
   $\lambda = 2 \rightarrow (1, 4, 3) \in L.$
   b. $\lambda = -1$ y $\lambda = 0$.
   c. Porque no existe ningún valor para λ que cumpla: $\langle 1, 6, 6\rangle = \langle 1, 2, 1\rangle + \lambda \langle 0, 1, 1\rangle$

Página 171

Actividades

1. a. $\langle x, y, z\rangle = \langle 4 + \lambda, 2 + 3\lambda, 7 + \lambda\rangle$,
   $x(\lambda) = 4 + \lambda, y(\lambda) = 2 + 3\lambda, z(\lambda) = 7 + \lambda$
   b. $\langle x, y, z\rangle = \langle 1 + \lambda, 3 + 5\lambda, -4 - 6\lambda\rangle$
   $x(\lambda) = 1 + \lambda, y(\lambda) = 3 + 5\lambda, z(\lambda) = -4 - 6\lambda$
   c. $\langle x, y, z\rangle = \langle -2\lambda, 3 - 2\lambda, 5 - 8\lambda\rangle$
   $x(\lambda) = -2\lambda, y(\lambda) = 3 - 2\lambda, z(\lambda) = 5 - 8\lambda$
   d. $\langle x, y, z\rangle = \langle 2 - \lambda, 4 + 6\lambda, 7 + 6\lambda\rangle$
   $x(\lambda) = 2 - \lambda, y(\lambda) = 4 + 6\lambda, z(\lambda) = 7 + 6\lambda$

2. a. $x(\lambda) = -1 - 3\lambda$
   $y(\lambda) = -1 - 3\lambda$
   $z(\lambda) = 1 + 4\lambda$
   b. $x(\lambda) = 6 + 5\lambda$
   $y(\lambda) = 2\lambda$
   $z(\lambda) = 2$
   c. $x(\lambda) = 2 - 3\mu$
   $y(\lambda) = 5 + 4\mu$
   $z(\lambda) = -9 - 5\mu$
   d. $x(\lambda) = 1 + 3\lambda$
   $y(\lambda) = 4 + 4\lambda$
   $z(\lambda) = -7 - 10\lambda$
   e. Por ejemplo, con vector posición $\langle 1, 2, 3\rangle$:
   $x(\lambda) = 1 - 2\lambda$
   $y(\lambda) = 2 + 5\lambda$
   $z(\lambda) = 3 + \lambda$
   f. $x(\lambda) = 1 - 4\mu$
   $y(\lambda) = 3\mu$
   $z(\lambda) = -6 - 6\mu$

Páginas 172 a 175

Practico

1. a. Verdadero.
   b. Falso. Los vectores opuestos tienen la misma dirección y módulo, con sentidos contrarios.

c. Falso. La suma de dos vectores es un vector.
d. Verdadero.

2. a. Tienen abscisa igual a cero.
b. No, representan puntos distintos, con abscisas diferentes y ordenadas distintas.
c. Sí, es conmutativa.
d. Que tengan igual módulo, dirección y sentido.

3. a. $\langle x, y\rangle = \langle 2, 1\rangle + \lambda\langle 2, -6\rangle$, por ejemplo, (4, –5), (0, 7), (8, –17).
b. $\langle x, y\rangle = \langle -1, 4\rangle + \lambda\langle 3, 8\rangle$, por ejemplo, (2, 12), (0, 20), (–4, –4).
c. $\langle x, y\rangle = \langle 0, 5\rangle + \lambda\langle 4, -7\rangle$, por ejemplo, (4, –2), (8, –9), (–12, 26).

4. a. $\langle x, y\rangle = \langle 1, -2\rangle + \lambda\langle 1, 2\rangle$
b. $\langle x, y\rangle = \langle -1, 1\rangle + \lambda\langle 4, 3\rangle$

5. a. $k = 7$
b. $k = 3$
c. $k = 6$
d. $k = 3$
e. $k = 5$
f. $k = -2$

6. a. $q = 9$
b. $q = -2$
c. $q = -\frac{3}{4}$
d. $q = \frac{9}{2}$
e. $q = \frac{1}{4}$
f. $q = -\frac{4}{3}$

7. a. $p = 15$
b. $p = \frac{18}{5}$
c. $p = 0$
d. $p = -\frac{2}{5}$
e. $p = 14$
f. $p = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

8. Pregunta abierta.

9. a. $\sqrt{5}$
b. 5
c. $\sqrt{65}$
d. $\sqrt{5}$
e. 5
f. $\sqrt{6}$

10. a. $\langle 2, -2, -4\rangle$
b. $\langle 0, 0, 0\rangle$
c. $\langle 3, -5, -13\rangle$
d. $\langle -3, 5, 13\rangle$
e. $\langle 10, -12, -27\rangle$

11. a. Sí son paralelos.
b. Sí son paralelos.
c. No son paralelos.
d. Sí son paralelos.
e. No son paralelos.

12. a. $\langle 2, 2, -3\rangle$
b. $\langle -1, -1, 5\rangle$
c. $\langle 0, 0, -4\rangle$
d. $\langle 0, 0, 0\rangle$
e. $\langle -2, 0, 6\rangle$

13. a. $Q\,(6, 10)$
b. $Q\,(-3, 3)$
c. $Q\left(\frac{5}{4}, -1\right)$
d. $Q\,(4, 4, 2)$
e. $Q\,(4, -1, 1)$

14. a. $\left(\frac{7}{2}, 3\right)$
b. $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
c. $\left(\frac{17}{24}, 3\right)$
d. (0, 0)
e. (2, 2)

15. a. $Q\,(2, 5)$
b. $Q\left(-\frac{11}{3}, 1\right)$
c. $Q\left(\frac{45}{4}, \frac{11}{5}\right)$
d. $Q\,(-1, 2, -2)$
e. $Q\,(-3, 6, 6)$
f. $Q\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{6}\right)$

16. a. $\langle 3, 4\rangle$
b. $\langle -5, 0\rangle$
c. $\langle 4, -7\rangle$
d. $\left\langle 1, \frac{11}{2}\right\rangle$
e. $\left\langle 6, -\frac{5}{2}\right\rangle$
f. $\left\langle \frac{14}{3}, -\frac{23}{3}\right\rangle$

17. a. $\left\langle -2, 1, \frac{5}{2}\right\rangle$
b. $\left\langle \frac{10}{3}, 0, \frac{7}{3}\right\rangle$
c. $\langle -21, 5, -6\rangle$
d. $\langle -26, 4, 19\rangle$
e. $\left\langle -\frac{9}{5}, 1, -\frac{3}{5}\right\rangle$
f. $\left\langle -\frac{97}{16}, \frac{19}{16}, \frac{71}{8}\right\rangle$

18. a. $\langle x, y\rangle = \langle 1, 3\rangle + \lambda\,\langle 1, 1\rangle$
b. $\langle x, y\rangle = \langle 0, 3\rangle + \lambda\,\langle -3, 8\rangle$
c. $\langle x, y\rangle = \langle 5, 1\rangle + \lambda\left\langle 7, \frac{2}{3}\right\rangle$
d. $\langle x, y\rangle = \langle 0, 6\rangle + \lambda\left\langle \frac{2}{5}, -\frac{15}{2}\right\rangle$
e. $\langle x, y\rangle = \left\langle \frac{12}{5}, -4\right\rangle + \lambda\left\langle -\frac{16}{15}, 3\right\rangle$
f. $\langle x, y\rangle = \left\langle 2, -\frac{4}{3}\right\rangle + \lambda\left\langle \frac{17}{2}, \frac{19}{3}\right\rangle$

19. a. $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 2, 3\rangle + \lambda\,\langle 1, -2, 1\rangle$
b. $\langle x, y, z\rangle = \langle -3, 6, 2\rangle + \lambda\,\langle -1, 6, -3\rangle$
c. $\langle x, y, z\rangle = \langle -1, 0, 3\rangle + \lambda\left\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, 9\right\rangle$
d. $\langle x, y, z\rangle = \left\langle 3, 5, -\frac{5}{2}\right\rangle + \lambda\left\langle -\frac{7}{2}, \frac{29}{5}, -\frac{11}{2}\right\rangle$
e. $\langle x, y, z\rangle = \langle 2, 3, -1\rangle + \lambda\,\langle -4, -6, 2\rangle$
f. $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 0, 1\rangle + \lambda\,\langle -1, 1, -1\rangle$

20. a. $x + 2y - 10 = 0$
b. $x - y + 1 = 0$
c. $3x - 4y + 30 = 0$
d. $y + 1 = 0$
e. $x - y = 0$
f. $2x - 15y + 15 = 0$

21. a. $x - 2y + 5 = 0$
b. $x + y - 5 = 0$
c. $5x - 2y - 30 = 0$
d. $x + 4y - 45 = 0$
e. $y - \frac{8}{3} = 0$
f. $x - \frac{3}{5} = 0$

22. a. $3x + y - 13 = 0$
b. $2x - 5y + 27 = 0$
c. $x - 1 = 0$
d. $3x + 10y - 10 = 0$
e. $2x - 9y + 103 = 0$
f. $12x - 50y + 184 = 0$

23. a. $\langle x, y\rangle = \langle 1, 2\rangle + \lambda\,\langle 1, -1\rangle$
b. $\langle x, y\rangle = \langle 7, 0\rangle + \lambda\,\langle 2, 1\rangle$
c. $\langle x, y\rangle = \langle 2, 2\rangle + \lambda\,\langle 3, -2\rangle$
d. $\langle x, y\rangle = \langle 5, 4\rangle + \lambda\,\langle 0, 1\rangle$
e. $\langle x, y\rangle = \langle 0, 13\rangle + \lambda\,\langle 5, 6\rangle$
f. $\langle x, y\rangle = \langle 3, 3\rangle + \lambda\,\langle 1, 1\rangle$

24. a. Son paralelas.
b. Son perpendiculares.
c. Son paralelas.
d. No son paralelas ni perpendiculares.
e. Son paralelas.
f. Son perpendiculares.

25. a. $\langle -4, -6\rangle$
b. $\langle -2, 2\rangle$
c. $\langle 3, 2\rangle$
d. $\left\langle -\frac{23}{3}, 1\right\rangle$
e. $\left\langle -\frac{23}{4}, 2\right\rangle$
f. $\langle -2, 0\rangle$

26. a. $\langle -2, -1, -6\rangle$
b. $\langle -2, -2, 1\rangle$

c. $\langle -2, -1, 2\rangle$

d. $\langle 4, 0, -6\rangle$

e. $\left\langle \frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{2}\right\rangle$

f. $\left\langle -\frac{5}{3}, -\frac{1}{4}, -1\right\rangle$

27. E

28. D

29. E

30. D

31. E

32. B

33. E

34. B

35. D

36. A

Páginas 176 y 177

Evaluación de proceso

1. a. Falsa, todo vector nulo tiene módulo igual que cero.
   b. Falsa, dos vectores son opuestos cuando, además de tener la misma dirección y el mismo módulo, tienen distinto sentido.
   c. Verdadera.
   d. Falsa, el elemento neutro para la suma de vectores es $\langle 0, 0\rangle$.
   e. Verdadera.

2. a. $\sqrt{52}$
   b. $\sqrt{305}$
   c. $\sqrt{1\,597}$
   d. $\sqrt{97}$

3. a. $\sqrt{10} + \sqrt{34} + \sqrt{68}$
   b. $\sqrt{50} + \sqrt{136} + \sqrt{390}$
   c. $\sqrt{521} + \sqrt{241} + \sqrt{250}$
   d. $\sqrt{89} + \sqrt{260} + \sqrt{157}$
   e. $13 + \sqrt{145}$

4. a. $P\,(4, -4)$
   b. $P\,(2, -8)$
   c. $P\,(9, -5)$
   d. $P\,(-2, -3)$
   e. $P\,(14, 24)$
   f. $P\,(-3, -2)$

5. a. $\langle 10, 33\rangle$
   b. $\langle -35, -25\rangle$
   c. $\langle 39, 50\rangle$
   d. $\langle 17, 24\rangle$
   e. $\langle 30, 99\rangle$
   f. $\langle 29, 84\rangle$

6. a. $\langle x, y\rangle = \langle 1, 4\rangle + \lambda\,\langle 6, -1\rangle$
   b. $\langle x, y\rangle = \langle 8, 5\rangle + \lambda\,\langle 1, -4\rangle$
   c. $\langle x, y\rangle = \langle -2, 7\rangle + \lambda\,\langle 5, -8\rangle$
   d. $\langle x, y\rangle = \langle 0, 5\rangle + \lambda\,\langle 4, 8\rangle$
   e. $\langle x, y\rangle = \langle -3, -8\rangle + \lambda\,\langle -3, -12\rangle$
   f. $\langle x, y\rangle = \langle -3, 9\rangle + \lambda\,\langle 8, -7\rangle$

7. a. $5x + 3y - 27 = 0$
   b. $x - 4y + 8 = 0$
   c. $2x - 8y + 44 = 0$
   d. $x - 7 = 0$
   e. $x + y - 10 = 0$
   f. $2x + 9y - 9 = 0$

8. a. $\langle x, y\rangle = \langle 0, -4\rangle + \lambda\,\langle 1, 1\rangle$
   b. $\langle x, y\rangle = \langle 2, 1\rangle + \lambda\,\langle -3, 1\rangle$
   c. $\langle x, y\rangle = \left\langle 1, -\frac{3}{2}\right\rangle + \lambda\,\langle 1, 2\rangle$
   d. $\langle x, y\rangle = \langle -1, -1\rangle + \lambda\,\langle 7, 3\rangle$
   e. $\langle x, y\rangle = \langle 0, 2\rangle + \lambda\,\langle 3, 8\rangle$
   f. $\langle x, y\rangle = \lambda\,\langle 1, -1\rangle$

9. A

10. B

11. E

12. D

13. D

14. C

15. C

16. D

17. D

Páginas 178 y 179

Para reforzar.

1. a. $k = 2$
   b. $k = 2$
   c. $k = 4$
   d. $k = 3$

2. a. 3
   b. $\sqrt{26}$
   c. 7
   d. $\sqrt{41}$
   e. $\sqrt{61}$
   f. $\sqrt{297}$

3. a. 5
   b. $\sqrt{14}$
   c. $\sqrt{30}$
   d. $\sqrt{26}$
   e. 13
   f. $\sqrt{147}$

4. a. $\langle -8, 12\rangle$
   b. $\langle -50, 40\rangle$
   c. $\langle -4, 2\rangle$
   d. $\langle 12, -7\rangle$
   e. $\langle 64, -8\rangle$
   f. $\langle 31, -23\rangle$

5. a. $\langle 5, 3, 3\rangle$
   b. $\langle -7, -8, -1\rangle$
   c. $\langle -10, 30, 10\rangle$
   d. $\langle 25, 4, 17\rangle$
   e. $\langle 2, 22, 8\rangle$
   f. $\langle 51, -3, 11\rangle$

6. a. $\vec{v} = \langle 2, 3, 1\rangle$
   b. $\vec{v} = \langle 5, 6, 4\rangle$
   c. $\vec{v} = \langle -2, 4, 2\rangle$
   d. $\vec{v} = \left\langle \frac{1}{5}, -\frac{3}{5}, 1\right\rangle$

7. a. Sí son colineales.
   b. No son colineales.
   c. No son colineales.
   d. Sí son colineales.
   e. Sí son colineales.
   f. No son colineales.

8. a. $\sqrt{2}$
   b. $\sqrt{14}$
   c. $\sqrt{2}$
   d. 2
   e. $\sqrt{13}$
   f. 1

9. a. No son colineales.
   b. No son colineales.
   c. Sí son colineales.
   d. No son colineales.
   e. Sí son colineales.
   f. No son colineales.

10. a. $\langle x, y\rangle = \langle 3, 2\rangle + \lambda\langle -1, 3\rangle$
    b. $\langle x, y\rangle = \langle 5, -6\rangle + \lambda\langle -1, 2\rangle$
    c. $\langle x, y\rangle = \langle 7, 0\rangle + \lambda\left\langle -9, \frac{1}{3}\right\rangle$
    d. $\langle x, y\rangle = \langle 2, 5\rangle + \lambda\left\langle \frac{8}{5}, \frac{13}{2}\right\rangle$
    e. $\langle x, y\rangle = \left\langle \frac{9}{5}, -5\right\rangle + \lambda\left\langle \frac{7}{15}, -3\right\rangle$
    f. $\langle x, y\rangle = \left\langle \frac{7}{2}, 4\right\rangle + \lambda\left\langle \frac{3}{2}, \frac{16}{3}\right\rangle$

11. A

12. C

13. C

14. C

15. D

Páginas 180 y 181

Repaso

1. Dos puntos.
2. Cuando pertenecen a una misma recta.

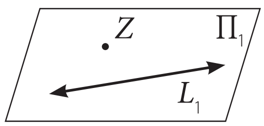
Actividades

1. Pregunta abierta.

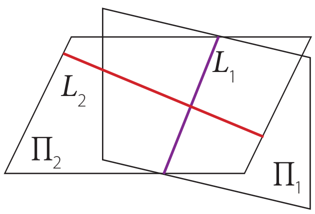
Páginas 182 y 183

Actividades

1. Pregunta abierta.
2. a. Falsa. Los puntos A, E y F son coplanarios.
   b. Verdadera.
   c. Falsa. C no pertenece al plano que contiene a B, E y F.
   d. Falsa. Los segmentos AC y DF son alabeados.
   e. Verdadera.
   f. Verdadera.
   g. Verdadera.
   h. Verdadera.
   i. Verdadera.
   j. Falsa. Por los puntos A, G y C pasan infinitos planos, ya que son colineales.
3. a.



   b.



Páginas 184 a 187

Repaso

1. a. El vector posición indica la ubicación de la recta en el plano o en el espacio.
   b. El vector director indica la dirección de la recta en el plano o en el espacio.
2. Mínimo 3 puntos no colineales.

Actividades

1. a. P no pertenece a Π.
   b. P sí pertenece a Π.
   c. P no pertenece a Π.
2. a. $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 2, 1\rangle + \lambda\langle 0, 2, -1\rangle + \mu\langle 1, 0, 1\rangle$
   b. $\langle x, y, z\rangle = \langle -1, 4, 3\rangle + \lambda\langle 1, 1, 2\rangle + \mu\langle -1, 2, -1\rangle$
   c. $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 0, 6\rangle + \lambda\langle 2, 3, 4\rangle + \mu\langle -3, -2, -2\rangle$
   d. $\langle x, y, z\rangle = \langle 3, 7, 7\rangle + \lambda\langle -1, -2, 5\rangle + \mu\langle 0, -1, -4\rangle$
   e. $\langle x, y, z\rangle = \lambda\langle 4, -5, 0\rangle + \mu\langle -1, -3, -1\rangle$
   f. $\langle x, y, z\rangle = \langle 3, 3, -7\rangle + \lambda\langle 2, 5, 5\rangle + \mu\langle 4, 10, 20\rangle$
3. a. Sí.
   b. No.
   c. No.
   d. Sí.
4. a. $\langle x, y, z\rangle = \langle 2, 5, 0\rangle + \lambda\langle 1, -1, 0\rangle + \mu\langle 0, 2, 3\rangle$
   b. $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 0, -3\rangle + \lambda\langle 2, 0, -1\rangle + \mu\langle 1, 3, -2\rangle$
   c. $\langle x, y, z\rangle = \langle 2, -2, 1\rangle + \lambda\langle 1, 0, -1\rangle + \mu\langle -2, 3, 2\rangle$
   d. $\langle x, y, z\rangle = \langle 8, 0, 5\rangle + \lambda\langle -3, 2, -5\rangle + \mu\left\langle \frac{1}{2}, 2, 0\right\rangle$
   e. $\langle x, y, z\rangle = \left\langle \frac{3}{4}, -6, 7\right\rangle + \lambda\langle 0, 1, 3\rangle + \mu\langle 7, 2, -12\rangle$
   f. $\langle x, y, z\rangle = \lambda\langle 2, 7, -11\rangle + \mu\langle 5, -7, 1\rangle$

Páginas 188 y 189

Repaso

1. Una forma es escribir las ecuaciones, igualando componente a componente, y luego reducir este sistema para obtener una ecuación que relacione los valores de x e y, sin el parámetro λ.

Actividades

1. a. (11, 4, 1)
   b. (8, 7, 1)
   c. (2, 1, –2)
   d. (6, 1, –1)
   e. (12, 7, 2)
   f. (15, –8, –1)
2. a. No pertenecen al plano, ya que no existen valores de λ y μ que satisfagan la igualdad de las componentes.
   b. No pertenecen al plano, ya que no existen valores de λ y μ que satisfagan la igualdad de las componentes.

Páginas 190 y 191

Actividades

1. a. Por ejemplo, (1, 0, 0), (0, –1, 0) y (3, –1, –1).
   b. $t = \frac{2}{3}$
   c. Solo pertenece al plano el punto (0, 2, 1).

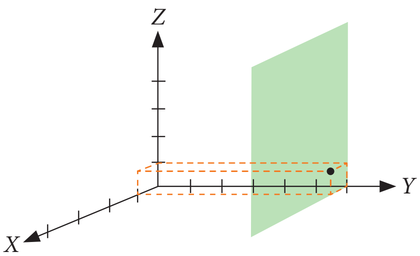
2. a. $2x + y - 5z = 3$
   b. $4x + 12y + 3z = 14$
   c. $6x - 3y - 7z = -54$

Páginas 192 y 193

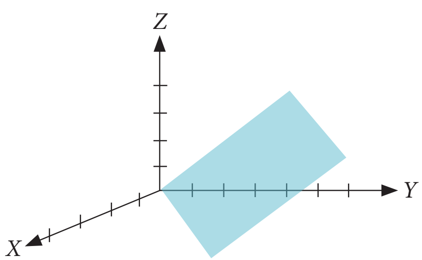
Actividades

1. Es un plano paralelo al eje Z, que lo contiene, y que pasa por la primera diagonal del plano XY.

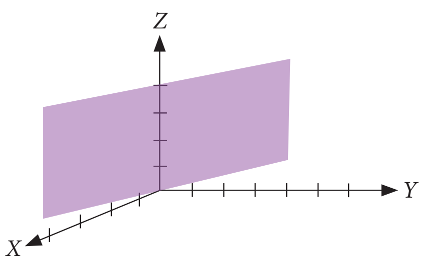
2.



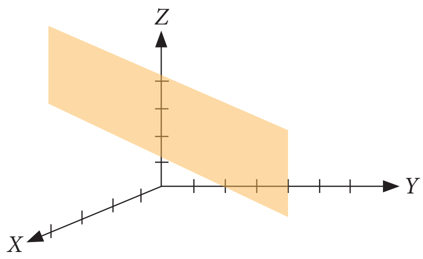
3. a.



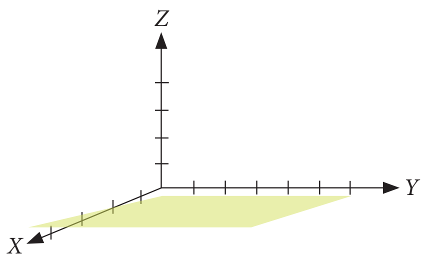
b.



c.



d.



4. a. (0, 0, 0)
   b. (0, 0, 0)
   c. (4, 0, 5)
   d. No existe punto de intersección.

Páginas 194 y 195

Repaso

1. a. Una recta o el mismo plano.
   b. Sí.
   c. Dos planos se intersecan en una única recta o también se puede dar el caso que dos planos sean coincidentes y la intersección sea el plano completo.

Actividades

1. a. No, son planos paralelos.
   b. Sí.
   c. Sí.

Páginas 196 a 199

Actividades

1. a. Son planos secantes, en la recta de ecuación:
   paramétrica: $(x, y, z) = (2 - 2\lambda, -2 + \lambda, 7\lambda)$
   vectorial: $\langle x, y, z\rangle = \langle 2, -2, 0\rangle + \lambda\langle -2, 1, 7\rangle$

b. Son planos secantes, en la recta de ecuación:

paramétrica: $(x, y, z) = \left(\frac{5}{2} + \lambda, \frac{1}{2}, \lambda\right)$

vectorial: $\langle x, y, z\rangle = \left\langle\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0\right\rangle + \lambda\langle 1, 0, 1\rangle$

c. Son planos coincidentes.

d. Son planos secantes, en la recta de ecuación:

paramétrica: $(x, y, z) = (1 + \lambda, \lambda, -1 + 2\lambda)$

vectorial: $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 0, -1\rangle + \lambda\left\langle\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\rangle$

e. Son planos paralelos.

f. Son planos paralelos.

g. Son planos secantes, en la recta de ecuación:

paramétrica: $(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\lambda, \lambda, \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\lambda\right)$

vectorial: $\langle x, y, z\rangle = \left\langle\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right\rangle + \lambda\left\langle-\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}\right\rangle$.

h. Son planos coincidentes.

Actividades

1. La intersección corresponde a la recta de ecuación $\langle x, y, z\rangle = \left\langle -\frac{49}{5}, -\frac{24}{5}, 0\right\rangle + \lambda\langle 4, 2, 1\rangle$.
2. (6, 10, 3)
3. Se intersecan en el punto $\left(-\frac{1}{3}, \frac{10}{3}, -4\right)$.

Páginas 200 a 203

Practico

1. a. No, son colineales, existen infinitos planos que los contienen.
   b. No, son colineales, existen infinitos planos que los contienen.
   c. Sí.
   d. No, son colineales, existen infinitos planos que los contienen.
2. a. No, porque L contiene a P, luego, existen infinitos planos que los contienen.
   b. Sí, porque P no pertenece a la recta L.
   c. Sí, porque P no pertenece a la recta L.
   d. No, porque L contiene a P, luego, existen infinitos planos que los contienen.
   e. No, porque L contiene a P, luego, existen infinitos planos que los contienen.
   f. Sí, porque P no pertenece a la recta L.
3. a. Sí, porque son rectas secantes.
   b. Sí, porque son rectas secantes.
   c. Sí, porque son rectas paralelas.
   d. No, porque son rectas coincidentes.
4. a. Paralelas, no coincidentes.
   b. Paralelas, no coincidentes.
   c. Secantes.
   d. Paralelas, no coincidentes.
   e. Secantes.
5. a. $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 0, 1\rangle + \lambda\langle -2, 3, 0\rangle + \mu\langle 0, -1, 0\rangle$
   b. $\langle x, y, z\rangle = \langle 0, 2, 1\rangle + \lambda\langle 2, 6, 4\rangle + \mu\langle -2, 2, 2\rangle$
   c. $\langle x, y, z\rangle = \langle 3, 4, 6\rangle + \lambda\langle 2, 0, -5\rangle + \mu\langle 3, -3, -12\rangle$
   d. $\langle x, y, z\rangle = \langle 9, -4, 2\rangle + \lambda\langle -2, 0, 2\rangle + \mu\langle 2, -1, -3\rangle$
   e. $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 0, 3\rangle + \lambda\langle 4, -13, 6\rangle + \mu\langle 12, -33, 16\rangle$
   f. $\langle x, y, z\rangle = \langle 0, -5, 4\rangle + \lambda\langle 1, 6, -3\rangle + \mu\langle 5, 0, 9\rangle$
6. a. $\langle x, y, z\rangle = \langle 3, 1, 0\rangle + \lambda\langle 1, 1, 0\rangle + \mu\langle 0, 1, 2\rangle$
   b. $\langle x, y, z\rangle = \langle 2, 0, 3\rangle + \lambda\langle 1, 0, -4\rangle + \mu\langle 3, 1, -2\rangle$
   c. $\langle x, y, z\rangle = \langle 5, -6, 0\rangle + \lambda\langle 3, 5, -1\rangle + \mu\langle 2, 9, 1\rangle$
   d. $\langle x, y, z\rangle = \langle 12, 0, 4\rangle + \lambda\langle -3, 5, -7\rangle + \mu\left\langle\frac{1}{2}, 1, 0\right\rangle$
   e. $\langle x, y, z\rangle = \left\langle\frac{3}{4}, -8, 10\right\rangle + \lambda\langle 0, 1, 2\rangle + \mu\langle 13, 5, -21\rangle$
   f. $\langle x, y, z\rangle = \lambda\langle 3, 4, -11\rangle + \mu\langle 9, -6, 1\rangle$
7. a. P no pertenece a L.
   $\langle x, y, z\rangle = \langle 3, 0, 1\rangle + \lambda\langle 2, 0, -1\rangle + \mu\langle -2, 1, -1\rangle$
   b. P no pertenece a L.
   $\langle x, y, z\rangle = \langle 4, 0, -3\rangle + \lambda\langle 5, -1, 3\rangle + \mu\langle -3, -1, 9\rangle$
   c. P no pertenece a L.
   $\langle x, y, z\rangle = \langle 4, 9, -7\rangle + \lambda\langle 3, 5, 11\rangle + \mu\langle -4, -17, 13\rangle$
   d. P no pertenece a L.
   $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 1, 1\rangle + \lambda\langle 4, 5, 8\rangle + \mu\left\langle -\frac{1}{4}, -1, -\frac{3}{2}\right\rangle$
   e. P no pertenece a L.
   $\langle x, y, z\rangle = \langle 3, -3, 3\rangle + \lambda\langle 5, -1, -2\rangle + \mu\langle -1, 5, -1\rangle$
   f. P no pertenece a L.
   $\langle x, y, z\rangle = \lambda\langle 1, 1, -1\rangle + \mu\langle 3, 4, 5\rangle$
8. a. $2x - y - 2z + 2 = 0$
   b. $-13x + 4y - z + 18 = 0$
   c. $-5x - y + 3z - 10 = 0$

d. $2x - 8y + 5z - 32 = 0$
e. $5x + 4y - 17z = 0$
f. $50x - 29y + 9z = 0$

9. a. $2x - y + 1 = 0$
b. $3x - 2z - 14 = 0$
c. $y = 2$
d. $x - z - 7 = 0$
e. $x + 3z = 0$
f. $3x + 2z - 25 = 0$

10. a. $-4x + y + 2z + 3 = 0$
b. $3x + 12y + 4z - 14 = 0$
c. $7x + 5y - 3z - 69 = 0$
d. $4x - 3y + 16z + 16 = 0$
e. $3x - z = 0$
f. $x - 5y + 4z - 86 = 0$

11. a. $\langle x, y, z\rangle = \lambda\langle 1, -1, 0\rangle + \mu\langle 0, 1, -1\rangle$
b. $\langle x, y, z\rangle = \lambda\langle 1, 0, -2\rangle + \mu\langle 0, -1, 3\rangle$
c. $\langle x, y, z\rangle = \langle 0, 0, -2\rangle + \lambda\langle 1, 1, -2\rangle + \mu\langle 0, 1, 1\rangle$
d. $\langle x, y, z\rangle = \langle 0, -2, 0\rangle + \lambda\langle 1, 0, -2\rangle + \mu\langle 2, 2, 1\rangle$
e. $\langle x, y, z\rangle = \langle 2, 0, 0\rangle + \lambda\langle 7, 12, 0\rangle + \mu\langle 0, 13, 7\rangle$
f. $\langle x, y, z\rangle = \langle 0, 0, 3\rangle + \lambda\left\langle 5, \frac{3}{4}, 0\right\rangle + \mu\left\langle 0, \frac{1}{3}, 5\right\rangle$

12. a. $\langle x, y, z\rangle = \lambda\langle 2, -1, -1\rangle$
b. $\langle x, y, z\rangle = \lambda\langle 6, 4, 3\rangle$
c. $\langle x, y, z\rangle = \lambda\langle 1, 1, 1\rangle$
d. $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 0, 2\rangle + \lambda\langle -4, 1, 2\rangle$
e. $\langle x, y, z\rangle = \langle 0, 3, 1\rangle + \lambda\langle 2, 2, 5\rangle$
f. $\langle x, y, z\rangle = \langle 3, 7, 0\rangle + \lambda\langle -4, 1, -2\rangle$

13. a. Planos secantes.
b. Planos paralelos.
c. Planos coincidentes.

14. a. Planos secantes.
b. Planos paralelos.
c. Planos coincidentes.

15. a. $(0, 0, 0)$
b. $(0, 0, 0)$
c. $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$
d. $\left(\frac{4}{5}, 0, \frac{8}{5}\right)$
e. $(3, 3, 0)$
f. $(-20, 1, -30)$

16. a. Son secantes.
b. La recta está contenida en el plano.
c. Son secantes.
d. La recta está contenida en el plano.
e. Son secantes.
f. La recta está contenida en el plano.

17. a. Es paralelo al eje X y es perpendicular al eje Y y al eje Z.
b. Es paralelo al eje Y y es perpendicular al eje X y al eje Z.
c. No es paralelo ni perpendicular a ningún eje coordenado.
d. Es perpendicular al eje X y no es paralelo ni perpendicular los ejes X e Y.
e. Es perpendicular al eje Z, no es paralelo al eje X ni al eje Y.
f. Es perpendicular al eje Y, no es paralelo al eje X ni al eje Z.

18. a. Es paralelo al eje X y perpendicular al eje Y y al eje Z.
b. Es perpendicular al eje X y no es paralelo al eje Y ni al eje Z.
c. Es perpendicular al eje Y y no es paralelo al eje X ni al eje Z.
d. Es paralelo al eje Y y es perpendicular al eje X y al eje Z.
e. No es paralelo ni perpendicular a los ejes coordenados.
f. Es perpendicular al eje Z y no es paralelo al eje X ni al eje Y.

19. a. Es perpendicular al eje Z y paralelo al eje X y eje Y. Paralelo al plano XY.
b. Es perpendicular al eje Z y paralelo al eje X y eje Y. Paralelo al plano XY.
c. No es perpendicular ni paralelo a ningún eje coordenado.
d. Es perpendicular al eje Y y paralelo al eje X y eje Z. Paralelo al plano XZ.

e. No es perpendicular a ningún eje coordenado, pero es paralelo al eje X.
f. Es perpendicular al eje X y es paralelo al eje Y y al eje Z. Paralelo al plano YZ.

20. a. Corresponde al plano XY, es perpendicular al eje Z y paralelo al eje X e Y.
b. Es perpendicular al eje Y y paralelo a los ejes X y Z. Es paralelo al plano XZ.
c. Es perpendicular al eje X y paralelo a los ejes Y y Z. Es paralelo al plano YZ.
d. Es paralelo al eje X. No es perpendicular ni paralelo a los ejes Y y Z, ni paralelo a los planos coordenados.
e. No es perpendicular ni paralelo a los ejes coordenados, ni paralelo a los planos coordenados.

21. a. Sí.
b. Sí.
c. No.

22. a. Sí, es perpendicular.
b. Sí, es perpendicular.
c. Sí, es perpendicular.
d. No, no es paralelo.
e. No, es paralelo.
f. No es paralelo ni perpendicular.

23. a. Plano.
b. Recta.
c. Plano.
d. Recta.
e. Recta.
f. Plano.

24. a. $\langle x, y, z\rangle = \langle -3, 3, 0\rangle + \lambda \langle -1, 0, 1\rangle$
b. $\langle x, y, z\rangle = \langle -2, 3, 0\rangle + \lambda (-2, 0, 1\rangle$
c. $\langle x, y, z\rangle = \langle -3, 3, 0\rangle + \lambda (4, 0, 1\rangle$
d. $\langle x, y, z\rangle = \langle 4, 3, 0\rangle + \lambda (1, 0, 1\rangle$
e. $\langle x, y, z\rangle = \langle 0, 3, 3\rangle + \lambda (1, 0, 0\rangle$
f. $\langle x, y, z\rangle = \left\langle 0, 3, -\frac{7}{5}\right\rangle + \lambda \langle 1, 0, 0\rangle$

25. a. $\langle x, y, z\rangle = \lambda \langle -1, 1, 2\rangle$
b. $\langle x, y, z\rangle = \langle 0, 0, 1\rangle + \lambda (1, -1, 3\rangle$
c. $\langle x, y, z\rangle = \langle 0, 0, 5\rangle + \lambda (-1, 1, 1\rangle$
d. $\langle x, y, z\rangle = \langle 4, -4, 0\rangle + \lambda (-2, 2, 1\rangle$
e. $\langle x, y, z\rangle = \left\langle \frac{7}{2}, -\frac{7}{2}, 0\right\rangle + \lambda (-1, 1, 1\rangle$
f. $\langle x, y, z\rangle = \left\langle \frac{8}{9}, -\frac{8}{9}, 0\right\rangle + \lambda (1, -1, -9\rangle$

26. B

27. E

28. B

29. E

30. A

31. C

32. D

33. A

34. C

Páginas 204 y 205

Evaluación de proceso

1. a. No, pues los tres puntos son colineales.
b. Sí.
c. Sí.

2. a. Sí.
b. No, el punto está contenido en el plano y por lo tanto hay infinitos planos que contienen a la recta y el punto.
c. Sí.

3. a. Sí.
b. No, las rectas son coincidentes.
c. Sí.

4. a. Coincidentes.
b. Coincidentes.
c. Secantes, se cortan en el punto (5, 4, 4).

5. a. No colineales.
b. Colineales.
Por ejemplo: $\langle x, y, z\rangle = (-1, -1, -1) + \lambda (0, 1, 2)$

c. No colineales.

d. Colineales.

Por ejemplo: $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 2, 1\rangle + \lambda \langle 1, 1, 1\rangle$

e. No colineales.

f. No colineales.

6. a. Sí, el punto pertenece a la recta.

b. No. Por ejemplo la ecuación del plano sería:

$\langle x, y, z\rangle = \langle 0, 1, 5\rangle + \lambda \langle 0, 1, -3\rangle + \mu \langle 4, 2, -6\rangle$

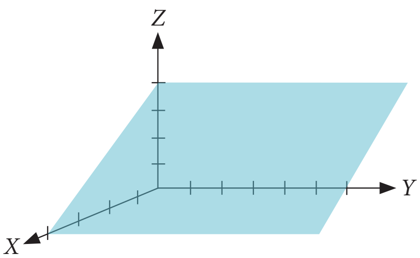
c. No. Por ejemplo la ecuación del plano sería:

$\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 2, -5\rangle + \lambda \langle -1, -8, 12\rangle + \mu \langle 4, -7, 10\rangle$

d. No. Por ejemplo la ecuación del plano sería:

$\langle x, y, z\rangle = \lambda \langle 3, 5, -1\rangle + \mu \langle 3, 4, 2\rangle$

7.



Es paralelo con el eje Y.

8. $x - 5y + 16z - 18 = 0$

9. a. $3x + y + 2z = 9$

b. $5x + 15y + 3z - 15 = 0$

c. $11x + 3y - z - 5 = 0$

d. $7x + 2z = 0$

10. a. Secantes.

b. Paralelos.

c. Paralelos.

11. a. Secantes.

b. Coincidentes.

c. Coincidentes.

12. a. Secantes, en la recta de ecuación:

$\langle x, y, z\rangle = \langle 0, 4, 8\rangle + \lambda\left\langle 1, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right\rangle$

b. Secantes, en la recta de ecuación:

$\langle x, y, z\rangle = \left\langle -\frac{19}{7}, \frac{2}{7}, 0\right\rangle + \lambda\langle 2, -1, 1\rangle$

c. Secantes, en la recta de ecuación:

$\langle x, y, z\rangle = \left\langle -\frac{1}{10}, 0, -\frac{11}{10}\right\rangle + \lambda\langle -1, 1, 1\rangle$

d. Secantes, en la recta de ecuación:

$\langle x, y, z\rangle = \left\langle -1, 1, 0\right\rangle + \lambda\langle -1, 0, 1\rangle$

13. a. No, son colineales.

b. No, son colineales.

c. Sí.

d. Sí.

e. Sí.

f. No, son colineales.

14. a. Perpendicular al eje Y.

b. Perpendicular al eje X.

c. Paralela al eje Y y perpendicular a los ejes X e Z.

d. No es paralela, ni perpendicular a ningún eje.

15. a. La recta es paralela al plano.

b. La recta no es paralela al plano.

c. La recta no es paralela al plano.

16. a. $\langle x, y, z\rangle = \langle 0, 3, 0\rangle + \lambda\langle -1, 3, -2\rangle$

b. $\langle x, y, z\rangle = \left\langle \frac{4}{5}, 0, \frac{8}{5}\right\rangle + \lambda\langle 0, 1, 0\rangle$

c. $\langle x, y, z\rangle = \langle 0, 6, 0\rangle + \lambda\langle 1, -4, 2\rangle$

d. $\langle x, y, z\rangle = \lambda\langle 1, 0, 2\rangle$

e. $\langle x, y, z\rangle = \langle 0, 1, 0\rangle + \lambda\langle 5, -1, 10\rangle$

f. $\langle x, y, z\rangle = \left\langle 0, -\frac{2}{3}, 0\right\rangle + \lambda\left\langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\rangle$

17. C

18. C

19. C

20. D

Páginas 206 y 207

Para reforzar

1. a. Verdadera.

b. Falsa, puede que no se intersequen, que sean paralelos.

c. Falsa, siempre se puede obtener un plano con una recta y un punto que no pertenezca a la recta.

d. Falsa, se pueden intersecar formando un cierto ángulo, distinto de 90º.
e. Falsa, existen infinitos puntos que pasan por ellos.
f. Falsa, puede ocurrir que cada par de puntos pertenezca a una recta, de modo que sean dos rectas alabeadas.
g. Verdadera.
h. Falsa, podría ser una recta también.
i. Verdadera.

2. Si dos planos no son secantes, entonces no tienen ningún punto en común, por lo que necesariamente serían planos paralelos.

3. a. Sí, son colineales y su ecuación es:
$\langle x, y, z\rangle = \lambda \langle 1, 1, 1\rangle$
b. Sí, son colineales y su ecuación es:
$\langle x, y, z\rangle = \langle 2, 1, 0\rangle + \lambda\langle 1, 1, 1\rangle$
c. No son colineales.
d. Sí, son colineales y su ecuación es:
$\langle x, y, z\rangle = \lambda \langle 0, 1, 2\rangle$
e. No son colineales.
f. No son colineales.

4. Cuando dos planos son paralelos, los coeficientes de x, y y z. son iguales salvo algún ponderador.

5. a. $5x - 3y - 2z = 1$
b. $2x - z = -11$
c. $8x - z - 2y = 26$
d. $5x + z = 8$
e. $3x + z = 6$

6. Pregunta abierta.

7. a. Paralelas
b. Alabeadas pues no son paralelas ni se intersecan.
c. Paralelas.
d. Paralelas.

8. a. Dos puntos.
b. Dos puntos.
c. Tres puntos no colineales o una recta y un punto que no pertenece a ella.

9. a. Paralelos.
b. Secantes y su ecuación es:
$\langle x, y, z\rangle = \langle -2, 0, 0\rangle + \lambda \langle 3, 0, 1\rangle$
c. Secantes y su ecuación es:
$\langle x, y, z\rangle = \langle 0, 1, -1\rangle + \lambda \langle 1, 3, -10\rangle$
d. Secantes y su ecuación es:
$\langle x, y, z\rangle = \langle -4, 0, 4\rangle + \lambda\langle 1, 1, 0\rangle$

10. a. $\langle x, y, z\rangle = \lambda\langle -1, 1, 0) + \mu \langle 1, 0, 1)$
b. $\langle x, y, z\rangle = \lambda \langle 1, 0, -2) + \mu \langle 0, 1, 3)$
c. $\langle x, y, z\rangle = \langle 0, 2, 0) + \lambda \langle 1, 3, 0\rangle + \mu \langle 0, -1, 1\rangle$
d. $\langle x, y, z\rangle = \langle 0, 0, 5\rangle + \lambda \langle 1, 0, -2\rangle + \mu \left\langle 0, 1, -\frac{5}{2}\right\rangle$

11. Una recta se puede representar por medio de una ecuación paramétrica o una ecuación vectorial. Una muestra los parámetros y la otra los vectores directores de la recta en el espacio.

12. D

13. E

14. D

15. B

Página 208

Síntesis

1. a. $\langle x, y, z\rangle = \langle 0, 1, 0\rangle + \lambda \langle 2, 2, -1\rangle$
b. $\langle x, y, z\rangle = \langle 4, 2, 0\rangle + \lambda \langle 2, -1, 3\rangle$
c. $\langle x, y, z\rangle = \langle 7, -4, 6\rangle + \lambda \langle -3, 0, 4\rangle$

2. a. $-x = \frac{y}{3}, z = 0$
b. Son planos paralelos, luego no se intesecan.
c. Son planos paralelos, luego no se intesecan.

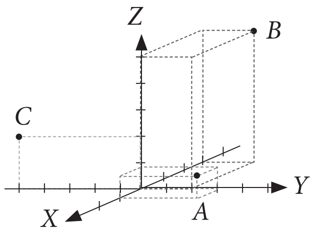
3. a. $5\sqrt{18}$
b. 13
c. $\sqrt{656}$
d. 12

4. a. $\frac{x}{3} = \frac{z+1}{-1}, y = 3$
b. $\frac{y+1}{6} = \frac{z-1}{-8}, x = 2$
c. $x = -4, z = 3$

Páginas 210 y 211

Evaluación final

1. a. $\langle x, y\rangle = \langle 3, -2\rangle + \lambda \langle -4, 5\rangle$; (–1, 3), (7, –7), (–5, 8)
   b. $\langle x, y\rangle = \langle -3, 1\rangle + \lambda \langle 0, 2\rangle$; (–3, 3), (–3, 6), (–3, 10)
   c. $\langle x, y\rangle = \langle 2, -4\rangle + \lambda \langle 5, -1\rangle$; (7, –5), (12, –6), (17, –7)

2. 

3. a. $\sqrt{6}$
   b. $\sqrt{5}$
   c. $\sqrt{480}$
   d. $\sqrt{27}$
   e. $\sqrt{118}$
   f. $\sqrt{89}$

4. a. Plano
   b. Plano
   c. Plano
   d. Recta
   e. Plano
   f. Plano

5. a. $5x - y - 2z = -17$
   b. $7x + 14z + 10y = 6$
   c. $5x + 3y - z = 11$
   d. $5x + z = 0$

6. a. Sí.
   b. Sí.
   c. Sí
   d. Sí.

7. A

8. C

9. D

10. E

11. B

12. A

13. B

14. A

15. D

Unidad 4

Páginas 220 y 221

¿Cuánto sé?

1. a. 451 cm
   b. 3 600 m
   c. 935 000 mm^2
   d. 84 000 000 cm^2
   e. 0,00000079 m^2
   f. 0,005 m^2
   g. 0,000005606 m^3
   h. 4 000 900 cm^3

2. a. Perímetro: 5 cm, área: 1,725 cm^2
   b. Perímetro: 12 cm, área: 10,38 cm^2
   c. Perímetro: 16 cm, área: 19,28 cm^2
   d. Perímetro: 40 cm, área: 123,2 cm^2
   e. Perímetro: 72 cm, área: 403,2 cm^2

3. 0,156 m^3

4. 12 000 cajas.

5. 37,5 cm^3

6. a. 1,368 m^3
   b. 28 bloques.
   c. 168 bloques.
   d. $ 11 491 200

7. a. 529,875 m^2, aproximadamente.
   b. 10,26 m^2, aproximadamente.
   c. 2,18 m^2, aproximadamente.

8. 16 cm^2

9. 226,08 m^2, aproximadamente.

10. a. F, un prisma es también un poliedro.
    b. V, pero no todo prisma de base cuadrada es un cubo.
    c. V.
    d. F, tendría que tener sus 12 aristas de igual medida, y que los ángulos correspondientes sean todos ángulos rectos.

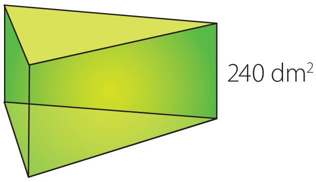
11. $\sqrt{2}\ r$

12. 128 cm^2

13. 1 : 2

14. 30,86 cm^2 y 30,84 cm, aproximadamente.

15. 500 cm^2

16. 

17. a. $ 835 840
    b. $ 454 350
    c. $ 468 000

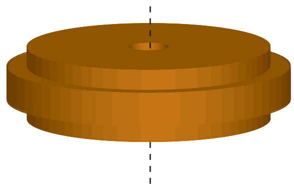
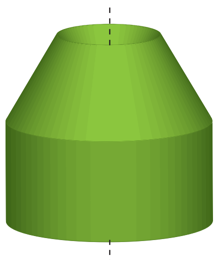
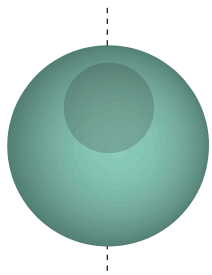
Página 222 a 223

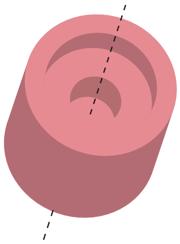
Repaso

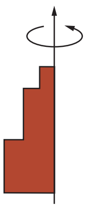
1. Es una transformación isométrica en el plano que consiste en girar una figura alrededor de un punto fijo de acuerdo a un ángulo de giro dado.

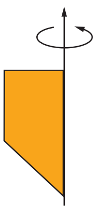
2. Es una transformación isométrica en el plano que corresponde a mover una figura con respecto a un vector.

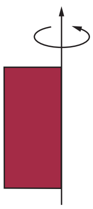
Actividades

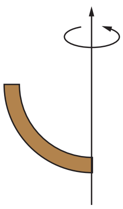
1. a. 
   b. 
   c. 

d. 

2. a. 

b. 

c. 

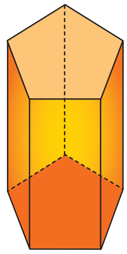
d. 

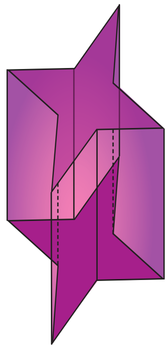
Página 224 y 225

Actividades

1. Pregunta abierta. Por ejemplo, un prisma de cualquier base, se genera por la traslación de su base, en dirección perpendicular a ella. Esto incluye los paralelepípedos y el cubo. También, un cilindro se genera por la traslación de un círculo, en dirección perpendicular a él.

2. a. Un cubo.
   b. 64 unidades de volumen, porque la arista mide 4 unidades de longitud.
   c. 96 unidades de área.
   d. Se generaría un paralelepípedo de 128 unidades de volumen.

3. a. 

   b. 

Antes de continuar

1. Sí, el cilindro.

Página 226 y 227

Repaso

1. 110 cm^2

Actividades

1. a. 432 cm^3
   b. 26,52 cm^3
   c. 120 mm^3
   d. 244,8 cm^3
2. 150 000 veces mayor.
3. 259,81 cm^3, aproximadamente.
4. 607,5 cm^3
5. 0,168 m^3
6. a. 70,56 m^3
   b. 6 720 duchas.

Página 228 y 229

Actividades

1. 4 m
2. 28,3 cm, aproximadamente.
3. a. 1 003,2 cm^3
   b. 280 cm^3
   c. 200 cm^3
4. 5,6 m^2
5. a. 2 200 cm^3
   b. 1 980 cm^3
   c. 6 930 g
6. 15 cm
7. 6 cm
8. a. 4 m
   b. 60 dados.
   c. 7 040 m^3
9. No, porque el volumen de un prisma oblicuo depende de su altura, no de la medida de la arista lateral, ya que cuanto más inclinado esté, menos volumen tiene.

Antes de continuar

1. Sí, porque depende de la altura del prisma, no de la medida de la arista lateral o de la inclinación del prisma.

Página 232 y 233

Repaso

1. a. 78,5 cm^2
   b. 706,5 cm^2

Actividades

1. a. 169,65 cm^3
   b. 62,8 cm^3
   c. 1 615,53 cm^3
   d. 904,32 cm^3
   e. 1 326,65 cm^3
   f. 11 304 cm^3
2. 223,097 cm^3
3. 14,13 m^3
4. a. 19,4 cm aproximadamente.
   b. Rosa, usa 430 cm^3 menos en cada vela.
   c. 27 318 cm^3
   d. 255,18 cm^3
5. Cuando se duplica la altura, el volumen del cilindro también se duplica. En cambio, cuando se duplica el radio, el volumen se cuadriplica.
6. Pregunta abierta.

Antes de continuar

1. Al enrollar a lo largo, es decir, cuando el ancho del papel corresponde a la altura del cilindro, verificando la expresiones para el volumen del cilindro en cada caso y considerando que $a < b$, por hipótesis.

Página 234 y 235

Repaso

1. a. 37,5 cm^2
   b. 41,52 cm^2

Actividades

1. a. 210 cm^3
   b. 240 cm^3
   c. 41,57 m^3, aproximadamente.
2. 9 cm, aproximadamente.
3. 9 cm
4. 210 g

Páginas 236 y 237

Actividades

1. a. 1 568 cm^3
   b. 103,25 cm^3
   c. 42 cm^3
2. a. 48 cm^3
   b. 1 000 cm^3
   c. 1 100 cm^3

3. El volumen de la parte superior es 1 461,4 cm^3, mientras que el de la parte inferior es 4 384,3 cm^3, aproximadamente.
4. 96 cm^3
5. El volumen de la pirámide es un tercio del volumen del cubo, ya que tienen la misma base y la misma altura. Luego, la diferencia es igual que el doble del volumen de la pirámide.
6. 62 400 cm^3
7. 9 216 dm^3
8. a. 1 558,8 cm^3, aproximadamente.
   b. 60 dm^3
   c. 6 cm
9. 7,2 m
10. Una tiene el doble de volumen que la otra.
11. 682,7 cm^3, aproximadamente.
12. 3 m
13. 18 cm

Antes de continuar

1. No, porque si tienen la misma arista basal y distinto número de caras, entonces el área basal no es igual. Luego, aunque tengan igual altura, no podrían tener igual volumen.
2. Sí, porque el volumen depende de la altura de la pirámide, no del apotema de sus caras laterales, por ejemplo.

Página 238 y 239

Repaso

1. a. Es el segmento que une el centro de la circunferencia basal con cualquier punto de la circunferencia.
   b. Corresponde a la distancia que existe entre el vértice del cono y su base.
   c. Es el segmento que genera un cono, al ser rotada al rededor de un eje.
2. a. 45,3416 cm^2
   b. 153,86 cm^2

Actividades

1. a. 1 017,36 cm^3
   b. 117,23 cm^3
   c. 2 260,8 cm^3
   d. 2 679,47 cm^3
   e. 2 512 cm^3
   f. 1 017,36 cm^3
2. 16,171 cm^3, aproximadamente.
3. 602,88 m^3, aproximadamente.
4. 175,84 cm^3, aproximadamente.
5. 56 viajes. Se calcula el volumen acumulado de salitre y se divide por la capacidad de carga. Como el resultado no es un número entero, el camión debe realizar un viaje más para llevar el resto.
6. 518,1 cm^3

Página 240 y 241

Actividades

1. 263,76 cm^3, aproximadamente.
2. a. 12 cm
   b. 2 800,88 cm^3, aproximadamente.
3. 37 119 cm^3, aproximadamente.
4. 307,72 cm^3, aproximadamente.
5. 79,54 cm^3, aproximadamente.
6. 318,19 cm^3, aproximadamente.

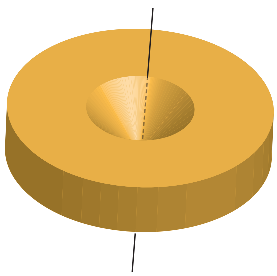
Antes de continuar

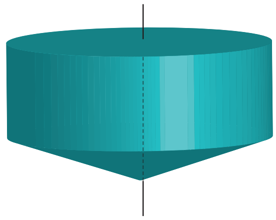
1. Sí, utilizando el teorema de Pitágoras para calcular la altura del cono, y luego, calcular su volumen.

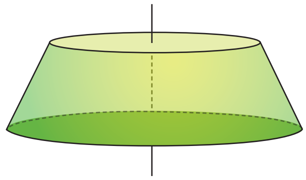
Páginas 242 a 245

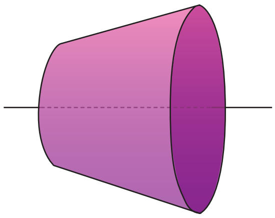
Practico

1. a.

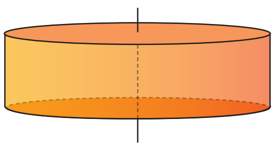


b. 

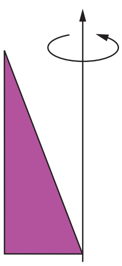
c. 

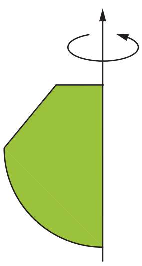
d. 

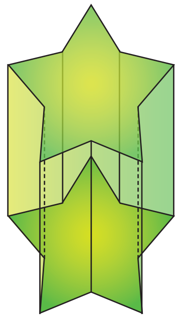
e. Con las figuras c y d.

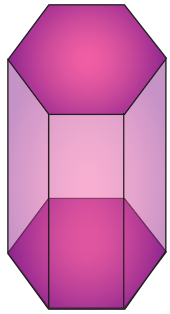
2. a. 

b. 452,16 cm^3, aproximadamente.
c. Es menor, ya que es de 301,44 cm^3, aproximadamente.
d. Uno de los lados debe ser el doble del otro.

3. a. 

b. 

4. a. 

b. 

5. a. 32 cubos.
b. 4 cubos.
c. 256 cm^3.

6. a. 1 000 000 cm^3
b. 1 350 cm^3
c. 250 cubitos.
d. 2 m
e. 12 000 cm^3
f. 26 min 11 s, aproximadamente.

7. 14,7 kg

8. 18 cm^2

9. 117 unidades cúbicas.

10. a. 93,53 cm^3, aproximadamente.
b. 36 cm^3

11. a. 136 800 mm^3
b. 20 lingotes.

12. En 4 : 1.

13. a. Cuando tiene una generatriz.
b. El cilindro es un cuerpo con dos caras (círculos) en cambio el cono tiene una cara y un vértice. Además son generados por distintas generatrices.
c. Corresponde a un cono truncado, es decir, que ha sido seccionado por un plano paralelo a su

base y perpendicular al eje, por lo cual tiene dos caras (círculos) paralelas entre sí, pero de distinto diámetro. Es un cuerpo de revolución generado por un trapecio rectángulo que ha sido rotado en torno al lado que es perpendicular a sus bases.

d. A pesar que el cono truncado tiene la mitad de la altura del cono con igual base, su volumen no es la mitad, sino que es siete octavos del volumen del cono.

e. El volumen del cilindro es tres veces el volumen del cono.

14. a. 825,45 cm^3, aproximadamente.

b. El envase con mayor capacidad es el que tiene doble de ancho y mitad de altura, pues su volumen es el doble que el otro.

15. a. 508,68 cm^3, aproximadamente.

b. 169,68 cm^3, aproximadamente.

c. Sí.

16. 60 dm^3

17. 2 667 cm^3, aproximadamente.

18. 779,42 cm^3, aproximadamente.

19. El triple de la altura del cubo, es decir, 12 cm.

20. 1 920 cm^3

21. a. 1 125 cm^3

b. 141 666,7 cm^3, aproximadamente.

c. 24 pirámides.

d. 3,5 kg

e. 108 cm

f. 5 400 cm^3

22. 512 cm^3

23. 14 000 cm^3

24. 150,72 cm^3, aproximadamente.

25. 36,34 cm, aproximadamente.

26. a. 0,551 m^3, aproximadamente.

b. 468,4 kg, aproximadamente.

27. 4 cm

28. 50,24 cm^3, aproximadamente.

29. 14,15 cm, aproximadamente.

30. B

31. E

32. A

33. D

34. D

35. E

36. B

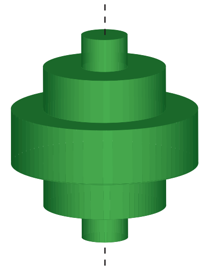
37. C

38. B

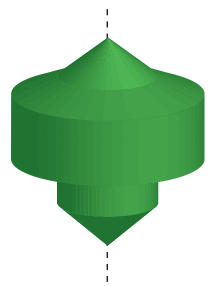
Página 246 y 247

Evaluación de proceso

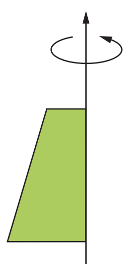
1. a.



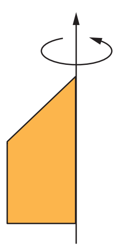
b.

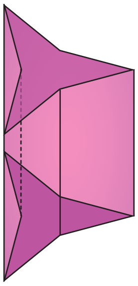


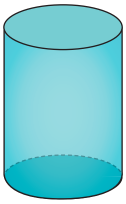
2. a.



b.



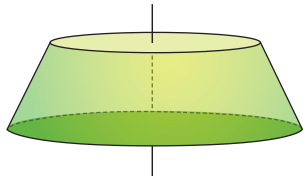
3. a. 

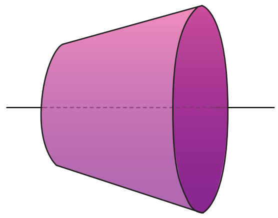
b. 

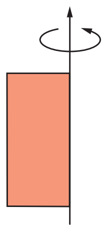
4. a. Falsa, el volumen de un cilindro es el triple del volumen de un cono de igual base e igual altura.
   b. Verdadera.
   c. Falsa, el principio de Cavalieri puede aplicarse a dos cuerpos que tienen la misma área basal.
5. a. 10 vasos.
   b. 445 g
   c. También es 2 : 3.
   d. 500 kg, aproximadamente.
   e. El volumen de la pirámide B es ocho veces mayor que el de la pirámide A.
   f. 37,5 cm^3
   g. 30 cm
   h. 7 450 cm^3, aproximadamente.
6. D
7. B
8. C
9. C
10. A
11. E
12. D
13. B
14. A

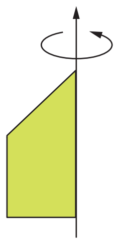
Página 248 y 249

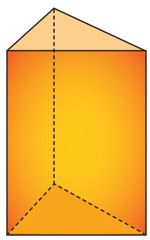
Para reforzar

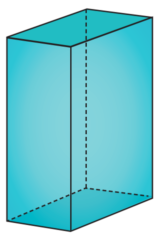
1. a. 

b. 

2. a. 

b. 

3. a. 

b. 

4. 463 cm^3, aproximadamente.

5. a. 472,32 cm^3
   b. 306 cm^3
   c. 1 296 cm^3

6. a. 90 m^3
   b. 195 cm^3
   c. 210 cm^3
   d. 7 cm^2
   e. 1 152 cm^3
   f. 6 cm

7. 400 cm^3

8. 235,5 cm^3

9. Juntando los lados de 30 cm.

10. 6 cm

11. a. No, se reduce a la cuarta parte. Porque la expresión del volumen de un cono incluye el radio al cuadrado.
    b. Se reduce a la mitad.

12. 6,93 cm, aproximadamente.

13. 176,625 cm^3

14. La demostración pedida se presenta en las páginas 234 y 235 del Texto.

15. 753,6 cm^3

16. a. 8 cm
    b. 8 505,6 cm^3, aproximadamente.
    c. 30 cm
    d. 13 vasos, al aproximar 12,998.

17. a. $3\sqrt{2}$ cm
    b. 75,36 cm^3
    c. 27,36 cm^3

Página 250 y 251

Repaso

1. 696 cm^2

Actividades

1. a. 141,5 cm^2
   b. 192 cm^2
   c. 547,06 cm^2, aproximadamente.
   d. 157,85 cm^2, aproximadamente.

2. 8,42 cm, aproximadamente.

3. 646,3 cm^2

4. 166,28 cm^2, aproximadamente.

5. 13,76 cm^2, calculando el área total del paralelepípedo recto.

6. 467,14 cm^2, aproximadamente.

7. La arista basal mide 5 m y la altura es de 10 m.

8. 600 cerámicas.

Página 252 y 253

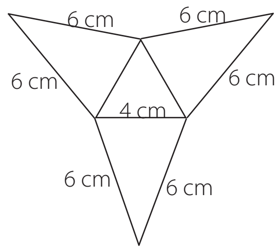
Actividades

1. 256,31 cm^2, aproximadamente.

2. 6 cm^2

3. 240 m^2

4. a. 92,45 m, aproximadamente.
   b. 1 135,69 m^2, aproximadamente.

5. 

40,87 cm^2, aproximadamente.

6. 0,8 litros.

7. El lado desconocido mide 8 cm y el área total es de 552 cm^2, aproximadamente.

8. 26,25 m^2

9. 1 359,5 cm^2, aproximadamente.

10. $ 7 072

Antes de continuar

1. No, porque a pesar que tengan igual altura y bases similares de igual área, no en todos los casos ocurrirá que el área total del prisma sea el doble que el área total de la pirámide.

Página 254 y 255

Repaso

1. a. 37,68 cm
   b. 62,8 cm

Actividades

1. a. $A_L = 150,72$ cm^2, $A_T = 207,24$ cm^2, aproximadamente.
   b. $A_L = 314$ cm^2, $A_T = 471$ cm^2, aproximadamente.
   c. $A_L = 1,884$ m^2, $A_T = 2,8888$ m^2, aproximadamente.
   d. $A_L = 6,28$ m^2, $A_T = 31,4$ m^2, aproximadamente.
   e. $A_L = 110\,528$ cm^2, $A_T = 150\,720$ cm^2, aproximadamente.
   f. $A_L = 8\,792$ cm^2, $A_T = 11\,304$ cm^2, aproximadamente.
2. En la razón 4 : 1.
3. 1 099 cm^2
4. a. 406,8 cm^2, aproximadamente.
   b. 139,6 L, aproximadamente.
5. Al duplicar el diámetro, el volumen del cilindro se cuadriplica, para haber obtenido el doble del volumen considerado en un principio, se debió también haber disminuido la altura a su mitad.

Página 256 y 257

Actividades

1. a. $g = 5$ cm, $A_{SC} = 62,8$ cm^2, aproximadamente, $A_{cono} = 113,04$ cm^2, aproximadamente.
   b. $r = 9,95$ cm, $A_{SC} = 562,37$ cm^2, aproximadamente, $A_{cono} = 873,24$ cm^2, aproximadamente.
   c. $g = 10$ cm, $A_{SC} = 251,2$ cm^2, aproximadamente, $A_{cono} = 452,16$ cm^2, aproximadamente.
2. $A_{cono} = 1\,648,5$ cm^2, aproximadamente.
3. a. 314 cm^3 aproximadamente.
   b. 204,1 cm^2 aproximadamente.
4. María necesitará 703,36 cm^2; Susana necesitará 1 099 cm^2; y Carlos, 1632,8 cm^2, como mínimo, en cada caso.
5. a. 5 cm
   b. 2 cm
6. Considerando que no se incluye la base mayor, porque es una budinera, el área es de 1 148,6 cm^2, aproximadamente.
7. a. $g = 13$ cm
   b. 1 591,98 cm^2, aproximadamente.
   c. 4 019,2 cm^2, aproximadamente.
8. Considerando que no se incluye la base mayor, porque son macetas, el costo es de $ 30 563.

Antes de continuar

1. No necesariamente, ni en el caso del área lateral ni en el caso del área total, porque también depende del radio del cono.

Página 258 y 259

Repaso

1. Al cuádruple, en el primer caso, y nueve veces, en el segundo caso.

Actividades

1. 904,32 cm^3, aproximadamente.
2. 113,04 cm^3, aproximadamente.
3. 4 186,7 cm^3, aproximadamente.
4. a. 8 cm de ancho, 8 cm de alto y 12 cm de largo.
   b. 366,08 cm^3, aproximadamente.

Página 260 y 261

Actividades

1. a. 113,04 cm^2, aproximadamente.
   b. 803,84 cm^2, aproximadamente.
   c. 1 808,64 cm^2, aproximadamente.
   d. 1 519,76 m^2, aproximadamente.
   e. 72,3456 m^2, aproximadamente.

f. 0,002826 m^2, aproximadamente.

2. a. 3 353 km
 b. 141 207 169 km^2
 c. 157 822 545 900 km^3

3. a. La razón entre el área de la esfera de radio 3 cm y la de radio 5 cm es 9 : 25.
 b. La razón entre el volumen de la esfera de radio 3 cm y la de radio 5 cm es 27 : 125.
 c. $\sqrt[3]{152}$ cm o aproximadamente 5,336 cm.

4. 6 cm

5. $A = 452{,}39$ cm^2, $V = 904{,}78$ cm^3.

6. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{113}{\pi}}$ cm o aproximadamente 3 cm.

7. $0{,}0324\pi$ m^2:

8. a. 5 cm
 b. 5 cm

9. a. $144\pi\sqrt[3]{\frac{9}{16}}$ cm^2 o aproximadamente $118{,}86\pi$ cm^2.
 b. 196π cm^2

Antes de continuar

1. El volumen del cilindro tendrá una relación con el volumen de la esfera de 3 es a 2. Pues el radio de la base del cilindro sería igual al radio de la esfera y su altura equivaldría a dos veces el radio.

Páginas 262 a 265

Practico

1. a. Falso, pueden ser triángulos isósceles o escalenos también, todo dependerá de la base y si es recta u oblicua.
 b. Falso, en las pirámides rectas se puede utilizar esta expresión, pero en las pirámides oblicuas no.
 c. Falso. Aunque una pirámide triangular tiene 3 caras laterales y una base, o sea tiene 4 caras, los tetraedros tienen cuatro caras iguales, lo que no siempre sucede en una pirámide de base triangular. La expresión “Todos los tetraedros son pirámides de base triangular” sí es verdadera.

2. a. El área total de cada uno es 6 cm^2, 24cm^2, 54 cm^2 y 96 cm^2 respectivamente.
 b. Si se duplica la arista, su área total se cuadruplica. Si las aristas se triplican, el volumen aumenta nueve veces.
 c. Caben 8, 27 y 64 cubos de arista unitaria respectivamente.

3. Deberá tener una profundidad de 3 metros.

4. El cubo B es el que tiene la menor área total.

5. $(195 + 390\sqrt{3})$$cm^2$, aproximadamente 870,49 cm^2.

6. $(96 + 24\sqrt{3})$ cm^2, aproximadamente 137,569 cm^2.

7. a. $64\sqrt{3})$ cm^3
 b. $6(\sqrt{3} + \sqrt{67}) + 96$ cm^2

8. $128\sqrt{3}$ cm^2

9. $(3{,}24\sqrt{3} + 43{,}2)$ cm^2

10. 4 cm

11. Volumen de $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$ y área total $2\sqrt{3}\,a^2$

12. Las áreas totales del cubo original y el cubo con diagonal de una cara igual a la diagonal del original, se relacionarán como 2 : 3.

13. 320 cm^2

14. a. $12\sqrt{7}$ cm
 b. $2\,304\sqrt{7}$ cm^3
 c. $576(1 + 2\sqrt{2})$ cm^2

15. a. 190 cm^2
 b. 132 cm^2
 c. 204 cm^2

16. a. 81 m^2
 b. 70 m^3
 c. 125 m^3

17. a. Un cubo de arista 4 cm. Su área es de 96 cm^2.
 b. Un paralelepípedo de 64 cm de largo, 1 cm de ancho y 1 cm de alto. Su área es de 256 cm^2.

18. a. Falso, es 4 veces más grande.
 b. Falso, es la mitad.
 c. Falso, esto es en el caso del cilindro.
 d. Falso, es igual al perímetro de la base.
 e. Falso, es un sector circular de radio igual a la generatriz.
 f. Falso, disminuye a su sexta parte.

19. a. $1\,200\pi$ cm^2
b. $2\,000\pi$ cm^2
c. $12\,000\pi$ cm^3

20. a. $2\,000\sqrt{\dfrac{30}{\pi}}$ m
b. $ 77 665 036

21. Se obtiene igualando el área lateral dada con la expresión que se utiliza para obtenerla, con esto se despeja el radio, y después con este dato se puede obtener el volumen. El radio es de 6 cm y su volumen es de 4 521,6 cm^3.

22. a. El recipiente con mayor capacidad es el primero.
b. En el primer recipiente se utiliza mayor cantidad de aluminio en su elaboración.
c. En las dos etiquetas se utiliza la misma cantidad de papel.

23. a. 20 cm
b. 221,06 cm
c. $2\sqrt{241}$ cm

24. a. Aproximadamente, $50\,127{,}16\pi$ mm^3.
b. Aproximadamente, 944,67 cm^3.

25. a. Volumen: 16π cm^3, área: $4\pi(1 + \sqrt{5})$ cm^2.
b. Volumen: 375π cm^3, área: $25\pi(1 + \sqrt{10})$ cm^2.
c. Volumen: 768π cm^3, área: $32\pi(4 + \sqrt{13})$ cm^2.

26. a. $\dfrac{36}{\pi}$ cm, aproximadamente 14,45 cm.
b. Aproximadamente, 12,502 cm.
c. Aproximadamente, 185,37 cm^2.
d. 300 cm^3.

27. a. $4\sqrt{2}$ cm
b. Manto: $24\sqrt{2}\,\pi$ cm^2 Total: $8\pi(3\sqrt{2} + 4)$
c. $\dfrac{64}{3}\pi$ cm^3

28. $(9 + \sqrt{113})\pi$ cm

29. a. 216π cm^2
b. 360π cm^2

30. $18\pi(2 + \sqrt{29})$

31. a. Aproximadamente $81{,}16\pi$ cm^3.
b. Aproximadamente 8 309,5 litros.

32. a. El largo es equivalente a $2\pi r$
b. El ancho es igual a la altura del tarro.

33. $2\,048\pi$ m^3

34. a. 1 : 4
b. 1 : 8

35. a. Área: 16π cm^2, volumen: $10{,}6\pi$ cm^3.
b. Área: 49π dm^2, volumen: $57{,}16\pi$ dm^3.
c. Área: 100π cm^2, volumen: $166{,}6\pi$ cm^3.
d. Área: $9\,216\pi$ mm^2, volumen: $147\,456\pi$ mm^3.

36. Área: $72{,}1\pi$ cm^2,
volumen: $(4{,}083\sqrt{19{,}11} + 77{,}583)\pi$ cm^3

37. 2,00033 m

38. 516π cm^3

39. A

40. A

41. C

42. D

43. C

44. B

45. B

46. D

47. D

Páginas 266 y 267

Evaluación de proceso

1. a. $(21{,}5 + 5{,}1\sqrt{618{,}5})$ cm^2
b. 294 cm^2

2. 3,36 m^3

3. $8(9 + \sqrt{3})$ cm^2

4. Su volumen es 8 veces más grande y su área es 4 veces más grande.

5. 6 latas.

6. a. Aproximadamente, 2 574 466,67 m^3.
b. Aproximadamente, 85 491 m^2.

7. 162 cm^2

8. a. 8 cm
   b. 160π cm

9. $8{,}4\pi$ m^2

10. a. 24 cm
    b. 260π cm^2
    c. 360π cm^2

11. La esfera tiene mayor volumen, pues a pesar que la arista del cubo tiene mayor longitud que el radio de la esfera, al obtener sus volúmenes es mayor el de la esfera.

12. Aproximadamente, 9 202 772 079,91 cm^3

13. Sí, tendrían diferentes alturas y se debería conocer una de ellas, para comprobarlo.

14. a. 92 cubos completos y sobra un poco de pintura.
    b. 1 600 cm^2
    c. $ 3 000
    d. Necesita como mínimo 88 cm de alambre y 336 cm^2 de papel volantín.

15. D

16. B

17. E

18. E

19. B

20. C

21. C

22. A

23. D

24. C

Páginas 268 y 269

Para reforzar

1. a. 856,8 cm^2
   b. 608 cm^2
   c. Aproximadamente, 419,13 cm^2
   d. Aproximadamente, 70,79 cm^2

2. 7 cm

3. 10 dm

4. 531,73 cm^2

5. $3\,600\pi$ cm^2

6. a. 240 cm^2
   b. Aproximadamente, 120,93 cm^2
   c. 510,95 cm^2

7. a. 24 cm
   b. 175π cm^2
   c. 224π cm^2
   d. 392π cm^3

8. a. 41,4 m^2
   b. No, faltan 182 cm^2.
   c. 3 650 cm^2
   d. Como mínimo, 224 cm^2.

9. $64\sqrt{3}$ cm^2

10. Sí, el tetraedro es una pirámide de base triangular y el hexaedro en un prisma de base cuadrada.

11. 75 cm^2

12. $(32\sqrt{3} + 336)$ cm^2

13. 402,43 m^3

14. a. 13 cm
    b. No, porque tienen distinta base y altura.
    c. El cono con altura 12 cm tiene un área total de 90π cm^2 y el cono con altura 5 cm tiene un área total de 300π cm^2.
    d. El cono con mayor área es el que tiene una altura de 5 cm.

15. a. Aproximadamente, $236{,}32\pi$ cm^2.
    b. Aproximadamente, $209{,}24\pi$ cm^2.
    c. Aproximadamente, $146{,}1\pi$ cm^2.

16. a. $73{,}76\pi$ cm^2
    b. 96π cm^3

17. a. 15 cm
    b. 585π cm^2
    c. $1\,386\pi$ cm^2

18. 128π cm^3

19. a. 136π cm^2
    b. 200π cm^2

20. a. 242π cm^2
    b. $\frac{242}{3}\pi$ cm^3

21. a. 441π cm^2
    b. $1\,543{,}5\pi$ cm^3

22. a. 144π cm^2
    b. 288π cm^3

23. La relación que existe es 1 : 1.

24.
$$V_{cilindro} = V_{cono} + V_{esfera}$$
$$15^2 \cdot 30 \cdot \pi = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15^2 \cdot 30 + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 15^3$$
$$15^2 \cdot 15 \cdot 2 \cdot \pi = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15^2 \cdot 15 \cdot 2 + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 15^3$$
$$15^3 \cdot 2 \cdot \pi = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15^3 \cdot 2 + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 15^3$$
$$15^3 \cdot 2 \cdot \pi = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 15^3 + \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 15^3$$
$$15^3 \cdot 2 \cdot \pi = \frac{6}{3} \cdot \pi \cdot 15^3$$
$$15^3 \cdot 2 \cdot \pi = 2 \cdot \pi \cdot 15^3$$
$$15^3 \cdot 2 \cdot \pi = 15^3 \cdot 2 \cdot \pi$$

Páginas 272 y 273

Evaluación final

1. a. 32π cm^2
   b. 104π cm^2
   c. 208π cm^3

2. Aproximadamente, 49 veces.

3. a. Es menor.
   b. Negativo, pues disminuyó la capacidad del envase y podrían cambiar la cantidad de jugo, por envase.

4. 125 cajas.

5. 800 cm^2

6. $256(3 + \sqrt{2})$ cm^2

7. 593,28 cm^3, aproximadamente.

8. En el cono de 9 cm de altura su área es de 324π cm^2 y en el de 12 cm de altura es de 216π cm^2. Luego es mayor el área del cono con altura 9 cm.

9. El cono truncado tiene mayor capacidad.

10. Si el cono reduce a la mitad su radio, manteniendo su altura, el volumen se reduce a la cuarta parte. En cambio, si el cono reduce a la mitad su altura y mantiene su radio, el volumen se reduce a la mitad.

11. Se necesitan 11 900 ladrillos.

12. 702,64 cm^2

13. a. $0{,}03872\,\pi$ m^3
    b. Aproximadamente 352,58 kg.

14. Aproximadamente 4 050,66 cm^3.

15. B

16. C

17. B

18. E

19. B

Unidad 5

Páginas 282 y 283

¿Cuánto sé?

1. a. 1, 2, 3, 4, ...
   b. Pregunta abierta

2. a. Ω = {(1, 1), (1, 2),(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2),(2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2),(3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6) (4, 1), (4, 2),(4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2),(6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}
   b. $P(X = 7) = \frac{1}{6}$

   $P(X < 7) = \frac{5}{12}$

   $P(Y = 3) = \frac{1}{6}$

   $P(Y > 3) = \frac{4}{9}$

3. a.]0, +∞[
   b. Pregunta abierta. Por ejemplo día o mes de nacimiento de la persona.
   c. Una variable aleatoria es un número real asociado al resultado de un experimento aleatorio.

4. a. Falso, ya que el valor de la esperanza de una variable aleatoria depende de los posibles valores que pueda tomar esta variable.
   Por ejemplo, si la variable aleatoria solo toma valores negativos, su esperanza será un valor negativo.
   b. Verdadero.
   c. Falso, porque es un promedio ponderado de estos valores. Sin embargo debe estar entre el valor mínimo y máximo que toma la variable aleatoria.
   d. Falso, puede ser mayor o menor según los valores que tome la variable aleatoria.
   e. Falso, puede ser mayor o menor según los valores que tome la variable aleatoria.

5. a. 7
   b. 2,1
   c. Aproximadamente 0,23.
   d. Aproximadamente 0,0015.
   e. Aproximadamente 0,047.
   f. Aproximadamente 0,8497

6. a. 48
   b. 0,25
   c. 0,69
   d. 0,000016
   e. 0,0032
   f. 0,98

7. a. Aproximadamente, media = 1,7
   varianza = 0,0029
   desviación estándar = 0,053
   b.

X	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Acumulada	Frecuencia Relativa
1,65	2	2	0,18
1,66	1	3	0,09
1,67	2	5	0,18
1,7	1	6	0,09
1,72	2	8	0,18
1,73	1	9	0,09
1,77	1	10	0,09
1,82	1	11	0,09

   c. Pregunta abierta. Por ejemplo, podría corresponder a las estaturas de los hombres de un curso de 4º medio.

8. a. La muestra A tiene mayor desviación estándar, ya que sus datos estan más dispersos.
   b. Ambos estudiantes obtuvieron el mismo promedio.
   c. Hay muchas posibilidades, pero por ejemplo agregar tres veces 3,41 no alteraría el promedio.

9. Puede ganar 3 600 pesos. No, no le conviene jugar por que la probabilidad de ganar es $\frac{1}{38}$.

10. a. $\Omega = \{AS, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K\}$
    b. X: número de puntos que se ganan al extrar una carta.
    c. Aproximadamente 1,15.

11. a. 0,0025
    b. 1

12. a. 45 muestras.
    b. Por ejemplo; (1, 2), media 1,5.
       (6, 7), media 6,5.
       (9, 11), media 10.
       (4, 6), media 5.
       (15, 21), media 18.

13. D

14. B

Páginas 284 a 287

Repaso

1. Pregunta abierta.

2. $\frac{4}{16}$

Actividades

1. a. Discreta y toma valores entre 0 y 100.
   b. Discreta y toma valores mayores o iguales que 0.
   c. Continua y toma valores mayores que 0.

2. Pregunta abierta, por ejemplo, discretas: número de árboles de un parque, número de personas en la fila de una caja del supermercado. Continuas: temperatura máxima del día de hoy, distancia que corre un deportista cuando entrena.

3. a. Sí.
   b. No, porque el área bajo la curva es mayor que 1.
   c. No, porque es negativa en todo su dominio.
   d. No, porque el área bajo la curva es menor que 1.

4. Pregunta abierta.

5. a. La funcion $f(x)$ es una funcion de densidad, ya que el área bajo la cuerva en el intervalo [–1, 1] es 1 y es siempre positiva.
   b. $P(X \leqslant 0{,}1) = 0{,}55$
      $P(X = 0{,}8) = 0$
      $P(-0,5 < X < 0{,}3) = 0{,}4$
      $P(X < -1) = 0$
   c. Hay muchas posibilidades, pero, por ejemplo [–0,5; 0,5]
   d. 0,25
   e. 0,3

Páginas 288 a 293

Repaso

1. Pregunta abierta.

Actividades

1. Pregunta abierta. Por ejemplo, debieran estar concentrados en la media: la altura de los alumnos de cuarto medio, el precio del pan en los locales de mi ciudad, etc. No deberían estar concentrados en la media el largo del cabello de los alumnos de mi clase.

2. a. Sí.
   b. No.
   c. Sí.
   d. No.
   e. No.
   f. Sí.

3. a. 105 varones.
   b. 112 damas aproximadamente.
   c. Aproximadamente 0,5.

4. a. 50 %
   b. 84,13 %
   c. 97,72 %
   d. 84,13 %

5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-2)^2}{2}}$

Actividades

1. a. 0
   b. 0,22
   c. 0,7076
   d. –1,35
   e. 0,9498
   f. 1,41

2. a. 0,9099
   b. 0,9099
   c. 0,0322
   d. 0,1587
   e. 0,0224
   f. 0

3. a. 1 y 0
   b. 0,1587
   c. 0,7157
   d. 0

4. a. Verdadera.
   b. Falsa, porque $P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1)$.
   c. Verdadera.
   d. Falsa, porque corresponden a la misma área bajo la curva.

5. a. 0 milímetros, porque el promedio equivale a la media de la distribución.
   b. 0,1330
   c. 0,6093

Páginas 294 a 297

Repaso

1. Pregunta abierta.
2. Es el valor de x, donde la función alcanza el máximo.

Actividades

1. a. $z = \frac{x-1}{1}$
   b. $z = \frac{x-1}{2}$
   c. $z = \frac{x-0}{2}$
   d. $z = \frac{x-2}{2}$
   e. $z = \frac{x+6}{8}$
   f. $z = \frac{x+3}{5}$

2. a. 0,7475
   b. 0,3821
   c. 0,4602
   d. 0,8643
   e. 0,2873
   f. 0,2464

3. a. 0
   b. 0
   c. –1,6449
   d. 3,5631
   e. 1
   f. 4,2897

4. a. 0,5523
   b. 0,5262
   c. 0,0349
   d. 0,1218

5. $u = a$; $\sigma^2 = b^2$; $\sigma = b$.

6. $a = \frac{1}{6}$, $b = -\frac{1}{6}$

7. a. Son iguales.
   b. La segunda probabilidad es mayor.

Actividades

1. a. 0
   b. 0,4121
   c. 0,5879

2. a. 0,2459
   b. 0,1175
   c. 0,6826

3. 0,0304

Páginas 300 a 303

Repaso

1. La distribucion binomial es una distribución de probabilidad discreta que se utiliza cuando se cuentan el número de éxitos obtenidos al repetir n veces un experimento que tiene solo dos resultados mutuamente excluyentes. A uno de estos resultados se le conoce como éxito y al otro como fracaso.

2. $\mu = 3$ y $\sigma^2 = 1{,}5$

Actividades

1. a. No
   b. Sí
   c. No
   d. No
   e. No
   f. Sí

2. a. 1
   b. 0,8159
   c. 0,9115
   d. 0,9475
   e. 1
   f. 0,0512

3. a. 0,96712
   b. 0,0743
   c. 0,0268
   d. Es poco probable. Si X es una variable aleatoria que representa el número de veces que al lanzar un dado, en 60 repeticiones, muestra el valor 5, entonces $X \sim B$ (60, 1/6) lo que implica que, en promedio, en 60 lanzamientos se debieran haber observado 10 veces el número 5.

4. a. 0,0918
   b. 0,0159
   c. 1

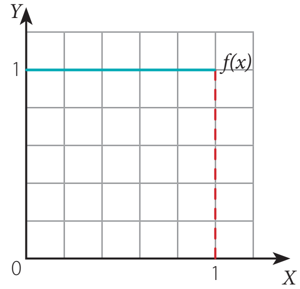
5. 0 y 0,8694, respectivamente.

Páginas 306 a 309

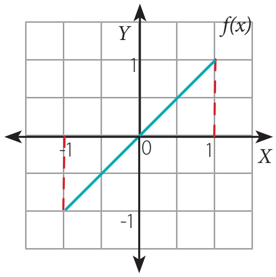
Practico

1. Pregunta abierta. Por ejemplo, variables aleatorias continuas: tiempo que toma llegar de la casa al colegio, largo del cabello de las compañeras, distancia desde casa al cine más cercano. Variables aleatorias discretas: número de lápices que hay en el estuche de los compañeros, cantidad de libros que hay en las casas de los alumnos de cuarto medio, número de veces que aparece la letra "e" en los libros de la biblioteca del colegio.

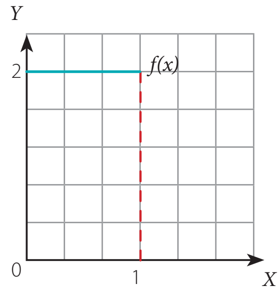
2. a. Sí es una función densidad, es siempre positiva y el área bajo la curva es igual que 1.



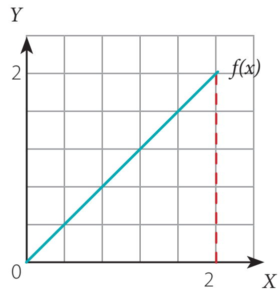
   b. No es una función densidad ya que en el intervalo [–1 , 0[la función toma valores negativos.



   c. No es función densidad pues el área bajo la curva es mayor que 1.



   d. No es función densidad pues el área bajo la curva es mayor que 1.



3. Una función de densidad es una función siempre positiva en su recorrido y cuya área bajo la curva es igual que 1.

4. a. 0,6772
   b. 0,2177
   c. 0,9015
   d. 0,0146
   e. 0,0593
   f. 0,14278

5. a. $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-7)^2}{8}}$
   b. $z = \frac{x-7}{2}$
   c. $P(X < 6{,}3) = 0{,}3632$
      $P(X < 7{,}9) = 0{,}6736$
      $P(X > 8{,}5) = 0{,}2267$
   d. 0,99977

6. Para que una variable aleatoria Binomial con n número de repeticiones y p probabilidad de éxito se pueda aproximar a una variable aleatoria Normal se debe cumplir que $np > 5$ y $n(1-p) > 5$. La media en ese caso será np y la desviación estándar $\sqrt{np(1-p)}$.

7. a. 0,89065
   b. 0,8907
   c. 0,0891
   d. 0,0179
   e. 0,6570
   f. 0

8. a. 0
   b. 0
   c. 0,2585
   d. 0,2585
   e. −0,2585
   f. −0,2585

9. $\frac{1}{3}$

10. Una variable aleatoria continua tiene distribución normal estándar si su media es 0 y su desviación estándar es 1. En caso contrario, es decir que su media sea distinta de 0 y su desviación estándar sea distinta de 1, diremos que no es normal estándar.

11. Pregunta abierta.

12. Pregunta abierta.

13. Pregunta abierta.

14. a. Falso, porque la función debe ser no negativa y el área bajo la curva debe ser 1.
    b. Verdadero.
    c. Falso, en algunos casos podemos aproximar la binomial por la normal.
    d. Falso, es una variable aleatoria con media 0 y varianza 1.

15. Pregunta abierta.

16. Por que el área bajo la función densidad en un punto es 0.

17. La media, μ, es el eje de simetría. Esto significa que para cualquier valor a,
    $P(X > \mu + a) = P(X < \mu - a)$.

18. $\frac{1}{9}$

19. a. 0,734
    b. 0,468
    c. 0,1056
    d. 0,6010

20. a. 0,3829
    b. 0,1336
    c. 0,5467
    d. 0,0455

21. a. 0,7628
    b. 179 días, aproximadamente.
    c. 55 días, aproximadamente.
    d. 0,2354

22. a. 0,4338
    b. 252 y 148, respectivamente.
    c. 125

23. A

24. C

25. B

26. D

27. C

28. C

29. D

30. B

31. D

32. C

33. D

34. C

35. A

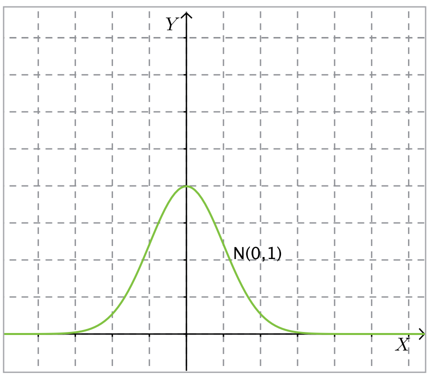
36. C

Páginas 310 y 311

Evaluación de proceso

1. a. Continua.
   b. Discreta.
   c. Continua.
   d. Continua.
   e. Discreta.

2. a. 0,7823
   b. 0,4721
   c. 0,1894
   d. 0,8907

3. 

4. 1,2816

5. a. Son aproximadamente iguales.
   b. Será como una campana de Gauss, con eje de simetría en $x = 1{,}65$.
   c. 0
   d. 0,4719

6. a. Distribución binomial $B(3; 0{,}5)$ que puede tomar valores {0, 1, 2, 3}.
   b. No, porque no se cumple que $np > 5$ ni que $n(1-p) > 5$.

7. a. 0,96562
   b. 0,0159
   c. 0,0004
   d. 0,4668
   e. 0,4777

8. No, porque se debe cumplir que $np > 5$ y que $n(1-p) > 5$ para que sea una buena aproximación.

9. a. 0,0017
   b. 0,1379
   c. 0,1379

10. a. 0,1057
    b. 0,7967
    c. 0,9625

11. E

12. B

13. E

14. E

15. B

16. A

17. A

18. D

Páginas 312 y 313

Para reforzar

1. a. $\Omega = \{(c, c), (c, s), (s, c), (s, s)\}$
   b. X es la cantidad de sellos que aparecen en dos lanzamientos.
   c. $X = \{0, 1, 2\}$
   d. Discreta.
   e. $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}$ y $\frac{1}{4}$

2. 0,5 y 0,8413.

3. De X: μ y σ, respectivamente. De Y: 0 y 1, respectivamente.

4. a. $\frac{1}{4}$
   b. 0,25
   c. 0, porque es el valor central y todos los valores de X tienen la misma probabilidad.

5. En ambos casos es 0,0568.

6. a. No, porque no se cumple que $np > 5$ ni que $n(1 - p) > 5$.
   b. No, porque no se cumple que $np > 5$ ni que $n(1 - p) > 5$.
   c. Sí, porque se cumple que $np > 5$ y que $n(1 - p) > 5$.
   d. Sí, porque se cumple que $np > 5$ y que $n(1 - p) > 5$.
   e. No, porque no se cumple que $n(1 - p) > 5$.
   f. Sí, porque se cumple que $np > 5$ y que $n(1 - p) > 5$.

7. a. 22,5 y 12,375.
   b. Sí, porque se cumple que $np > 5$ y que $n(1 - p) > 5$.
   c. 0,2389

8. 195,89 gr.

9. a. 0 %
   b. 100 %

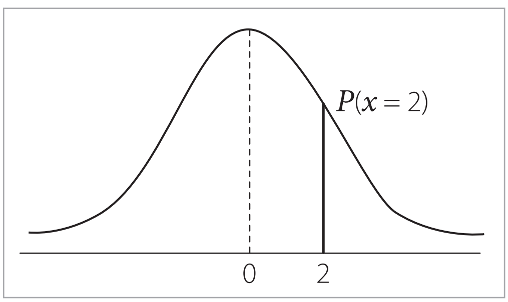
10. Pregunta abierta.

11. $a = 2$

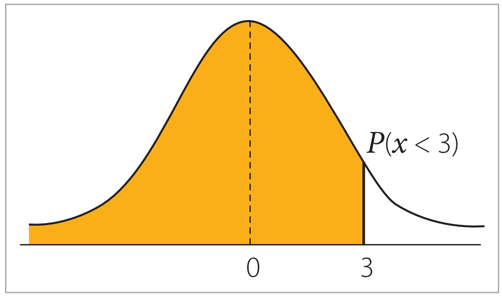
12. Pregunta abierta.

13. a. X
    b. X
    c. Z
    d. X

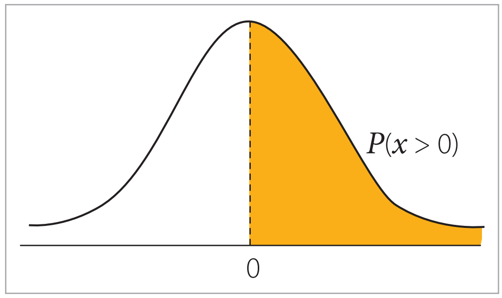
14. a.



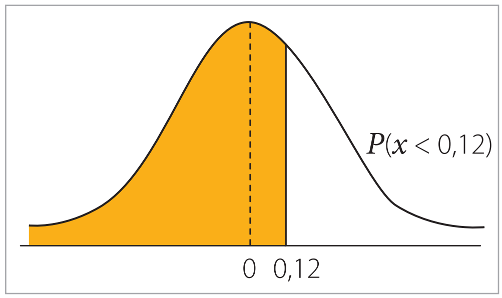
b.



c.



d.



15. a. 0,5319
    b. 0,4681
    c. 0,2616
    d. 0,9842
    e. 0,0031
    f. 0,1062

16. a. En el 4º A son más dispersos, porque la desviación estándar es mayor.
    b. Es menos probable que ocurra en el 4º A ya que en este curso la $P(x > 6) = 0,0912$, mientras que en el 4º B, $P(x > 6) = 0,2266$.

17. 0,9708

Páginas 314 a 319

Repaso

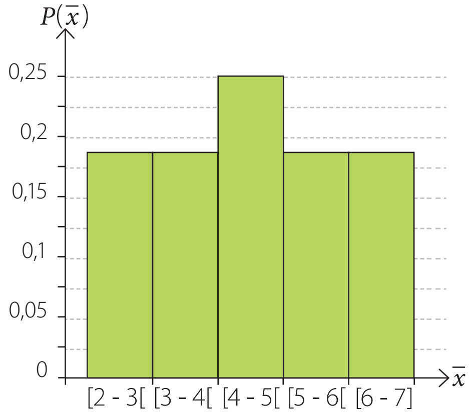
1. Con reposición: {(2, 2), (2, 5), (2, 8) ,(5, 2), (5, 5), (5, 8) (8, 2), (8, 5), (8, 8)}

2. Sin reposición: {(2, 5), (2, 8) ,(5, 2), (5, 8) (8, 2), (8, 5)}

Actividades

1. a. 16

   b.



   c. En ambos casos es 4,25.

2. a. $\mu_x = 0$; $\sigma = 0,33$

   b. $\mu_x = 45$; $\sigma = 2$

   c. $\mu_x = 1,5$; $\sigma = 0,1$

   d. $\mu_x = 120$; $\sigma = 0,17$

   e. $\mu_x = 120$; $\sigma = 0,2$

   f. $\mu_x = 120$; $\sigma = 0,13$

3. Tienda a la media de la población.

Páginas 320 a 323

Repaso

1. Pregunta abierta

2. Pregunta abierta

Actividades

1. a. [31,31; 43,69]

   b. Disminuye, ya que el denomidador aumenta.

   c. Aumenta, ya que se multiplica por un número mayor.

2. a. [7,45; 8,25]

   b. [36,76; 37,44]

   c. [93,13; 100,87]

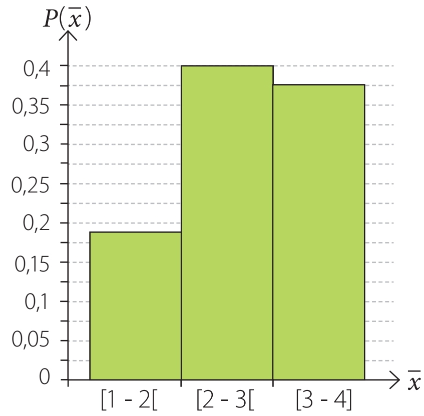
Páginas 324 a 327

Practico

1. a. 4

   b. 16

   c.



   d. 2,5

2. Pregunta abierta.

3. a. 3,01 y 0,3.

   b. 3,01 y 0,06

   c. Distribución normal, porque la distribución de la medias de una muestra extraída de una población normal es siempre normal.

   d. 0,4338

   e. 0,8998

4. Pregunta abierta.

5. Por teorema del límite central se tiene que la media muestral distribuye Normal, en este caso $\mu_x = 35$;y $\sigma = 0,5$.

6. a. $n = 3\,457$

   b. Aumenta a 5 990.

   c. Disminuye de 0,02 a 0,015.

7. a. $\mu = 2,5$; $\sigma = 1,25$

   b. {(1, 1), (1, 2), (1, 3) ,(1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3) ,(2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3) ,(3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3) ,(4, 4)}

   c. $\mu_x = 2,5$; $\sigma = 0,625$

8. a. [4,63 ; 6,19] La amplitud es de 1,56.

   b. Aproximadamente, 96 %.

   c. 4

9. a. [74 733,6; 89 186,4]

   b. 14 452,8. Es la diferencia entre la cota superior e inferior del intervalo.

10. a. Si aumenta el tamaño muestral, el error estándar disminuye

    b. Si aumenta el tamaño muestral, entonces la amplitud del intervalo disminuye.

c. Al mismo nivel de confianza la amplitud del intervalo aumenta, pues los datos están más dispersos.
d. Son proporcionales y la constante de proporcionalidad es $z_{\alpha/2}$.
e. Sí porque el teorema del límite central establece que la varianza de la muestra es σ^2/n, donde σ^2 es la varianza de la población.

11. a. [17,824; 20,176] de amplitud 2,352.

12. a. [4,56; 5,96] y [4,34; 6,18], respectivamente.
b. El de 95 % de confianza.
c. Margen de error a un 95 % de confianza es 0,7 y a un 99 % de confianza es 0,92.
d. 40 alumnos.
e. Suponiendo que el valor del promedio se mantiene, entonces la amplitud del intervalo disminuye.

13. E

14. E

15. A

16. B

17. A

18. C

19. B

20. D

21. C

22. C

23. D

24. A

25. B

26. A

27. D

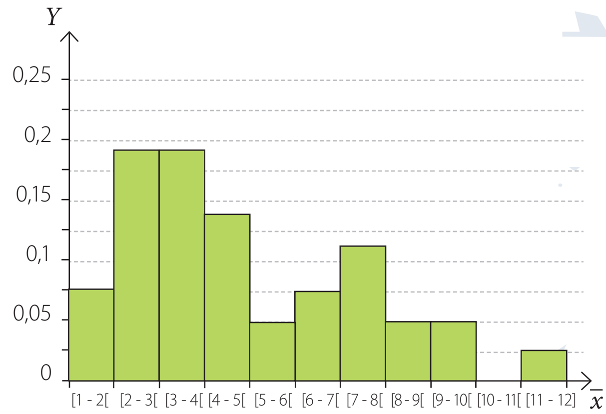
28. B

29. B

Páginas 328 y 329

Evaluación de proceso

1. a. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
b. 36
c.



d. El promedio de las medias muestrales es 4,7 y coincide con la media poblacional. Esto es lo que plantea el teorema del límite central.

2. a. 2,4
b. 50
c. 14
d. 3

3. a. Sí es posible, por ejemplo si se extrae una muestra donde todos los valores son mayores que 12.
b. Es poco probable, pues el teorema del límite central plantea que a medida que la muestra aumenta, la media muestral se acerca a la media poblacional.
c. Se acerca a la media poblacional.

4. Pregunta abierta.

5. a. Pregunta abierta.
b. Pregunta abierta.

6. a. $\mu_x = 1{,}67$; $\sigma = 0{,}035$
b. Por teorema del límite central se tiene que la media muestral distribuye $N(1{,}67; 0{,}035)$.
c. 0,8043
d. 0,8040

7. a. 48 y 5,37, respectivamente.
   b. 48 y 0,67, respectivamente.
   c. 0,0036
8. [482,04; 529,95]
9. a. 9 %
10. a. 0,29
    b. 15 alumnos.
11. 95 %
12. No, porque 40 no pertenece a [37,21; 38,78]
13. C
14. C
15. C

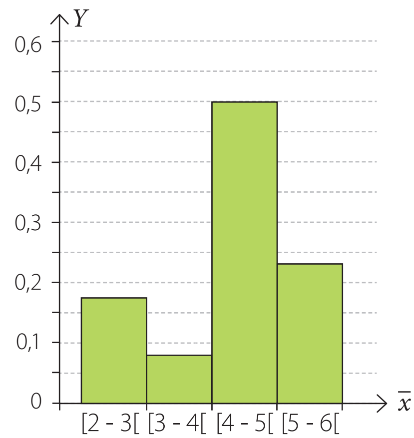
Páginas 330 y 331

Para reforzar

1. a. $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $\{x \in \mathbb{N}/2 \leq x \leq 7\}$.
   b.

2,75	5	4,75	4,75
3,75	4	4,75	2,75
4,5	5	5	4,25

   c. 4,75 y 5 se repiten 3 veces.
   d. La probabilidad es $\frac{1}{4}$, pues son 12 medias y el valor de la media 5 se repite 3 veces.
   e.



   f. 4,27 que es cercano a 4,5 que corresponde a la media poblacional.
   g. Se deben extraer todas las muestras de tamaño 4. Estas son 1 296.
2. a. 60 y 5,47.
   b. La media es 60 y la desviación estándar es 0,6838. Utilizando el teorema del límite central.
3. a. 0,7887
   b. 0,9772
4. La media de las distribuciones muestrales es 104 km/h y la desviación estándar es 1,25 km/h.
5. 0,0228
6. 0,3440
7. a. 1,176
   b. 1,392
   c. 0,656
8. Media muestral; 8,65. Tamaño de muestra, aproximadamente 1 586.
9. a. 80 %
   b. Aproximadamente 107 personas.
10. Sí, porque coincide exactamente con la cota superior del intervalo de confianza del 95 %.
11. a. 64
    b. [173,78; 176,23]

Página 332

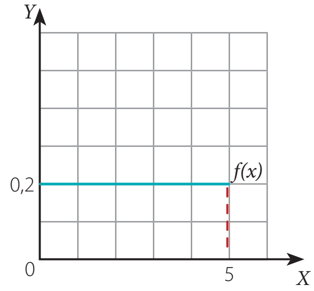
Síntesis

1. Sí, porque es una función siempre positiva en el intervalo [0, 2] y su área bajo la curva es igual que 1.
2. 0,3446
3. a. $\mu_{\bar{x}} = 40, \sigma = 4{,}47$
   b. 0,7102
4. a. 4,84
   b. 0,04
5. 95 %

Páginas 334 y 335

Evaluación final

1. a.



   b. Sí, porque es un función positiva en todo el intervalo [0, 5] y su área bajo la curva es igual que 1.

   c. 0

   d. 0,4

2. a. 0,89065

   b. 0,10935

   c. 0,0934

   d. 0,53586

   e. 0,0741

3. a. 0,9641

   b. 0,5793

   c. 0,2119

   d. 0,0228

   e. 0,0346

   f. 0,8384

4. 0

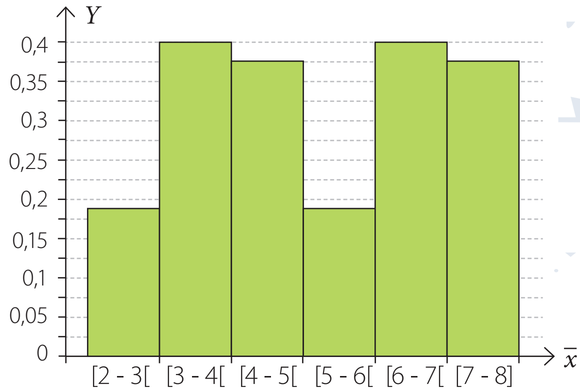
5. No, porque este valor no pertenece al intervalo de 95 % de confianza para la media. Este es [167,37; 168, 63]

6. a. {2, 4, 6, 8}

   b. $\mu_x = 5$, $\sigma = 2{,}58$

   c. 64

   d.



   e. $\mu_x = 5$; $\sigma = 1{,}2909$

7. 0,0793; 0,4438; 0,8984

8. 26,3 %

9. a. 9 604

   b. Aumenta 16 641.

   c. Disminuye y por tanto es más preciso, porque a mayor muestra menor es la desviación estándar de la media muestral.

10. A

11. D

12. D

13. C

14. B

Glosario

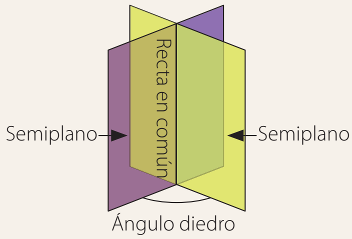
A

Abscisa: valor que se representa en el eje horizontal o eje X en el plano cartesiano.

Ángulo: región del plano encerrada por dos semirrectas con un origen en común.

Ángulos complementarios: dos ángulos cuyas medidas suman 90º.

Ángulo diedro: porción de espacio comprendido entre dos semiplanos que tienen una recta común y están situados en planos distintos.

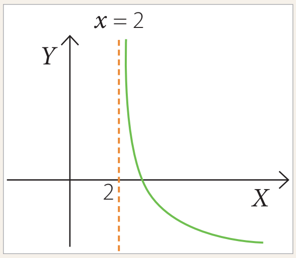


Ángulos opuestos por el vértice: ángulos que tienen un vértice común donde los lados de uno son la prolongación de los lados del otro.

Ángulos suplementarios: dos ángulos cuyas medidas suman 180°.

Área: medida asociada a una superficie.

Asíntota: recta a la cual se aproxima la curva de una función.

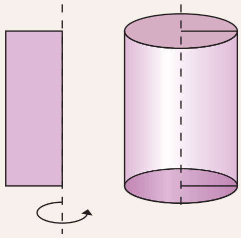


B

Bisectriz de un ángulo: rayo que parte del vértice y divide al ángulo en dos ángulos de igual medida.

C

Cilindro recto: cuerpo geométrico obtenido al rotar un rectángulo en torno a uno de sus lados,o bien, al trasladar un círculo.



Círculo: región o área del plano delimitada por una circunferencia.

Circunferencia: curva cerrada cuyos puntos están a igual distancia de un punto común llamado centro.

Clausura: propiedad de algunas operaciones definidas en conjuntos. Esta se refiere a que al realizar dicha operación con elementos de un conjunto su resultado se mantiene en el conjunto.

Codominio: conjunto de llegada de una función. Contiene al recorrido de la función.

Coeficiente: constante que multiplica la parte literal de un término algebraico.

Coeficiente de posición: es la constante n en la ecuación de la recta de la forma $y = mx + n$. Indica la ordenada del punto en que la recta interseca el eje Y.

Combinación: subconjunto de r elementos tomados de un conjunto de n objetos sin considerar el orden.

Composición de funciones: operación definida entre funciones como $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

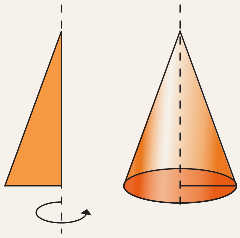
Congruencia de figuras planas: relaciona figuras en el plano que tienen la misma forma y tamaño, esto es, la longitud de sus lados y ángulos correspondientes es la misma.

Conjetura: afirmación que se plantea a partir de la observación de regularidades, con las cuales resulta evidente, pero que aún no ha sido demostrada.

Conjunto: colección de objetos.

Conjunto vacío: conjunto que no posee elementos.

Cono recto: cuerpo geométrico obtenido al rotar un triángulo rectángulo en torno a uno de sus catetos.



Cuadrado: cuadrilátero cuyos cuatro ángulos miden 90° y cuyos lados tienen la misma medida.

Cuadrilátero: región del plano limitada por cuatro segmentos, entre los cuales no hay tres colineales.

Cuadrado de binomio: es un binomio multiplicado por sí mismo, o sea, elevado a dos.

Cuartiles: valores que dividen un conjunto de datos ordenados en cuatro partes iguales.

Cuerpo generado por traslación: cuerpo geométrico que se puede obtener mediante la traslación de una figura plana respecto de un vector.

Cubo de binomio: es un binomio elevado a tres.

D

Datos: cantidades o medidas obtenidas de la observación, comparación y/o aplicación de encuestas.

Decil: valores que dividen un conjunto de datos ordenados en diez partes iguales.

Decimal finito: expresión decimal cuyas cifras decimales son finitas.

Decimal periódico: expresión decimal cuya parte decimal tiene una cifra o un grupo de cifras que se repite indefinidamente.

Demostración: secuencia lógica basada en definiciones, postulados o axiomas y teoremas que permite determinar nuevos resultados matemáticos.

Desigualdad: relación de comparación que se establece entre dos números con el fin de indicar cuál es mayor o cuál es menor.

Desviación estándar: expresa el grado de dispersión de los datos con respecto a su media aritmética.

Dirección de un vector: está asociada al ángulo que forma la recta que contiene al vector con el eje horizontal.

Distribución binomial: distribución de probabilidades de una variable aleatoria discreta que mide la cantidad de éxitos en una secuencia de n ensayos de Bernoulli independientes entre sí.

Distribución normal: describe las distribuciones de los datos relacionados con variables, como por ejemplo: el tamaño de algunas especies, variables sociales, etc.

Dominio: conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente de una función.

E

Ecuación: igualdad entre dos expresiones algebraicas en la cual aparecen incógnitas.

Ecuación vectorial de la recta: está determinada por un punto fijo $\vec{p_0}$ y un vector director $\vec{v}$. Su expresión vectorial es: $\vec{p} = \vec{p_0} + \lambda\vec{v}$

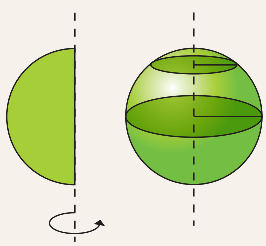
Ecuación vectorial del plano: está determinada por un punto fijo $\vec{p_0}$ y dos vectores directores $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Su expresión vectorial es: $\vec{p} = \vec{p_0} + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$.

Eje de simetría: recta que divide una figura en dos partes que coinciden exactamente.

Ensayo de Bernoulli: experimento aleatorio en el que solo existen dos posibles resultados, usualmente identificados como éxito o fracaso, donde la probabilidad de éxito es p y la de fracaso es $1 - p$.

Escalar: número que es multiplicado por un objeto matemático.

Esfera: cuerpo geométrico obtenido al rotar un semicírculo en torno a su diámetro.



Espacio muestral: conjunto formado por los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Esperanza matemática: valor promedio o esperado al que tienden los valores de la variable aleatoria, a medida que aumenta el número de repeticiones de un experimento.

Evento: subconjunto del espacio muestral.

Experimento aleatorio: experimento del cual no se puede prever el resultado.

Expresión algebraica: es un conjunto de uno o más términos algebraicos relacionados entre sí mediante operaciones de adición o sustracción.

Exponente: elemento de una potencia que indica cuántas veces se repite la base.

F

Factorial: se denota por !, se define para un número natural n como el producto de los números enteros positivos desde 1 hasta n. El factorial de 0 se define como 1.

Factorización de un número: expresión de un número como el producto de otros.

Factorización de un polinomio: descomposición de un polinomio como producto de expresiones algebraicas.

Frecuencia absoluta: número de veces que se repite un determinado valor en la variable estadística que se estudia.

Frecuencia acumulada: número de eventos ocurridos o de individuos que presentan una característica de la variable hasta el momento considerado.

Frecuencia relativa: cociente entre la frecuencia absoluta y el número de individuos de la población en un estudio estadístico.

Función: relación entre dos conjuntos llamados dominio y codominio, tal que a cada elemento del dominio le corresponde uno y solamente uno de los elementos del codominio.

Función afín: función de la forma $f(x) = mx + n$, donde m y n son constantes.

Función biyectiva: aquella que es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Función constante: aquella en la cual la variable dependiente toma siempre el mismo valor sin importar el valor que tome la variable independiente.

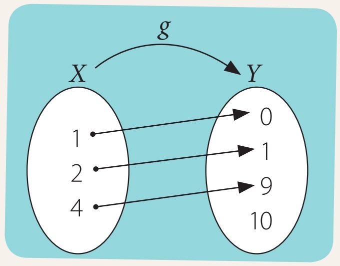
Función creciente: función cuyos valores aumentan a medida que los valores de su dominio crecen.

Función de densidad: corresponde a la función de distribución de probabilidades de una variable aleatoria continua.

Función decreciente: función cuyos valores disminuyen a medida que los de su dominio crecen.

Función exponencial: función de la forma $f(x) = a^x$. Su gráfica es una línea curva cuya orientación depende del valor de a, siendo $a > 0$ y distinto de 1.

Función inyectiva: función para la cual dos preimágenes distintas en su dominio tienen imágenes distintas en su recorrido.



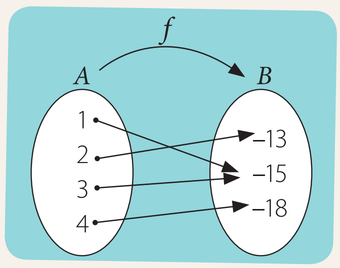
Función inversa: una función g es la inversa de una función dada f, si el recorrido de g es el dominio de f y para todo $x \in dom\, f$, $f(x) = b$ si y solo si $f^{-1}(b) = x = g(b)$.

Función lineal: función de la forma $y = mx$ donde m es constante.

Función logarítmica: función de la forma $f(x) = \log_a x$.

Función potencia: está dada por $f(x) = ax^n$, donde a y n son números reales distintos de cero.

Función sobreyectiva: aquella cuyo codominio y recorrido son iguales.



G

Generatriz: curva o figura plana cuya rotación alrededor de una recta fija genera un sólido de revolución.

Grado: unidad de medida de ángulos en el sistema sexagesimal que equivale a $\frac{1}{360}$ de revolución y se denota como 1°.

Grado absoluto de un monomio: corresponde a la suma de los exponentes de los factores de la parte literal del monomio.

Grado relativo de un monomio: corresponde al exponente de uno de los factores de la parte literal del monomio.

Gráfica de una función: dibujo en el plano cartesiano que indica la relación entre dos variables.

H

Hipótesis: en un teorema o proposición matemática es lo que se supone cierto y no se debe demostrar ya que corresponde a una definición, axioma o teorema ya demostrado.

I

Imagen de una función: son los elementos del recorrido de una función.

Incógnita: cada una de las variables que aparecen en una ecuación o inecuación, que son desconocidas.

Inecuación: desigualdad en la que intervienen una o más incógnitas.

Intersección: conjunto formado por los elementos comunes de dos o más conjuntos.

Intervalo: subconjunto de los números reales. Puede ser abierto, cerrado o semiabierto.

Intervalo de confianza: intervalo de valores que, con cierta probabilidad, contiene al parámetro que se está estimando

L

Longitud: magnitud física que expresa la distancia entre dos puntos

M

Magnitud de un vector: graficamente corresponde a la longitud del vector y se obtiene calculando su norma.

Media aritmética: promedio entre todos los datos de una distribución estadística. Se calcula sumando todos los datos y dividiendo este resultado entre el número total de datos.

Media muestral: corresponde al promedio de los datos que componen la muestra extraída de una población.

Mediana: valor que ocupa el lugar central entre todos los datos de una muestra ordenada de manera creciente o decreciente.

Medidas de posición: son números que dividen el conjunto de datos ordenados en partes iguales. Se usan para clasificar una observación dentro de una población o muestra.

Medidas de tendencia central: valores alrededor de los cuales tienden a concentrarse los datos de una distribución estadística.

Moda: valor que tiene la mayor frecuencia absoluta en una distribución estadística.

Módulo de un vector: es la longitud del segmento determinado por el vector.

Muestra: es un subconjunto de la población.

N

Nivel de confianza: probabilidad de que un parámetro poblacional se encuentre en un intervalo de confianza dado.

Números enteros: conjunto numérico que incluye a los números naturales, al cero y a los inversos aditivos de los números naturales.

Números racionales: conjunto formado por los números de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros y $b \neq 0$.

Número irracional: aquel que no se puede escribir como un cociente entre dos números enteros.

Números reales: conjunto que tiene todos los números racionales e irracionales. Se simboliza por medio de la letra $\mathbb{R}$.

O

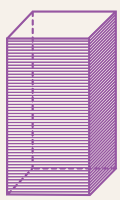
Ordenada: valor que se representa en el eje vertical (eje Y) en el plano cartesiano.

Origen: punto en el que se intersecan los ejes que conforman el plano cartesiano. Se representa con la coordenada (0, 0).

P

Par ordenado: en el plano cartesiano corresponde a una dupla formada por dos elementos, el primero indica la abscisa y el segundo la ordenada.

Paralelepípedo: cuerpo geométrico obtenido al trasladar un paralelógramo.



Pendiente de la recta: es la inclinación de una recta con respecto al eje X. Cuando la representación algebraica de la recta está en la forma $y = mx + n$, m corresponde a la pendiente.

Percentil: valores que dividen un conjunto de datos ordenados en 100 partes iguales.

Permutación: colocación de un conjunto de n objetos en un orden dado.

Período: en un número decimal infinito periódico o semiperiódico, está ubicado en la parte decimal y corresponde al patrón que se repite en forma infinita.

Plano cartesiano: es el plano euclidiano provisto de un sistema de coordenadas en el que se distinguen dos ejes perpendiculares (rectas numéricas) que determinan cada punto en el plano.

Plano euclideano: cualquier plano donde se cumplan los principios de Euclides.

Planos coincidentes: planos que tienen todos sus puntos en común.

Planos paralelos: planos que no tienen ningún punto en común.

Planos secantes: planos cuya intersección corresponde a una recta

Población: conjunto de individuos, objetos o fenómenos de los cuales se desea estudiar una o varias características.

Polígono: figura plana formada por una línea poligonal cerrada y su interior.

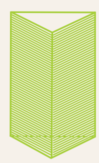
Polígono cóncavo: polígono que tiene un ángulo interior mayor que 180º.

Polígono convexo: polígono cuyos ángulos interiores son menores que 180º.

Polinomio: expresión algebraica que consta de uno o más términos algebraicos.

Principio de Cavalieri: dos cuerpos de la misma altura, con base de igual área y cuyas secciones paralelas a las bases son siempre de igual área tienen el mismo volumen.

Prisma: cuerpo geométrico obtenido al trasladar un polígono.



Probabilidad: posibilidad de que un suceso ocurra o no. Se asigna un valor entre 0 y 1.

Progresión aritmética: sucesión de números reales en la que cada número, excepto el primero, se obtiene del anterior sumándole una cantidad constante.

Progresión geométrica: sucesión de números reales en la que cada número, excepto el primero, se obtiene del anterior multiplicándole una cantidad constante.

Puntos coplanarios: puntos que están contenidos en el mismo plano.

R

Rango: en estadística, diferencia entre el dato mayor y el dato menor de una colección de datos.

Recorrido: conjunto formado por las imágenes obtenidas al establecer una función.

Recta numérica: recta donde se representa un determinado conjunto de números, de tal forma que a cada punto de la recta, le corresponde un único número.

Rectas paralelas: líneas rectas que tienen la misma pendiente y no se cortan en ningún punto.

Rectas perpendiculares: líneas rectas que forman cuatro ángulos rectos en el punto que se intersecan.

Rectas secantes: líneas rectas que se intersecan en un punto único.

Reflexión: transformación isométrica en el plano que consiste en reflejar una figura respecto de una recta llamada eje de reflexión.

Regla de Laplace: forma de calcular la probabilidad de un evento, realizando el cociente entre los casos favorables y los casos totales, en un experimento aleatorio.

Rotación: transformación isométrica en el plano que consiste en girar una figura alrededor de un punto determinado. Para rotar una figura se debe tener en cuenta el ángulo de rotación.

S

Sentido de un vector: está determinado por la punta de flecha del vector y corresponde a las orientaciones opuestas de una misma dirección.

Sistema de inecuaciones lineales: conjunto de dos o más inecuaciones lineales.

Sólido de revolución: sólido que se obtiene al hacer girar una región del plano o una curva en torno a un eje.

T

Teorema: proposición matemática que está demostrada.

Teorema del límite central: teorema que relaciona la distribución de medias muestrales con la distribución normal, a medida que el tamaño de la muestra aumenta.

Tesis: en un teorema o proposición matemática es lo que se debe demostrar a partir de las hipótesis.

Transformación isométrica: transformación de una figura en el plano, sin cambiar las medidas de sus ángulos, ni de sus lados.

Traslación: transformación isométrica en el plano que consiste en desplazar una figura especificando la magnitud, dirección y sentido del desplazamiento. De esta manera, la traslación está asociada a un vector.

U

Unión: conjunto formado por los elementos que pertenecen a uno u otro conjunto.

V

Variable aleatoria: función en la que a cada suceso elemental de un experimento aleatorio le corresponde un único valor numérico.

Variable aleatoria continua: puede tomar cualquier valor numérico en un intervalo o conjunto de intervalos

Variable aleatoria discreta: puede tomar una cantidad finita de valores, o una cantidad infinita numerable.

Variable dependiente: variable cuyo valor depende de los valores que se asignen a la variable independiente.

Variable independiente: variable a la cual se le asignan valores arbitrarios en una función.

Vector: segmento caracterizado por tener magnitud, dirección y sentido.

Volumen: medida del espacio que ocupa un cuerpo.

Índice temático

Bibliografía

Textos

- Johnson, R., Kuby, P. (2008). *Estadística elemental: Lo esencial* (10th ed). México: Cengage Learning Editores S.A.
- Ministerio de Educación (2009). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media, Actualización 2009*. Chile.
- Joaquín de Armas, R., Ramírez, M., Lucía, M., Romero, J., Gamboa, J., Celi, V., Chappe, A., Morales, D., Salazar, F. (2013). *Los caminos del saber. Matemáticas 9*. Colombia. Editorial Santillana S.A.
- Buitrago, L., Perdomo, A., Morales, D., Benavides, O., Castaño, J., Gamboa, J. (2013). *Los caminos del saber. Matemáticas 11*. Colombia. Editorial Santillana S.A.
- Chávez, H., Castañeda, N., Gómez, M., Joya, A., Chizner, J., Gómez, M. (2010) *Hipertexto Matemáticas 9*. Colombia. Editorial Santillana S.A.
- Morales, M., Rodríguez, V., Gómez, W., Joya, A., Gómez, M. (2010) *Hipertexto Matemáticas 11*. Colombia. Editorial Santillana S.A.
- Álvarez, M. D., Hernández, J., Miranda, A. Y., Moreno, M. R., Parra, S., Redondo, M., Redondo, R., Sánchez, M. T., Santos, T., Serrano, E. (2009) *Matemáticas 3*. Santillana Educación, S. L.
- Escoredo, A., Gómez, M. Lorenzo, J., Machín, P., Pérez, C., Rey, M. J., del Río, J., Sánchez, D. (2009) *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*. España. Santillana Educación, S. L.

Sitios web

- Calculadora de Índice de Masa Corporal (IMC). Recuperado de http://www.eligevivirsano.cl/mueve-tu-cuerpo/indice-masa-corporal/
- Censo 2012. Recuperado de http://www.censo.cl/
- Consejo nacional de energía. Recuperado de http://www.cne.cl/
- GeoGebra. (versión 4.2.27.0) [software] Recuperado de http://www.geogebra.org/cms/es/download/
- Instituto nacional de estadisticas. Recuperado de http://www.ine.cl
- International association of athletics federations. High jump. Recuperado de http://www.iaaf.org/records/by-discipline/jumps/high-jump/outdoor/women
- International association of athletics federations. High jump. Recuperado de http://www.iaaf.org/records/by-discipline/jumps/high-jump/outdoor/men
- M. C. Escher, the official website. Recuperado de http://www.mcescher.com/
- National council of teachers of mathematics. Components of a Vector. Recuperado de http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=26778
- National council of teachers of mathematics. Sums of Vectors and their Properties. Recuperado de http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=26779
- Official London 2012 website. Recuperado de http://www.london2012.com/

Bibliografía sugerida

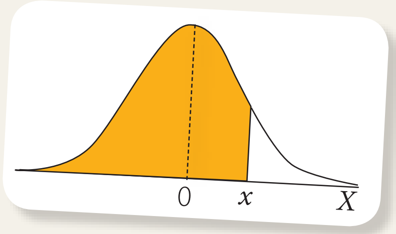
Textos

- Ministerio de Educación (2011). *Matemática, Programa de estudio para Primer Año Medio*. Chile
- Ministerio de Educación (2009). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media, Actualización 2009*. Chile.
- Abdón Montenegro, Ignacio (1999). *Evaluemos competencias matemáticas*, Bogotá: Magisterio.
- Alvarenga, B., Máximo, A (1983). *Física general con experimentos sencillos*, México: Harla, S. A.
- Álvarez, F. Fractal 3, Matemáticas.
- Bagni, G, Bruno (2007). *Leonardo y la matemática*. Bogotá: Magisterio.
- Baldor, A (1998). *Geometría plana y del espacio y trigonometría*. México: Publicaciones cultural.
- Barnett, R (1970). *Serie de comprendidos Schaum. Teoría y problemas de geometría plana con coordenadas*. México: McGraw Hill.
- Bol, B. (1992). *Matemáquinas, la matemática que hay en la tecnología*. Barcelona: Labor.
- Bueche, F. (1988). *Fundamentos de física I*. México: McGraw Hill Latinoamérica S. A.
- Castro, E., Rico, L., Castro, E. (1996). *Matemáticas: cultura y aprendizaje 2*. España: Síntesis.
- Centeno Pérez, Julia (1997). *Matemáticas: cultura y aprendizaje 5*. España: Síntesis.
- Clements, et ál (1998). *Serie awli. Geometría.* México: Addison Wesley, Pearson educación.
- Del Olmo Romero, M., Moreno Carretero, M., Gik Cuadra, F (1993). *Matemáticas: cultura y aprendizaje 19.* España: Síntesis.
- Díaz Rodino, J., Batanero Bernabéu, M., Cañizares Castellanos, M (1996). *Matemáticas: cultura y aprendizaje 27.* España: Síntesis.
- Fiol Mora, M., Fortuna Aymemí, J (1990). *Matemáticas: cultura y aprendizaje 20*. España: Síntesis.
- González, J., Iriarte, M., Jimeno, M., Ortiz, A., Sanz, E., Vargas Machuca, I (1990). *Matemáticas: cultura y aprendizaje 6*. España: Síntesis.
- Guillén Soler, G (1997). *Matemáticas: cultura y aprendizaje 15*. España: Síntesis.
- Mason, J., Burton, L., Stacey, K (1992). *Pensar matemáticamente*. Madrid: MEC/Labor.
- Microsoft Corporation. *Biblioteca de consulta Microsoft Encarta 2005*.
- Moise, E., Downs, F. (1966). *Geometría moderna*. Estados Unidos: Addison Wesley publishing company.
- Nuñez, J., Pérez, G. (2007). *La Estatura como Estándar de Bienestar: Evidencia para Chile*. Santiago, Chile: Universidad de Chile.
- Paul, G. Hewitt (1999). *Física conceptual*. México: Pearson Educación.
- Pappas, T (1996). *El encanto de las matemáticas. Los secretos ocultos del arte*. España.
- Pappas, T (1999). *El encanto de las matemáticas. El orden oculto tras la naturaleza y su arte*. España.
- Polya, G (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Sestier, A (1983). *Historia de las matemáticas*. México: Limusa.
- Stephen, F. M. (2001). *Historia de la ciencia*. Madrid: Alianza Editorial.

Sitios web

- Centro Comenius. http://www.comenius.usach.cl
- Educar Chile. www.educarchile.cl
- GeoGebra. (versión 4.2.27.0) [software] Recuperado de http://www.geogebra.org/cms/es/download/
- National council of teachers of mathematics. Components of a Vector. Recuperado de http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=26778
- National council of teachers of mathematics. Sums of Vectors and their Properties. Recuperado de http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=26779
- El Paraíso de las Matemáticas http://www.matematicas.net
- Sociedad de Matemática de Chile http://www.somachi.cl
- Recursos matemáticos Redemat http://www.recursosmatematicos.com/redemat.html
- Recursos matemáticos Eduteka http://www.eduteka.org
- Recursos educativos digitales. www.catalogored.cl/recursos-educativos-digitales
- Sector Matemática. www.sectormatematica.cl
- Software Graphmatica. www8.pair.com/ksoft/
- Software Regla y Compás. http://db-maths.nuxit.net/CaRMetal/index_es.html

ANEXO 1



La siguiente tabla permite calcular $P(Z < x)$, para una variable aleatoria continua X con distribución normal estándar $N(0, 1)$.

x	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91308	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,983	0,97882	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2	0,9861	0,98645	0,98679	0,97882	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,97882	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,9918	0,99202	0,99224	0,97882	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,97882	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6	0,99534	0,99547	0,9956	0,97882	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,97882	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,9976	0,97882	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,97882	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3	0,99865	0,99869	0,99874	0,97882	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,999
3,1	0,99903	0,99906	0,9991	0,97882	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,97882	0,9994	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,9995
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,97882	0,99958	0,9996	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,97882	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,97882	0,9998	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,97882	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,9999	0,9999	0,97882	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,97882	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,97882	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4	0,99997	0,99997	0,99997	0,97882	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Ministerio de
Educación

Gobierno de Chile

Edición Especial para el Ministerio de Educación
Prohibida su comercialización

SANTILLANA

9 789561 523111