Matemática

Funciones y
Procesos Infinitos

Programa de Estudio
Cuarto Año Medio

Formación Diferenciada
Humanístico-Científica

GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACION

Presentación

El programa de estudio para la Formación Diferenciada en Matemática para Cuarto Año de Educación Media, se orienta a la profundización en algunos temas y a la apertura a nuevos conceptos, siempre en el marco ya definido para la Formación General como un proceso de construcción y adquisición de habilidades intelectuales, en especial las relativas a procesos de abstracción y generalización, formulación de conjeturas, proposición de encadenamientos argumentativos y la utilización y análisis de modelos que permitan describir y predecir el comportamiento de algunos fenómenos en diversos contextos.

En este programa de estudio se propone como primera unidad un estudio centrado en procesos infinitos, en el que se perfila el concepto de iteraciones sucesivas dando cabida a los fractales, tema que se ha desarrollado en el siglo XX, junto con otros temas ya tradicionales de la matemática como progresiones aritméticas y geométricas, y series. Interesa que los alumnos y alumnas continúen el desarrollo de sus capacidades de abstracción; que tengan claras distinciones sobre los casos particulares y las generalizaciones y que lleguen a utilizar algunas técnicas de demostración.

La segunda unidad se organiza en torno a las funciones polinomiales; durante los años anteriores, los alumnos y alumnas han tenido contacto con funciones de este tipo; ahora es el momento de generalizar y estudiarlas como un concepto en sí, relacionándolas con propiedades de sistemas numéricos conocidos pero no estudiados desde su estructuración algebraica; sin colocar en el primer plano la estructura de anillo de los números enteros, se busca perfilar las propiedades algebraicas presentes tanto en los números enteros como en los polinomios definidos en dicho conjunto.

El eje temático de la tercera unidad lo constituye el estudio de las funciones trigonométricas; en tercer año, a propósito de la semejanza de triángulos rectángulos, se definieron las funciones trigonométricas seno y coseno; en este programa se plantea la ampliación al estudio de las otras funciones trigonométricas y la profundización en el análisis de los gráficos correspondientes, el estudio de sus propiedades y las aplicaciones en la resolución de problemas.

Para el mejor desarrollo de esta unidad, es conveniente la utilización de un programa computacional como el Graphmatica que se puede bajar gratuitamente desde internet en la dirección: www. graphmatica.com en su versión en español, u otros disponibles en los respectivos establecimientos educacionales; también resultarán útiles las calculadoras gráficas.

Organización del programa

Este programa se organiza en torno a tres unidades:

Unidad 1: Procesos infinitos

Unidad 2: Funciones polinomiales

Unidad 3: Funciones trigonométricas

Las coordinaciones con el programa de Formación General son importantes y necesarias para que los estudiantes puedan tener, durante el año, una secuencia coherente de los temas en estudio.

La primera unidad, centrada en procesos infinitos, propone el desarrollo de procesos de iteración lo que da cabida natural al conocimiento y estudio inicial de los fractales, tema que se ha desarrollado principalmente en la segunda mitad del siglo XX. Además, el estudio de progresiones aritméticas, geométricas y algunas series, permite profundizar en la utilización y el sentido del lenguaje matemático.

El tema de las funciones es central en la organización del programa de estudio para los cuatro años de Educación Media; la segunda unidad de este programa propone, en paralelo con el trabajo de las funciones potencia, exponencial y logarítmica en la formación común, el estudio de las funciones polinomiales. Continuando con las funciones, se plantea el estudio de las funciones trigonométricas en la tercera unidad.

Organización interna de cada unidad

Cada unidad, en forma similar a todos los programas de matemática para la Educación Media, se estructura considerando los siguientes puntos:

- Contenidos
- Aprendizajes esperados
- Orientaciones didácticas
- Actividades para el aprendizaje complementadas con ejemplos
- Actividades para la evaluación y ejemplos

A continuación se plantea una breve descripción de cada uno de estos elementos.

Contenidos

Los contenidos corresponden a los señalados en el marco curricular. Con el propósito de enfatizar y/o clarificar algunos de ellos se han desglosado en contenidos más específicos.

Aprendizajes esperados

Expresan las capacidades y competencias que se busca que los alumnos y alumnas logren, considerando los contenidos de cada unidad y los objetivos fundamentales para la formación diferenciada específica. Su número es variable por unidad.

Los aprendizajes esperados orientan el proceso pedagógico y dan una dirección al proceso de aprendizaje. En consecuencia son determinantes para definir los criterios de evaluación.

Orientaciones didácticas

En este punto se precisan los focos de la unidad; se incorporan comentarios pedagógicos relativos al aprendizaje del tema y sus relaciones intramatemáticas.

Actividades para el aprendizaje y ejemplos

Las actividades explicitan acciones y procesos que importa e interesa que vivan los alumnos y las alumnas para el logro de los aprendizajes esperados. No existe una correspondencia biunívoca entre los aprendizajes esperados y las actividades; una actividad puede estar al servicio de varios aprendizajes esperados; además, la dinámica que se dé en el desarrollo de la clase puede favorecer más a unos que a otros.

Para la realización de cada actividad se sugieren ejemplos que pueden ser implementados tal cual se propone en el programa, adaptados a la realidad escolar o sustituidos por otros que se consideren más pertinentes.

Al hacer estas adecuaciones locales hay que procurar el desarrollo de las habilidades de pensamiento que el programa promueve.

Para numerosas actividades, los ejemplos seleccionados se ordenan según nivel de dificultad; todos los ejemplos se complementan con comentarios y sugerencias pedagógicas.

Actividades para la evaluación y ejemplos

La evaluación se considera parte del proceso de aprendizaje. Debe proveer al joven y al docente de la retroalimentación necesaria como referente para continuar, corregir y orientar las actividades futuras.

Es recomendable que se evalúen diversos aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje, y no sólo los resultados de los diversos ejercicios. Cobra relevancia en esta propuesta observar y evaluar el tipo de razonamiento utilizado, el método empleado, la originalidad de la o las ideas planteadas. Al término de cada unidad se incluye un conjunto de preguntas, propuestas de trabajo y problemas, utilizables como parte de una evaluación de término de la unidad. La evaluación, en consonancia con el proceso de aprendizaje, aporta a un proceso de integración y relación entre los conceptos.

Los siguientes criterios orientan el proceso de evaluación:

- **Resolución de problemas que involucren relaciones matemáticas**
  Reconocer la o las incógnitas e interpretar las preguntas; diseñar una estrategia o plan de trabajo con los datos; establecer relaciones matemáticas entre datos, variables, incógnitas; traducirlas, representar y/o expresar en un lenguaje y simbología comprensible y adecuada; seleccionar y aplicar procedimientos; explicitar la respuesta al problema y analizar su pertinencia.
- **Desarrollo de habilidades de razonamiento matemático**
  Conjeturar, relacionar, establecer conclusiones; organizar y encadenar argumentos matemáticos; demostrar propiedades; reconocer regularidades numéricas, algebraicas, geométricas.
- **Organización y estructuración de conceptos matemáticos**
  Reconocer la noción o el concepto involucrado; reconocer equivalentes y establecer relaciones con otras nociones o conceptos; generalizar, particularizar.
- **Comprensión y aplicación de procedimientos rutinarios**
  Seleccionar y utilizar reglas, algoritmos, fórmulas y/o formas para realizar cálculos o transformar relaciones matemáticas en otras más sencillas o más convenientes de acuerdo al contexto.

Interesa además considerar que el aprendizaje de matemática contribuye al desarrollo de habilidades en el ámbito de la comunicación: analizar e interpretar cuadros, gráficos y fórmulas, traducir de un registro a otro, describir, explicar ideas y procedimientos, argumentar y relacionar situaciones de ámbitos diversos.

Finalmente, no está ajeno al aprendizaje de matemática el desarrollo de actitudes y disposiciones para el estudio y el trabajo: abordar problemas y desafíos; analizar errores; escuchar otros argumentos; expresar críticas fundamentadas.

Objetivos Fundamentales Transversales y su presencia en el programa

El programa de Formación Diferenciada de Matemática de Cuarto Año Medio, refuerza algunos OFT que tuvieron presencia y oportunidad de desarrollo en la Educación Media y adicionan otros propios de las nuevas unidades.

- Los OFT de ámbito crecimiento y autoafirmación personal referidos al interés y capacidad de conocer la realidad y utilizar el conocimiento y la información.
- Los OFT del ámbito desarrollo del pensamiento, en especial los relativos a habilidades de investigación, a través de las actividades que suponen selección y organización de información y datos, y las de resolución de problemas y de pensamiento lógico, a través del conjunto de contenidos y actividades orientados al aprendizaje de procesos de abstracción y generalización, formulación de conjeturas, proposición de encadenamientos argumentativos y la utilización y análisis de modelos que permitan describir y predecir el comportamiento de algunos fenómenos en diversos contextos. Desarrollo de habilidades en el ámbito de la comunicación: analizar e interpretar cuadros, gráficos y fórmulas, traducir de un registro a otro, registrar describir, explicar ideas, argumentos, relaciones o procedimientos.
- Los OFT del ámbito persona y su entorno referidos al estudio y al trabajo, y que plantean el desarrollo de actitudes de rigor y perseverancia, así como abordar problemas y desafíos; analizar errores; escuchar otros argumentos, analizarlos; expresar criticas fundamentadas.
- Además, el programa se hace cargo de los OFT de Informática incorporando en diversas actividades y tareas la búsqueda de información a través de redes de comunicación, empleo de software, y la selección de redes de comunicación.

Objetivos Fundamentales

Las alumnas y los alumnos desarrollarán la capacidad de:

1. Analizar, confrontar y construir estrategias personales para la resolución de problemas o desafíos que involucren funciones, relaciones entre geometría y progresiones.
2. Conocer y utilizar conceptos y lenguaje matemático asociados a modelación matemática y procesos infinitos.
3. Percibir la matemática como una construcción enraizada en la cultura, en evolución constante, con estrecha vinculación a la resolución de problemas propios o provenientes de las ciencias.

Unidades, contenidos y distribución temporal

Cuadro sinóptico

Unidades		
1	**2**	**3**
Procesos infinitos	Funciones polinomiales	Funciones trigonométricas
Contenidos		
a. Planteo de algunos problemas geométricos, de probabilidades o de matemáticas financieras que involucren la noción de sumatoria; introducción del símbolo sumatoria. Propiedades de linealidad, asociatividad y propiedad telescópica. Aplicación de éstas al cálculo de algunas sumas concretas, por ejemplo, de los primeros *n* números naturales, de sus cuadrados, de los números impares. b. Progresiones aritméticas y geométricas, suma de sus términos. Aplicación a la resolución de algunos problemas geométricos, de interés compuesto, de decaimiento radioactivo, de poblaciones. c. Series geométricas y telescópicas. Convergencia intuitiva de sucesiones y series. d. Iteraciones. Nociones acerca de fractales. Ejemplo de áreas finitas con perímetro infinito. e. Uso de programas computacionales para manipulación algebraica, gráfica y simulación de procesos.	a. Polinomios de una variable con coeficientes reales. Grado. Algoritmo de la división. Función polinomial asociada a un polinomio. Raíces o ceros de polinomios. Condición para que un polinomio sea divisible por x-a: Teorema del factor y Teorema del resto. b. Factorización de polinomios como producto de factores lineales y cuadráticos. Raíces racionales de polinomios con coeficientes enteros. Aplicación a la resolución de algunas ecuaciones de grado superior a 2. c. Notas históricas sobre las ecuaciones de 3º y 4º grado. Comentarios sobre las ecuaciones de grado superior o igual a cinco.	a. Medición de ángulos; radián. Funciones seno, coseno y tangente en el círculo unitario. Periodicidad. Demostración de las identidades fundamentales: $sen^2A + cos^2A = 1$; sen (A + B) y cos (A + B). b. Gráfico de las funciones seno, coseno y tangente. Valores de estas funciones para algunos ángulos; valores para los ángulos complementarios. Preimágenes para algunos valores de la función y resolución de ecuaciones trigonométricas sencillas. Uso de calculadora científica.
Distribución temporal		
Tiempo estimado: 30 a 35 horas	Tiempo estimado: 30 a 35 horas	Tiempo estimado: 30 a 35 horas

Unidad 1

Procesos infinitos

Contenidos

a) Planteo de algunos problemas geométricos, de probabilidades o de matemáticas financieras que involucren la noción de sumatoria; introducción del símbolo sumatoria. Propiedades de linealidad, asociatividad y propiedad telescópica. Aplicación de éstas al cálculo de algunas sumas concretas, por ejemplo, de los primeros n números naturales, de sus cuadrados, de los números impares.

b) Progresiones aritméticas y geométricas, suma de sus términos. Aplicación a la resolución de algunos problemas geométricos, de interés compuesto, de decaimiento radioactivo, de poblaciones.

c) Series geométricas y telescópicas. Convergencia intuitiva de sucesiones y series.

d) Iteraciones. Nociones acerca de fractales. Ejemplo de áreas finitas con perímetro infinito.

e) Uso de programas computacionales para manipulación algebraica, gráfica y simulación de procesos.

Aprendizajes esperados

Los alumnos y alumnas:

a) Analizan las transformaciones que producen diferentes tipos de iteraciones y establecen relaciones cuantitativas y cualitativas entre los objetos que se obtienen.

b) Reconocen que una suma se puede representar en forma compacta por medio de la notación de sumatoria. Conocen y aplican propiedades de ésta y calculan las sumas de algunas series geométricas y telescópicas.

c) Demuestran generalizaciones sencillas.

d) Conocen las progresiones aritméticas y geométricas; aplican algunas propiedades en la resolución de problemas.

Orientaciones didácticas

El estudio de la geometría fractal es parte hoy en día de la corriente principal del desarrollo de las ciencias, particularmente de la matemática. A pesar de que muchos de los conceptos y herramientas requeridas para su desarrollo son anteriores, la geometría fractal como tal data de 1975 cuando el matemático Benoit Mandelbrot observó que los fractales no son sólo curiosidades matemáticas sino que más bien modelan de mejor manera la geometría de la naturaleza. El notó que objetos tales como los contornos de las costas, las nubes, las hojas de los helechos y muchas otras "formas irregulares" podían ser entendidas de mejor manera usando geometría fractal en lugar de geometría euclideana. La geometría euclideana ha sido útil para el ser humano para construir edificios o viviendas en general, puentes, caminos, etc.; sin embargo, la naturaleza pareciera construir sus objetos de manera diferente. Por otra parte, el desarrollo de la tecnología, particularmente de los computadores, ha permitido efectivamente construir y ver figuras que antes era sólo posible imaginar.

En la primera actividad de esta unidad se introducen algunos conceptos básicos de iteración, fundamentalmente desde un punto de vista geométrico. Se utilizan, por una parte, para realizar conexiones con aspectos estudiados en años anteriores, y por otra, para analizar sucesiones geométricas invitando a los estudiantes a extender su imaginación a situaciones límite, vale decir, iteraciones sucesivas cuyo número "tienda" a infinito. Ello facilitará la comprensión de las nociones básicas de convergencia que se presentan en la actividad 3.

En la segunda actividad se estudia otro tipo de construcciones iterativas, más bien desde el punto de vista numérico, considerando particularmente las progresiones aritméticas y geométricas. En estos casos que pertenecen al acervo cultural clásico de la matemática, aquí se promueve el uso de demostraciones como culminación de la construcción de un proceso cognitivo de nivel superior.

En la tercera actividad se introduce el símbolo de la sumatoria (como una notación que resume la suma de una cantidad finita o infinita de números. Es importante que los alumnos y alumnas comprendan que en el caso de sumas finitas, éstas siempre pueden calcularse, aunque el número de términos sea grande. Sin embargo, cuando la cantidad de números que se pide sumar es infinita, puede suceder que dicha suma no pueda calcularse; dicho en términos matemáticos, la serie puede no converger. De allí la importancia que se da a los casos de las series geométricas y telescópicas, en las que es posible apoyarse fuertemente en la intuición para una mejor comprensión de la noción de convergencia, ya trabajada a nivel geométrico en la actividad 1.

Actividades para el aprendizaje y ejemplos

Actividad 1

Realizan procesos de iteración geométrica; analizan las posiciones relativas que toman las figuras y calculan las áreas y perímetros correspondientes.

Ejemplo A

Iteración por reducción

Reduzca un cuadrado utilizando la siguiente regla de iteración: reducir cada trazo de la figura de modo que, en la figura que continúa, el trazo correspondiente tenga una longitud igual a la mitad del anterior.

i) Analizar las variaciones de área y perímetro, en la sucesión de cuadrados que se obtiene, si el lado del cuadrado inicial mide 4 cm.

ii) Analizar las variaciones de área y perímetro, en la sucesión de cuadrados que se obtiene, si el lado del cuadrado inicial mide a cm.

iii) Si P(n) y A(n) representan respectivamente, el perímetro y el área de la n-ésima iteración, ¿cuánto vale P(10), A(10), P(100), A(100)?

INDICACIONES AL DOCENTE

Se sugiere que los alumnos y alumnas ordenen la información en tablas como la siguiente para visualizar las relaciones entre los resultados que obtienen.

Arista	Perímetro	Área
a	$4a$	a^2
$\frac{a}{2}$	$2a$	$a^{\frac{2}{4}}$
$\frac{a}{4}$	...	...

Es recomendable repetir este proceso de iteración por reducción con otras figuras como circunferencia, triángulo equilátero, por ejemplo.

Si es posible, utilizar un programa computacional de geometría, o bien el propio cuadriculado del cuaderno, tanto para dibujar la sucesión de figuras como para apoyar los cálculos iniciales.

Intuitivamente, se puede analizar qué sucede con el área y el perímetro de la n-ésima figura si *n* crece y tiende a infinito.

Ejemplo B

Iteración por rotación

Modifique la posición de una figura utilizando la siguiente regla de iteración: rotar una figura sucesivamente, en ángulos de 90° considerando el centro de la figura como centro de rotación.

i) Analizar las variaciones de posición de una máscara como esta, a la que se aplica esta iteración

☺

ii) ¿Qué posición tendrá esta máscara en la figura 46? ¿en la número 100?

iii) Si en lugar de una máscara, la figura fuera un cuadrado, ¿qué cambios se observarían?

iv) ¿Cuál será la posición de un rectángulo en una iteración impar si éste fuera sometido a esta rotación sucesiva?

v) Si la regla de iteración fuera rotar la figura en ángulos de 45° ¿cómo respondería las preguntas anteriores?

vi) Si la regla de iteración fuera rotar en 60° considerando el centro de la figura como centro de rotación, ¿cuál sería la posición de un triángulo equilátero en la iteración 42?

INDICACIONES AL DOCENTE

En forma similar al ejemplo anterior, se puede plantear intuitivamente la noción de límite; de acuerdo a las figuras consideradas en este ejemplo sólo hay límite en el caso de la rotación sucesiva del cuadrado en ángulos de 90°.

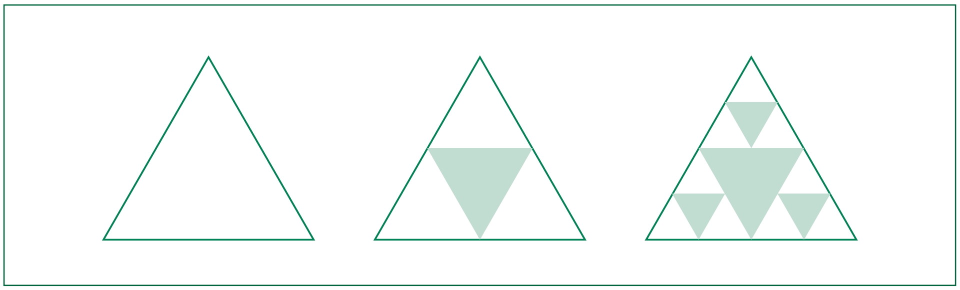
Ejemplo C

Iteración por remoción

Modifique un triángulo equilátero utilizando la siguiente regla de iteración: trazar los segmentos que unen los puntos medios de los lados; borrar o sacar el triángulo del medio del triángulo original de modo que:

- Los lados de los triángulos resultantes miden la mitad de la longitud de los lados del triángulo original.

- Permanecen tres triángulos congruentes entre sí.



i) Analizar las variaciones de área y perímetro, en la sucesión de triángulos que se obtiene, si el lado del triángulo inicial mide 10 cm.

ii) Analizar las variaciones de área y perímetro, en la sucesión de triángulos que se obtiene, si el lado del cuadrado inicial mide a cm.

iii) Si P(n) y A(n) representan el perímetro y el área de la n-ésima iteración, ¿cuánto vale P(4), A(4), P(8), A(8)?

Indicaciones al docente

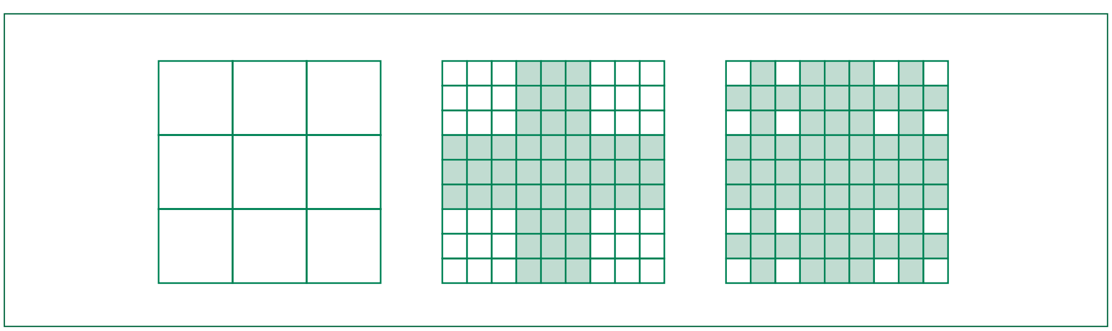
El fractal así construido se conoce con el nombre de Triángulo de Sierpinsky. Destacar el hecho que en la medida en que el perímetro de la figura crece, el área de la misma decrece. Más aún, es posible abrir conversaciones para que los estudiantes descubran que

$$A(n) \longrightarrow 0 \text{ si } n \longrightarrow \infty, \text{ en cambio } P(n) \longrightarrow \infty \text{ si } n \longrightarrow \infty$$

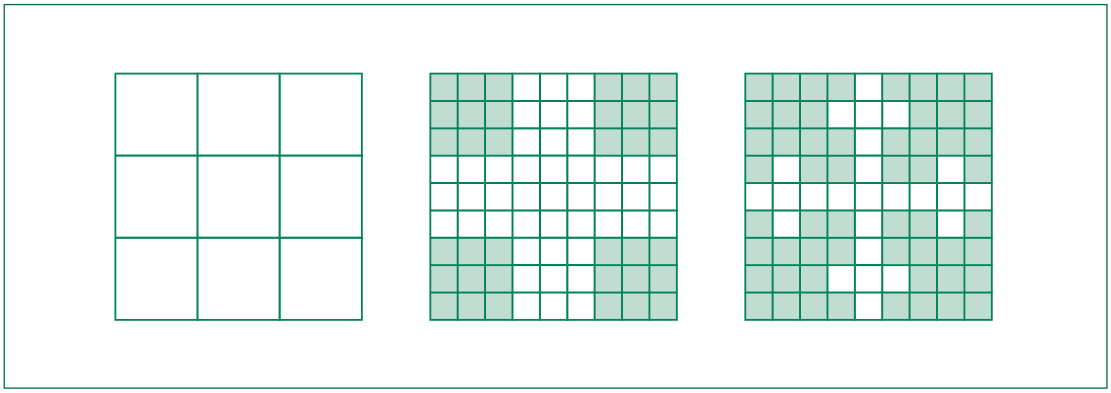
Incluso es posible imaginar la construcción de una figura geométrica limitada por un triángulo equilátero que en su interior contenga una figura de perímetro infinito.

Es importante que los estudiantes repitan el ejemplo con otras figuras como las que se ilustran a continuación

En este caso se divide un cuadrado en 9 cuadrados congruentes y se quitan o borran el del centro y los cuadrados adyacentes; permanecen sólo los de los vértices.



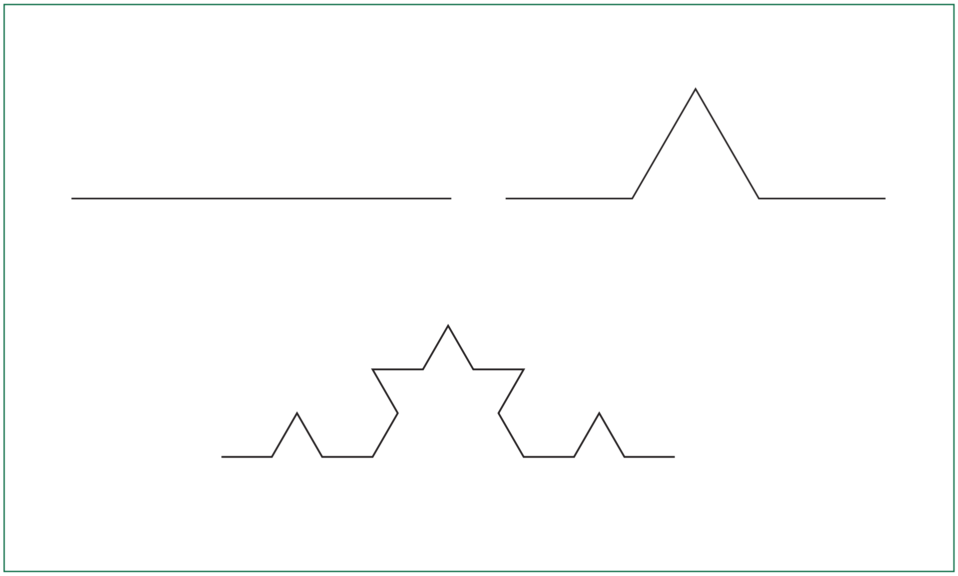
En este otro ejemplo, en cambio, a partir de un cuadrado que se divide en 9 cuadrados congruentes, se borran los que corresponden a los vértices.



Ejemplo D

Iteración por copia

Modificar un trazo de longitud 1 utilizando la siguiente regla de iteración: dividir el segmento en tres trazos de igual medida; reemplazar el del medio por dos segmentos de esa misma medida cuyos extremos libres coinciden, como lo indica el dibujo que sigue.



Realice este proceso de iteración tres veces a partir de un segmento dado. Si el trazo original mide 1, ¿cuánto mide la longitud de la figura en la segunda iteración?, ¿cuánto en la tercera?, ¿cuánto en la décima?

INDICACIONES AL DOCENTE

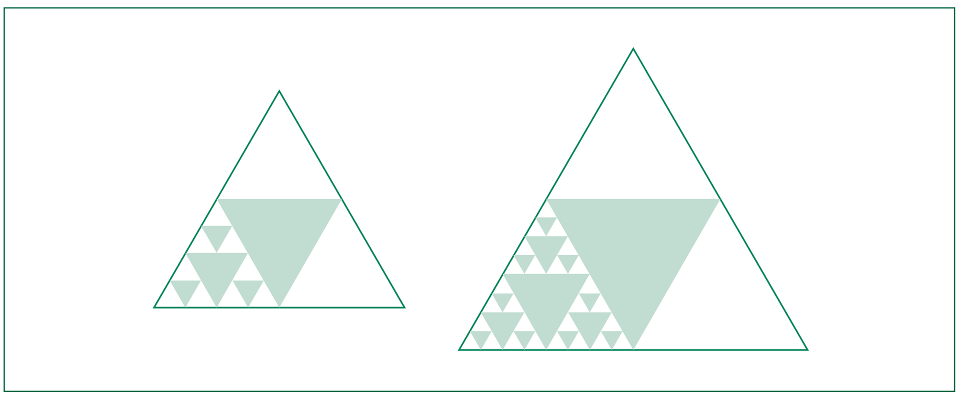
Este fractal se conoce con el nombre de curva de Koch.

Si se realiza este mismo proceso en los lados de un triángulo equilátero se obtiene el fractal conocido como copo de nieve.

Se sugiere abrir un espacio para investigar sobre el tema de la dimensión del espacio euclídeo y la dimensión fractal. El sitio http://www.arrakis.es/~sysifus/dimens.htm presenta interesante información al respecto.

Ejemplo E

Completar los dibujos que siguen para que, en ambos casos, el triángulo más grande sea un triángulo de Sierpinsky.



i) Revisar estas figuras y los ejemplos C y D; constatar que partes de las figuras son semejantes con la figura total (autosemejanza).

ii) Buscar en la naturaleza figuras autosemejantes.

iii) Crear otras figuras que incluyan figuras autosemejantes.

INDICACIONES AL DOCENTE

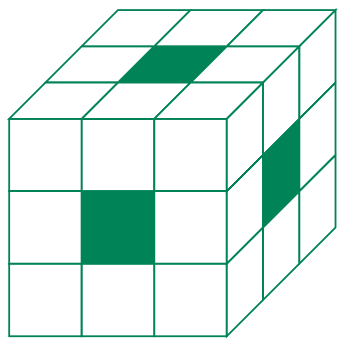
Es importante estimular en los alumnos y alumnas la creatividad y la observación de estas regularidades.

La hoja del helecho es un ejemplo típico de autosemejanza en la naturaleza.

Ejemplo F

Un fractal por remoción en el espacio.

Considerar un cubo que se divide en 27 cubitos congruentes; se retiran los 7 cubos centrales como lo indica el dibujo. Luego el proceso se repite con cada uno de los 20 cubos restantes.



¿Cuántos cubos se remueven en la segunda iteración?

Indicaciones al docente

Este ejemplo se orienta principalmente a abrir una ventana a fractales en el espacio euclídeo tridimensional.

Actividad 2

Realizan procesos de iteración numérica. Construyen y analizan progresiones aritméticas y progresiones geométricas; calculan las respectivas sumas y demuestran la validez de las fórmulas generales.

Ejemplo A

Considerar la función $f(x) = \frac{1}{(1-x)}$, para $x \neq 1$; aplicar sucesivamente esta función, partiendo de x= 5, a las imágenes que se van obteniendo.

Al aplicarla 1000 veces, ¿qué imagen se obtiene?

¿Sucederá lo mismo si se aplica a otros números como 100 o π?

Indicaciones al docente

Tras la constatación de los tres números dados, es importante señalar que para cualquier número real diferente de 0 y de 1, se tiene que si

$f(x) = \frac{1}{(1-x)}$, entonces

$$f(f(x)) = f\left(\frac{1}{(1-x)}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x} = \frac{x-1}{x}$$

$$f(f(f(x))) = f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1-\frac{(x-1)}{x}} = x$$

En consecuencia, luego de tres iteraciones se vuelve al número original.

Ejemplo B

Identificar, en la siguiente lista, cuál es la regla de iteración que permite construir estas sucesiones de números. ¿Cuáles son progresiones aritméticas y cuáles son progresiones geométricas?

i) 5, 11, 17, 23, 29

ii) 5, 10, 20, 40, 80

iii) 5, 7, 10, 14, 19

iv) 5, 5, 5, 5, 5, 5

v) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21

Indicaciones al docente

Es interesante que los alumnos y alumnas constaten que el caso iv) es una progresión aritmética de diferencia 0 y también una progresión geométrica de razón igual a 1.

Además, que el ejemplo v) corresponde a los ocho primeros términos de la sucesión de Fibonacci.

Ejemplo C

i) Determinar *a, b* si se sabe que 7, a, b, 19 están en progresión aritmética.

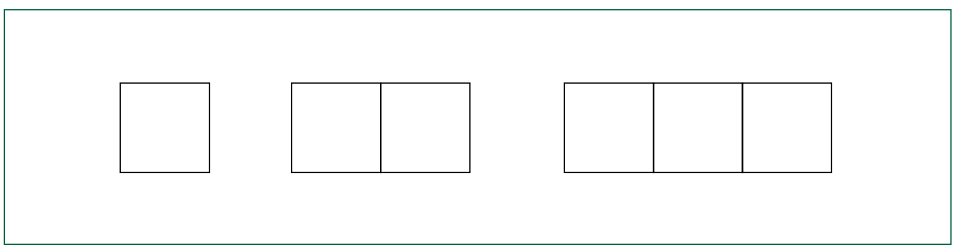
ii) Determinar el o los valores reales de *x* si se sabe que (x-2), (x+4), 3x son términos consecutivos de una progresión geométrica.

INDICACIONES AL DOCENTE

Además de conocer los procedimientos utilizados para resolver ambos ejercicios, será interesante comentar las soluciones que se obtienen para el segundo ejercicio.

Ejemplo D

Con fósforos, continuar la secuencia de figuras que indica el dibujo que sigue, de modo que la figura n-ésima está formada por *n* cuadrados yuxtapuestos uno a continuación del otro; además esa figura tiene un cuadrado más que la figura precedente.



i) ¿Cuántos fósforos son necesarios para construir la figura n-ésima?

ii) Si se construyeran las 10 primeras figuras, ¿cuántos fósforos en total serían necesarios para esas 10 figuras?

iii) ¿Cuántos fósforos serán necesarios para construir las 100 primeras figuras?

iv) ¿Cuántos fósforos serán necesarios para construir las *n* primeras figuras?

INDICACIONES AL DOCENTE

Se puede constatar que se trata de una progresión aritmética.

Para demostrar que la expresión 3n +1 representa el número de fósforos necesarios para construir la n-ésima figura, se puede constatar que a partir del cuadrado inicial se suma cada vez 3 fósforos, que se suma (n-1) veces 3 fósforos para obtener la n-ésima figura; en consecuencia se obtiene 4 + (n - 1) 3 = 3n + 1. Si al profesor o profesora le parece pertinente, podrá utilizar el principio de inducción para hacer esta demostración.

En el punto ii) se introduce la suma de términos de una progresión aritmética. Para demostrar que la suma de los *n* primeros términos de una progresión aritmética está dada por $n\left(a_1+\frac{(n-1)d}{2}\right)$ en que a_1 es el primer término, *d* es la diferencia y *n* el número de términos de la progresión, se puede recurrir a la suma término a término de la progresión en sentido creciente y en sentido decreciente, método utilizado por Gauss según narra la historia, para calcular la suma de los *n* primeros números naturales.

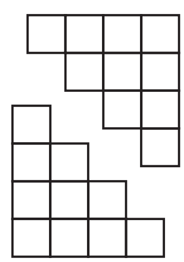
Ejemplo E

Determinar la suma de los *n* primeros números naturales.

INDICACIONES AL DOCENTE

Es importante que los alumnos y alumnas conozcan diferentes maneras de resolver un problema o de realizar una demostración.

En este caso después de constatar que los *n* primeros naturales constituyen una progresión aritmética cuya suma queremos calcular, se puede recurrir a la suma término a término de dos secuencias de números naturales, una en orden ascendente y la otra en orden descendente o bien, aplicar la fórmula para el cálculo de sumas de *n* términos de una progresión aritmética o, si se prefiere, se puede utilizar la representación geométrica rectangular.



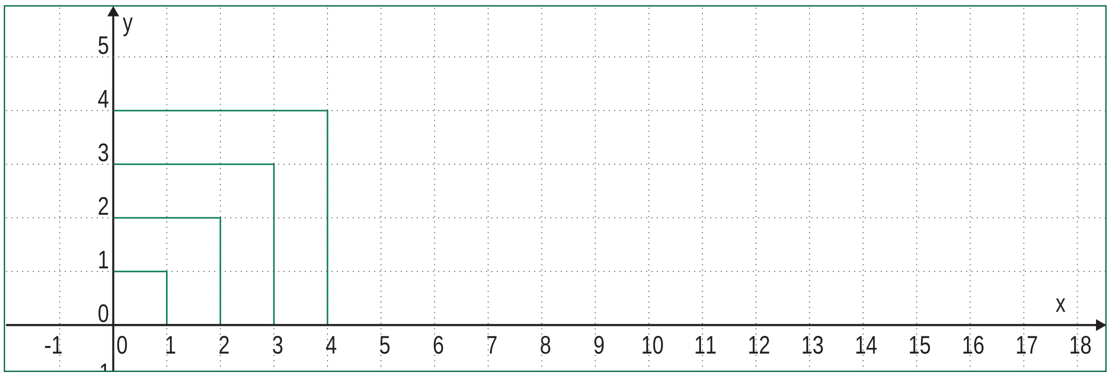
Si el profesor o profesora lo estima pertinente, puede demostrar la igualdad $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ utilizando el principio de inducción, relevando la importancia de verificar la igualdad para el caso $n = 1$.

Ejemplo F

Determinar la suma de los *n* primeros números impares.

INDICACIONES AL DOCENTE

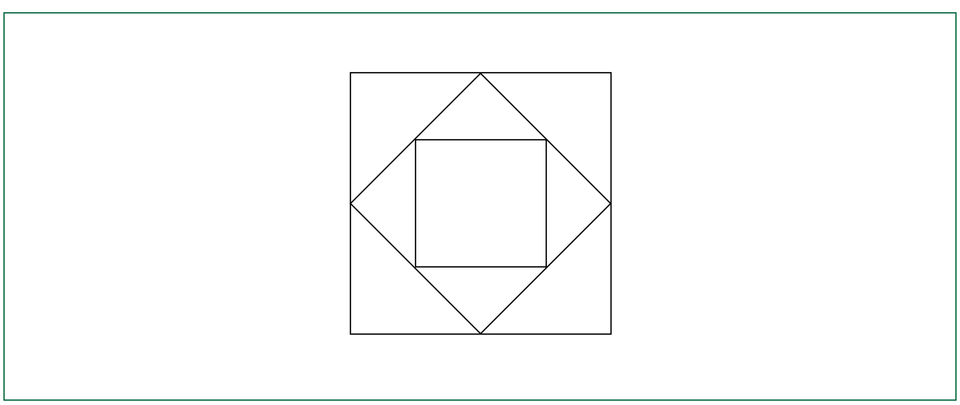
Se sugiere recurrir a una representación gráfica como la siguiente para apoyar la generalización:



Demostrar la validez de la igualdad $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$ aplicando directamente la fórmula para la suma de los *n* primeros términos de una progresión aritmética.

Ejemplo G

A partir de un cuadrado, generar un cuadrado interior uniendo los puntos medios de los lados y así sucesivamente.



¿Qué tipo de progresiones se generan al considerar las sucesiones de las longitudes de las aristas, de los perímetros y de las áreas de los cuadrados sucesivamente incluidos unos en otros?

INDICACIONES AL DOCENTE

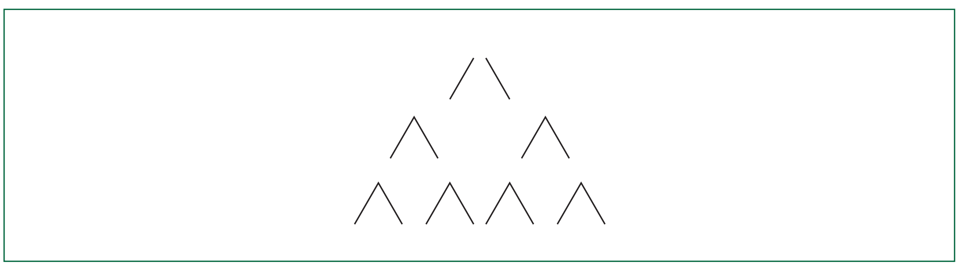
Una tabla como la siguiente permite ordenar los datos y visualizar las relaciones entre ellos:

Cuadrado	Arista	Perímetro	Área
1	a	4a	a^2
2	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$2a\sqrt{2}$	$\frac{a^2}{2}$
3			

Los alumnos y alumnas podrán constatar que aristas, áreas y perímetros se ordenan en progresiones geométricas.

Ejemplo H

El dibujo que sigue representa un ordenamiento de fósforos, como una especie de árbol en el que por cada extremo inferior de un fósforo se agregan dos fósforos en la línea siguiente.



i) ¿Cuántos fósforos en total son necesarios para hacer una figura de este tipo con cuatro líneas?

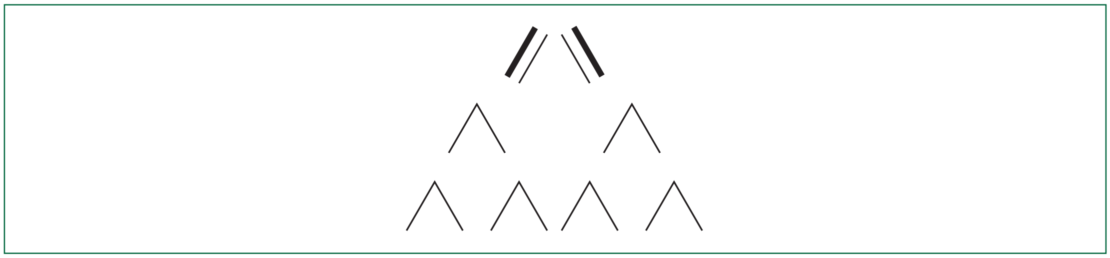
ii) ¿Cuántos fósforos son necesarios para la figura con diez líneas?

iii) ¿Cuántos fósforos serán necesarios para una figura que tiene *n* líneas?

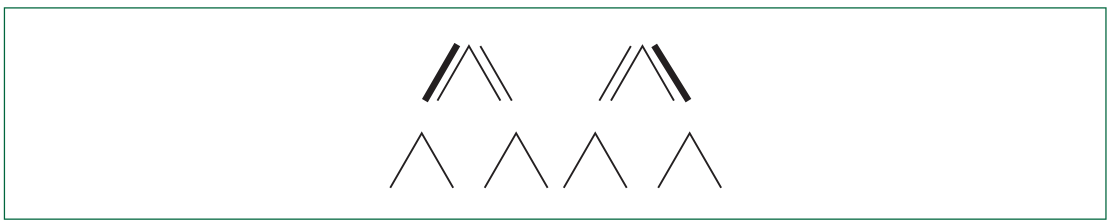
INDICACIONES AL DOCENTE

Constatar que en cada fila se duplica el número de fósforos de la fila anterior y en consecuencia, es una progresión geométrica.

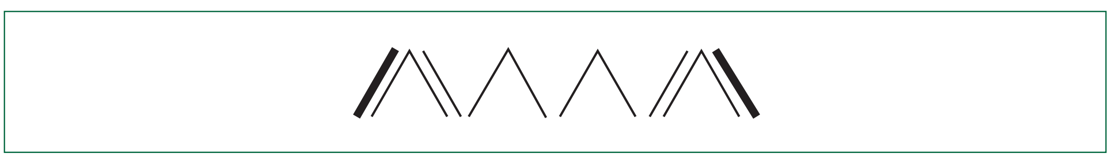
Un procedimiento ingenioso para determinar el total de fósforos necesarios para la figura n-ésima es considerar dos fósforos adicionales que se colocan junto a los de la primera línea como lo indica el dibujo siguiente:



En seguida, se bajan los ahora cuatro fósforos de la primera línea a la segunda, de manera que se duplican los fósforos de la segunda línea, tal como se ve en el dibujo que sigue.



Repitiendo la misma acción, se obtiene un dibujo como el siguiente, que permite visualizar una forma de contar los fósforos necesarios para una figura con tres filas. Originalmente en la tercera fila hay 8 fósforos, o si se prefiere 2^3 fósforos. Naturalmente, con la bajada de los de las filas anteriores este número se duplica.



Si se continúa bajando los fósforos a la cuarta línea, se duplicarán los 2^4 fósforos que originalmente estaban en la cuarta línea.

Una tabla como la siguiente permite ordenar la información recogida:

Figura con n filas	Cantidad de fósforos
1	2
2	6
3	14
4	
n	

En consecuencia, para una figura con *n* filas se necesitarán $2 \cdot 2^n - 2$ fósforos, o $2^{(n+1)} - 2$, o si se prefiere $2(2^n - 1)$.

Se sugiere recurrir a la fórmula que establece que la suma de los *n* primeros términos de una progresión geométrica es igual a: $\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, con $q \neq 1$.

Ejemplo I

Calcular la suma de las siguientes progresiones aritméticas:

i) $\frac{7}{3} + \frac{2}{3} + (-1) + (\frac{-8}{3}) + \ldots + (\frac{-143}{3})$

ii) $(-6) + (-2) + 2 + 6 + 10 + \ldots + 2022$

Calcular la suma de las siguientes progresiones geométricas:

i) $8 + \frac{8}{3^2} + \frac{8}{3^4} + \ldots + \frac{8}{3^{28}}$

ii) $1 - 7 + 7^2 - 7^3 + \ldots - 7^{90}$

Indicaciones al docente

Es necesario que los alumnos y alumnas dispongan de recursos para abordar y resolver ejercicios como los propuestos.

Actividad 3

Utilizan el símbolo de sumatoria, aplican sus propiedades y establecen la suma de algunas series específicas.

Ejemplo A

Calcular las sumas indicadas y establecer el número de sumandos en cada caso.

i) $\sum_{k=4}^{4} k^2$; comparar con $\sum_{j=2}^{5} (j-1)^2$

ii) $\sum_{i=1}^{4} (2i-1)$; comparar con $\sum_{j=3}^{6} (2j-5)$

iii) $\sum_{n=1}^{6} 3$; comparar con $\sum_{j=73}^{78} 3$

iv) $\sum_{i=1}^{4} (x_i - 3)^2$ sabiendo que $x_1 = 4$; $x_2 = 8$; $x_3 = -4$; $x_4 = 0$

INDICACIONES AL DOCENTE

Esta lista de ejercicios permite orientar al uso y sentido del símbolo Σ.

Ejemplo B

Calcular

i) $\sum_{k=1}^{4} k^2 + 2k - 1$

ii) $\sum_{k=1}^{4} 8k^2$

iii) $\sum_{i=1}^{80} 3i - 2$

INDICACIONES AL DOCENTE

El ejercicio i) permite introducir la propiedad aditiva, vale decir

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

la que puede ser demostrada en general y utilizando un cálculo ya realizado en el ejemplo anterior.

El ejercicio ii) permite introducir y demostrar la propiedad homogénea, vale decir

$$\sum_{n=1}^{n} ca_k = c \sum_{n=1}^{n} a_k$$

y utilizar un cálculo ya realizado.

En el ejercicio iii) se aplican ambas propiedades, además de la suma de los *n* primeros naturales.

Ejemplo C

Calcular

i) $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 - k^2$

ii) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)}$

INDICACIONES AL DOCENTE

Para una mejor comprensión de la propiedad telescópica de la suma es importante calcular primero ejemplos en que *n* asume un valor numérico fijo.

$$\sum_{k=1}^{5} (k+1)^2 - k^2 = 2^2 - 1^2 + 3^2 - 2^2 + 4^2 - 3^2 + 5^2 - 4^2 + 6^2 - 5^2 = 6^2 - 1^2$$

Generalizando este ejemplo se puede notar:

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 - k^2 = (n+1)^2 - 1^2 = n^2 + 2n$$

Análogamente se puede desarrollar el otro ejercicio.
Además, como se sabe que $(k + 1)^2 - k^2 = 2k + 1$, se puede anotar:

$$\sum_{k=1}^{n}(k + 1)^2 - k^2 = \sum_{k=1}^{n}2k + 1 = 2\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1 = n(n+1) + n = n^2 + 2n$$

que obviamente es la misma solución obtenida anteriormente.

Ejemplo D

a) Establecer qué sucede con las sumas en los ejercicios siguientes:

i) $\sum_{n=1}^{10} 2^n$

ii) $\sum_{n=1}^{10} (\frac{1}{2})^n$

iii) $\sum_{n=1}^{100} 2^n$

iv) $\sum_{n=1}^{100} (\frac{1}{2})^n$

b) Plantear qué sucede con estas sumas si $n \longrightarrow \infty$

c) Calcular

i) $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^n$

ii) $\sum_{n=3}^{\infty} 4 (\frac{1}{3})^n$

iii) ¿Es posible calcular $\sum_{n=1}^{\infty} 1$

INDICACIONES AL DOCENTE

Es importante que los alumnos y alumnas lleguen a concluir que

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

puede calcularse si se trata de una sucesión de números en progresión geométrica, cuya razón es $|q| < 1$ y además que las propiedades anteriormente estudiadas se pueden aplicar en estos casos.

Ejemplo E

Demostrar que $0{,}333... = \frac{1}{3}$

INDICACIONES AL DOCENTE

Se sugiere proponer a los estudiantes que escriban el número 0,333... como la suma de una progresión geométrica de la forma

$$3 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-3} + ... + 3 \times 10^{-n} + ... = \sum_{i=1}^{\infty} 3 \cdot 10^{-i}$$

Ejemplo F

i) Analizar $a_k = k^2$; $b_k = \frac{1}{k}$ a medida que $k \longrightarrow \infty$

ii) Calcular $\sum_{k=1}^{n} (k + 1)^2 - k^2$, n = 20, 100, 1000

iii) Calcular $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)}$, n = 20, 100, 1000

iv) ¿Cuál de las sumas telescópicas anteriores puede calcularse si $n \longrightarrow \infty$?

v) Calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{(n+2)} - \frac{n}{(n+1)}$

INDICACIONES AL DOCENTE

Como $\frac{(n+1)}{(n+2)}$ se acerca a 1 en la medida en que *n* crece, se puede observar que si $a_n = \frac{n}{(n+1)}$, entonces

$a_{n+1} = \frac{(n+1)}{(n+2)}$, de donde, aplicando la propiedad telescópica, se obtiene $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Ejemplo G

Si se deposita un capital de 1.000.000 de pesos a un interés anual de 6%, calcular el incremento anual del capital y determinar el capital final al cabo de cinco años.

INDICACIONES AL DOCENTE

Es interesante analizar dos procedimientos para la resolución de este problema: uno con mayor presencia de lo aditivo, y el otro con clara presencia del modelo multiplicativo.

La tabla siguiente ilustra el primero de ellos:

Nº de año	Capital al inicio del año	Interés al término del año
1	1.000.000	1.000.000 x 0,06=60.000
2	1.060.000	1.060.000 x 0,06=63.600
3	1.123.600	1.123.600 x 0,06=67.416
4	1.191.016	1.191.016 x 0,06=71.461
5	1.262.477	1.262.477 x 0.06=75.749
	1.338.226	

A partir de este cuadro se puede establecer que la razón de incremento anual es 1,06, y que en consecuencia se trata de una progresión geométrica.

La tabla que sigue, en cambio, ilustra el procedimiento con clara presencia del modelo multiplicativo:

Nº de año	Capital al inicio del año	Capital al término del año
1	1.000.000	1.000.000 x 1,06
2		$1.000.000 \times 1,06^2$
3		$1.000.000 \times 1,06^3$
4		$1.000.000 \times 1,06^4$
5		$1.000.000 \times 1,06^5$

Actividades para la evaluación y ejemplos

Las actividades que se proponen a continuación se complementan con algunos ejemplos. Para cada ejemplo se propone un conjunto de indicadores que importa tener en cuenta para evaluar el logro de los aprendizajes esperados por el alumno o alumna.

Estos indicadores son concordantes con los siguientes criterios de evaluación, ya descritos en la presentación de este programa:

- Resolución de problemas que involucren relaciones matemáticas.
- Desarrollo de habilidades de razonamiento matemático.
- Organización y estructuración de conceptos matemáticos.
- Comprensión y aplicación de procedimientos rutinarios.

Actividad 1

Realizan iteraciones de figuras geométricas, dibujan las posiciones relativas que se van obteniendo y calculan las áreas y perímetros correspondientes.

Ejemplo A

Realizar el siguiente proceso de iteración: modificar un círculo reemplazándolo por dos círculos cuyos diámetros son cada uno la mitad del original yuxtaponiendo uno junto a otro horizontalmente.

a) Hacer el dibujo de las cuatro primeras iteraciones.

b) ¿Qué sucede con la sucesión de los perímetros?

c) ¿Qué sucede con la sucesión de las áreas?

d) ¿A qué figura tiende la iteración en el n-ésimo paso si *n* es un número muy grande?

Observar si:

i) dibujan las primeras iteraciones y mantienen la condición que la suma de los diámetros de las circunferencias en una iteración determinada es igual al diámetro de la circunferencia inicial

ii) conjeturan y constatan sus propuestas sobre áreas y/o perímetros

iii) verifican que el área disminuye

iv) verifican que el perímetro permanece constante

v) perciben una recta como la figura a la cual tiende la sucesión de circunferencias

Ejemplo B

Realizar el siguiente proceso de iteración: partir con un cuadrado, dividirlo en cuatro cuadrados congruentes y remover o borrar el cuadrado del extremo superior derecho.

a) Hacer el dibujo de las tres primeras iteraciones.

b) ¿Qué sucede con la sucesión de las aristas de cada cuadrado?

c) ¿Qué sucede con la sucesión de los perímetros?

d) ¿Qué sucede con la sucesión de las áreas?

Observar si:

i) logran hacer el dibujo de las primeras iteraciones

ii) conjeturan sobre las variaciones de arista, perímetro y áreas

iii) verifican que el perímetro permanece constante

iv) verifican que las aristas de cada nuevo cuadrado es la mitad de la arista del cuadrado anterior

v) verifican que las áreas disminuyen y que constituyen una serie geométrica de razón $\frac{2}{3}$

Actividad 2

Aplican propiedades de las progresiones aritméticas y geométricas.

Ejemplo A

Considerar la sucesión de números dada por

$a_k = k^2$, k= 1, ... 20

¿Están estos números en PA?, en PG? Justifique

Observar si:

i) hacen la lista de los primeros números de la sucesión

ii) verifican que no hay una diferencia constante

iii) verifican que no hay una razón constante

Ejemplo B

¿Existe alguna progresión que pueda ser aritmética y geométrica a la vez?

Observar si:

i) descartan inicialmente, sin experimentación, esta posibilidad

ii) experimentan con algunas sucesiones

iii) proponen una sucesión de términos constantes

Ejemplo C

Calcular la suma de los siguientes 25 términos

$$\sum_{k=1}^{25} 3^k - 2^k =$$

Observar si:

i) hacen la lista de los primeros términos

ii) verifican que puede escribirse como la diferencia de dos progresiones geométricas

iii) aplican propiedades de la sumatoria

iv) establecen la suma de cada progresión

Ejemplo D

Encontrar la suma de todos los números naturales de dos dígitos

Observar si:

i) distinguen el primer término de la progresión

ii) establecen la diferencia

iii) calculan la suma

iv) recurren a la diferencia entre la suma de los 99 y de los 9 primeros números naturales

Actividad 3

Calculan la suma de algunas series específicas.

Ejemplo A

Demostrar que $0,555... = \frac{5}{9}$

Observar si:

i) expresan el número 0,55... como una progresión geométrica

ii) determinan la razón y constatan que es menor que 1

iii) calculan la suma

iv) lo hacen algebraicamente, multiplicando por 10 y haciendo la resta correspondiente

Unidad 2

Funciones polinomiales

Contenidos

a) Polinomios de una variable con coeficientes reales. Grado. Algoritmo de la división. Función polinomial asociada a un polinomio. Raíces o ceros de polinomios. Condición para que un polinomio sea divisible por x-a: Teorema del factor y Teorema del resto.

b) Factorización de polinomios como producto de factores lineales y cuadráticos. Raíces racionales de polinomios con coeficientes enteros. Aplicación a la resolución de algunas ecuaciones de grado superior a 2.

c) Notas históricas sobre las ecuaciones de 3º y 4º grado. Comentarios sobre las ecuaciones de grado superior o igual a cinco.

Aprendizajes esperados

Los alumnos y alumnas:

a) Conocen los polinomios de una variable, los distinguen de otras expresiones algebraicas, reconocen su grado y asocian sus raíces reales con las intersecciones de su gráfico con el eje x.

b) Relacionan las propiedades de la adición y multiplicación de polinomios con coeficientes enteros con las de la adición y multiplicación de los números enteros.

c) Conocen y aplican los teoremas del resto y del factor en la transformación de polinomios por factorización y en la resolución de ecuaciones.

d) Conocen aspectos de la historia de la resolución de ecuaciones de grado 3 y superior y valoran el desarrollo de programas y tecnologías que permiten resolver muchas de éstas.

Orientaciones didácticas

La resolución de ecuaciones polinomiales ha estado presente como problema matemático desde los babilónicos. De hecho, desarrollaron métodos para resolver ecuaciones polinomiales de primer y segundo grado. Posteriormente, los griegos acometieron el desafío de intentar resolver ecuaciones de grado 3, cosa que lograron en varias situaciones particulares. Sin embargo, no fue hasta el siglo XVI en que la actividad de los matemáticos italianos permitió a Tartaglia encontrar una fórmula general que permitió resolver cualquier ecuación cúbica, vale decir, determinar todas las raíces, reales y complejas, de un polinomio cúbico cualquiera. En el mismo siglo XVI, Ferrari descubrió un método general para resolver ecuaciones cuárticas. Por más de 200 años, los matemáticos intentaron infructuosamente encontrar fórmulas para determinar las raíces de polinomios de grado superior a 4. Sin embargo, no fue hasta el siglo XIX que Galois demostró que era imposible encontrar una fórmula general que permitiese encontrar las raíces de polinomios de grado mayor o igual a 5.

La presente unidad de funciones polinomiales no pretende que los estudiantes conozcan las fórmulas generales mencionadas arriba. Los hechos anteriores se señalan porque pueden servir de motivación para que comprendan que, incluso en temas de fácil formulación, el desarrollo de conceptos e ideas matemáticas necesarias para su solución requiere de tiempo y del concurso de muchas mentes creativas.

En la primera actividad de esta unidad se espera que los alumnos y alumnas sean capaces de distinguir qué funciones son polinomiales de aquellas que no lo son, y puedan reconocer sus características principales. El uso de la tecnología para graficar diversas funciones polinomiales facilita la visualización del número máximo de raíces reales que puede tener un polinomio con coeficientes reales (que son los únicos que se proponen en la unidad), y de esta forma puede llegar a mencionarse incluso el Teorema Fundamental del Algebra.

En la segunda actividad se estudia la operatoria algebraica entre polinomios y se propone metodológicamente considerar fundamentalmente polinomios con coeficientes enteros y establecer los paralelos correspondientes entre las propiedades que satisfacen estas operaciones con aquellas que satisfacen los números enteros. No es el objetivo de la actividad las consideraciones de estructura que poseen tanto los enteros como los polinomios sino sólo destacar las similitudes entre las respectivas operaciones. Se introduce también la división sintética como una herramienta facilitadora para el caso en que el divisor es de grado 1.

La tercera actividad se centra en la utilización de los teoremas del resto y del factor. Es fundamental poner de relieve en esta actividad cómo el ser humano fue capaz de desarrollar teoremas que facilitaran los cálculos para funciones como las polinomiales, para las que hoy en día la tecnología ofrece soluciones más rápidas.

Finalmente, en la actividad 4 se muestra que, a pesar de no existir fórmulas generales para encontrar las raíces reales de un polinomio con coeficientes reales de grado mayor o igual a 5, y de no conocer las fórmulas que permiten resolver ecuaciones polinomiales cúbicas y cuárticas, es posible en el caso en que los coeficientes sean enteros, determinar si existen o no raíces racionales de dichos polinomios. En muchos casos, ello permite a través de la factorización del polinomio original y la consecuente sucesiva reducción del grado, obtener todas las raíces reales de un polinomio.

Actividades para el aprendizaje y ejemplos

Actividad 1

Reconocen y grafican polinomios, determinan su grado y el coeficiente principal.

Ejemplo A

En el listado siguiente de expresiones algebraicas, reconocer aquéllas que son polinomios e identificar en esos casos el grado y el coeficiente principal.

i) $a(x) = 5x^3 - 3x - \pi$

ii) $b(x) = \sqrt{2}\ x^4 + 13\ x^2 - 5x$

iii) $c(x) = x^2 - \frac{1}{x}$

iv) $d(x) = 4$

v) $e(x) = 2x - 1$

vi) $f(x) = 8x^2 - 6x^5 - x$

vii) $g(x) = 5\sqrt{x}$

viii) $h(x) = x + 5 - 3x^4$

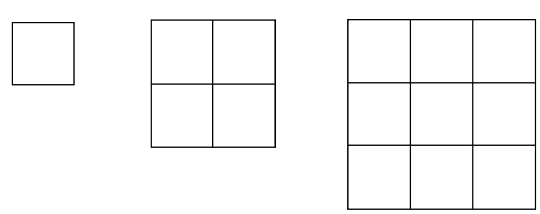
ix) $i(x) = \frac{x}{x-1}$

x) $j(x) = x^2 + x - 1$

Indicaciones al docente

Es necesario que los alumnos y alumnas distingan qué tipo de números son los coeficientes; así a(x) es un polinomio con coeficientes reales mientras que h(x) es uno con coeficientes enteros. Además es importante establecer que los exponentes de *x* deben ser enteros positivos ó 0.

También se puede recurrir a un ejemplo más concreto como armar una secuencia de figuras como lo indica el dibujo que sigue.



En este caso interesa que los alumnos y alumnas lleguen a que el número de fósforos requeridos para la n-ésima figura es $f(n) = 2n(n+1)$, y lo reconozcan como un polinomio de grado 2.

Ejemplo B

i) Inventar un polinomio de tres términos, de grado 5 y que tenga un coeficiente principal igual a 4.

ii) Inventar un polinomio de grado 2 cuyo gráfico intersecta al eje x en los puntos (-2,0); (3,0).

INDICACIONES AL DOCENTE

En ambos casos se pueden plantear múltiples y variadas soluciones. En el caso ii) se obtiene una familia de parábolas $p(x) = a(x-3)(x+2)$.

Ejemplo C

a) Graficar, usando un programa computacional o calculadora gráfica las siguientes funciones polinomiales de grado 3:

   i) $p(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

   ii) $q(x) = x^3 + 4x^2 + x + 1$

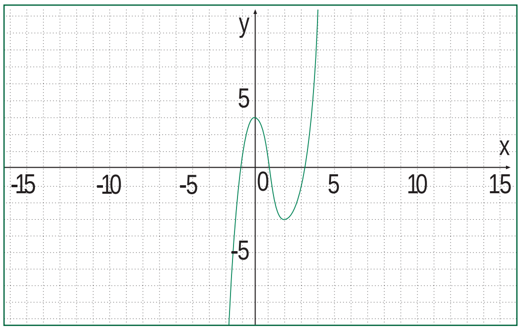
   iii) $r(x) = x^3 - x^2 -x + 1$

   iv) $s(x) = x^3$; $g(x) = x^3 - 4x$; comparar ambos gráficos.

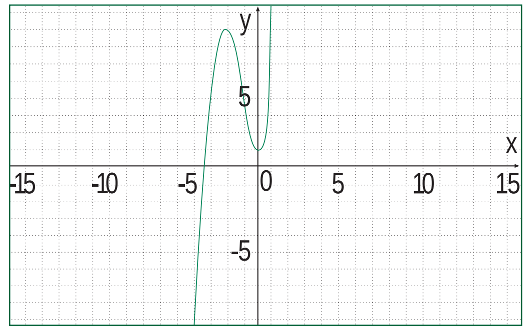
b) Analizar los gráficos que se obtienen y establecer conclusiones generales en relación con la forma del gráfico, el número de intersecciones posibles del gráfico con el eje *x* y el grado del polinomio.

INDICACIONES AL DOCENTE

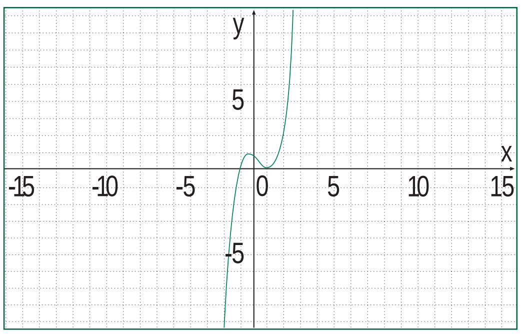
Es importante que a partir del análisis de los gráficos de los polinomios de grado 3, los alumnos y alumnas puedan establecer que todas las cúbicas tiene aproximadamente la forma de una letra S más o menos estilizada y ubicada horizontalmente y que tienen uno o dos, o bien, tres puntos de intersección con el eje de las *x*, lo que significa que, a lo menos, siempre tienen una raíz real.



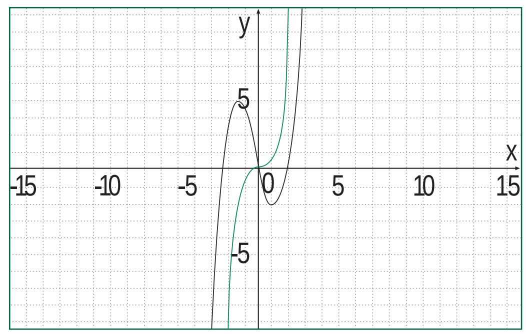
$p(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$



$q(x) = x^3 + 4x^2 + x + 1$



$r(x) = x^3 - x^2 - x + 1$



$s(x) = x^3$; $g(x) = x^3 - 4x$

Es pertinente observar que en las curvas consideradas todas tiene coeficiente principal igual a 1, es decir, coeficiente principal positivo. Es recomendable conjeturar y luego verificar la forma de las curvas si se cambian los signos.

Ejemplo D

a) Graficar, usando un programa computacional o calculadora gráfica las siguientes funciones polinomiales de grado 4

i) $s(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x$

ii) $t(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 2x + 1$

iii) $u(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x + 1$

iv) $v(x)=x^4-8x^3+17x^2-8x+16$

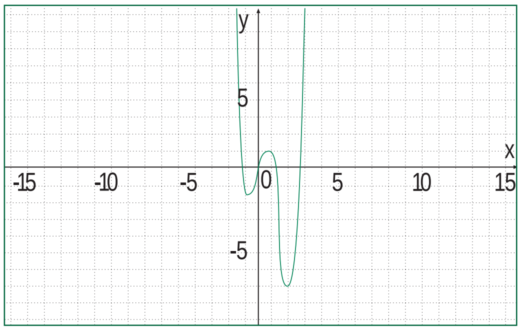
v) $w(x)=x^4-8x^3+12x^2+32x-64$

vi) $f(x) = x^2$; $g(x) = x^4$; $h(x) = x^{10}$

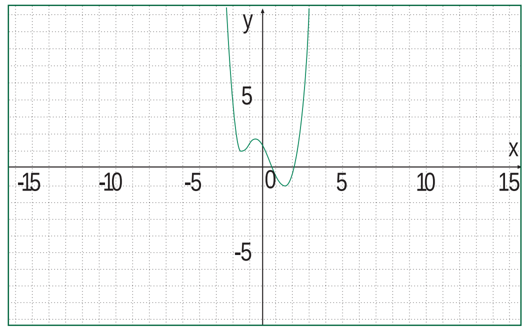
b) Analizar los gráficos que se obtienen y establecer conclusiones generales en relación con el número de intersecciones posibles del gráfico con el eje *x* y el grado del polinomio.

Indicaciones al docente

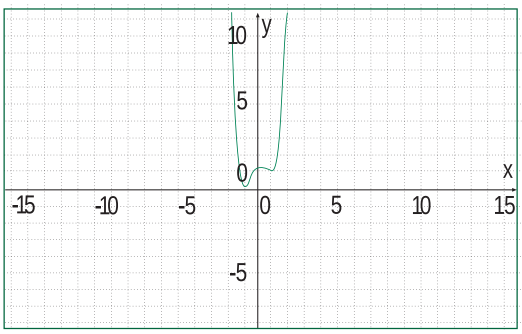
Para los polinomios de grado cuatro, a diferencia de los de grado 3, los alumnos y alumnas podrán concluir que la gráfica podrá tener 0, 1, 2, 3 o bien 4 puntos de intersección con el eje de las *x*.



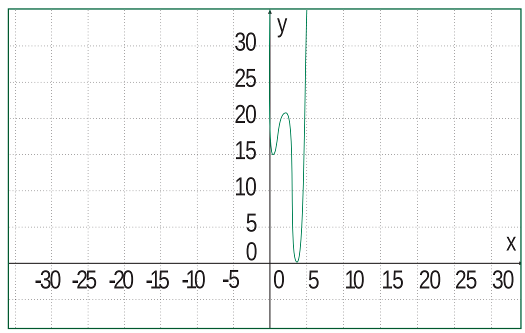
$s(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x$



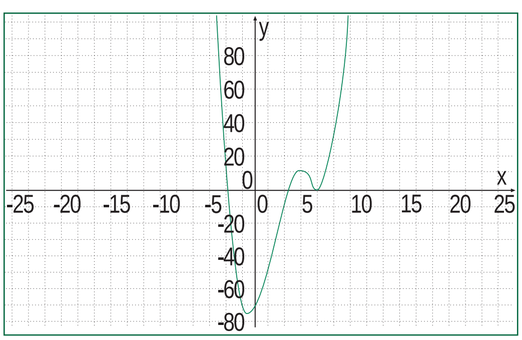
$t(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 2x + 1$



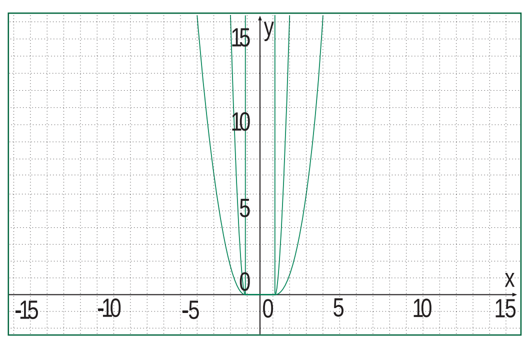
$u(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x + 1$



$v(x)=x^4-8x^3+17x^2-8x+16$



$w(x)=x^4-8x^3+12x^2+32x-64$



$f(x)= x^2$; $g(x)= x^4$;
$h(x)= x^{10}$;

Es interesante que los alumnos y alumnas analicen las variaciones en los gráficos del caso vi) al aumentar el exponente de *x* para valores pares.

Como en el ejemplo C, las cuárticas consideradas tienen coeficiente principal igual a 1, es decir, positivo. Análogamente a ese ejemplo, es recomendable conjeturar y luego verificar lo que sucede con las gráficas si se cambian los signos de los polinomios.

Además, a partir de los ejemplos C y D, los estudiantes podrán conjeturar que el grado del polinomio determina el máximo de puntos de intersección de la gráfica de un polinomio con el eje de las *x*, y que los polinomios de grado impar tienen siempre al menos una raíz real, lo que se puede argumentar en forma análoga al polinomio de grado 3.

Actividad 2

Realizan operaciones algebraicas entre polinomios y analizan las propiedades de la adición y la multiplicación.

Ejemplo A

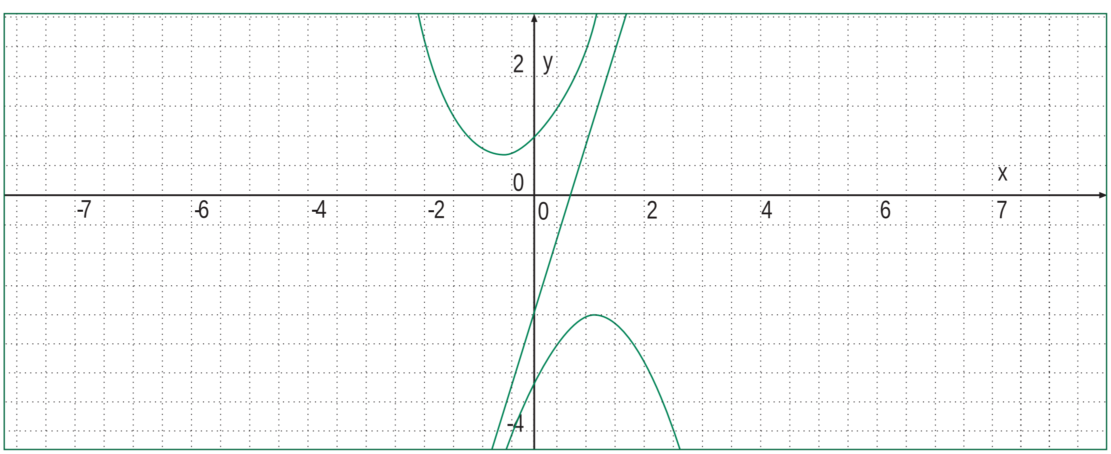
i) Calculan p(x) + q(x) si $p(x) = x^2 + x + 1$; $q(x) = -x^2 + 2x - 3$

Grafican ambos polinomios y su suma.

ii) Calculan r(x) - s(x) si $r(x) = 5x^4 - 3x + 1$; $s(x) = 2x^2 - 3x - 8$.

INDICACIONES AL DOCENTE

Es importante que los alumnos y alumnas logren establecer que al sumar o restar polinomios se obtiene un polinomio en el que el grado del polinomio que suma o diferencia satisface
$\text{grad}\ (p(x) + q(x)) \leq \text{máx}(\text{grad}\ p, \text{grad}\ q)$



$p(x) = x^2 + x + 1$
$q(x) = - x^2 + 2x - 3$

Ejemplo B

i) Sean $p(x) = 2x^2 + 1$; $q(x) = 2x^2 - 1$; $r(x) = 5 - x$, calcular el producto $p(x) \bullet q(x) \bullet r(x)$.

ii) Calcular $(s(x))^2$ sabiendo que $s(x) = 2x^3 + 5x$.

iii) Calcular $(1 - 6x^2) \bullet (5x + 3)$.

Indicaciones al docente

Es importante que los alumnos y alumnas usen los conocimientos adquiridos desde Primer Año Medio en relación con lenguaje algebraico y revisen las propiedades de las operaciones en los enteros y las relacionen con las propiedades de la operatoria algebraica en polinomios con coeficientes enteros.

Además, a diferencia de la adición, los alumnos y alumnas podrán inferir que el grado del polinomio que se obtiene como producto es igual a la suma de los grados de los polinomios que se multiplican.

Ejemplo C

i) Calcular $p(x) + q(x)$ y $p(x) - q(x)$ si
$p(x) = x^2 - 3$; $q(x) = x^3 - x^2 - 1$.

ii) Estudiar si la adición de polinomios es conmutativa y si es asociativa.

iii) Determinar si existe $n(x)$ tal que $p(x) + n(x) = p(x)$; generalizar y relacionar con el neutro aditivo en los números enteros.

iv) Determinar, si existe, $q'(x)$ tal que $q(x) + q'(x) = n(x)$; generalizar y relacionar con el inverso aditivo en los números enteros.

Indicaciones al docente

Es necesario que los alumnos y alumnas relacionen las propiedades de la adición en los enteros y en los polinomios con coeficientes enteros, sin pretender establecer estructura de grupo aditivo, sino sólo tener conciencia que éstas existen y que se utilizan habitualmente.

Ejemplo D

i) Calcular $r(x)\ s(x)$ si $r(x) = (x^2 - x)$; $s(x) = (x^3 - x + 1)$

ii) ¿Qué propiedad de la multiplicación permite hacer el cálculo del producto, multiplicando todos los elementos de un polinomio con todos los del otro polinomio?

iii) Estudiar si la multiplicación de polinomios es conmutativa y si es asociativa.

iv) Determinar si existe $n(x)$ tal que $r(x)\ n(x) = r(x)$; generalizar y relacionar con el neutro multiplicativo en los números enteros.

v) Considerar $t(x) = x$; ¿existe algún polinomio $t'(x)$ tal que $t(x)\ t'(x) = n(x)$?

INDICACIONES AL DOCENTE

Es muy importante que los alumnos y alumnas, de acuerdo a la definición de polinomio establecida anteriormente, reconozcan que x^{-1} no es un polinomio; en consecuencia, el inverso multiplicativo de un polinomio con coeficientes reales no es un polinomio, salvo que el polinomio sea un polinomio constante no nulo, al igual que el inverso multiplicativo de un número entero no es un número entero salvo que éste sea el 1 o el -1.

Ejemplo E

i) Calcular $(x^3 + 8x^2 + 21x + 18) : (x + 2)$.

ii) Calcular $(x^2 + 2x^3 + x^2 - 3x^4 + 5) : (x^2 + 4x - 1)$.

INDICACIONES AL DOCENTE

Interesa que los alumnos y alumnas relacionen la división de polinomios con el algoritmo de la división que conocen y utilizan para dividir números enteros; que reconozcan que el grado del dividendo debe ser mayor que el del divisor y que el grado del resto debe ser menor que el grado del divisor.

Además, se facilita la aplicación del algoritmo de la división si los polinomios están escritos en orden descendente de los exponentes de x.

Puede ser conveniente que los alumnos y alumnas constaten que el resultado de la división es correcto, multiplicando el resultado por el divisor y sumando el resto para obtener el dividendo.

Ejemplo F

Verifique por división sintética que el valor indicado x_0 es raíz de la ecuación.

i) $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$; $x_0 = -2$

ii) $4x^3 + 3x^2 - 5x - 2 = 0$; $x_0 = 1$

INDICACIONES AL DOCENTE

Es necesario que los alumnos y alumnas comprendan que si x_0 es la raíz de un polinomio, significa que dicho polinomio es divisible por $(x - x_0)$ con resto igual a 0.

Además es importante que relacionen la división sintética con la aplicación del algoritmo de la división. Por ejemplo, en el caso i):

Recurriendo a la división sintética se obtiene:

$$\begin{array}{c|cccc} & +1 & +3 & +0 & -4 \\ -2 & & -2 & -2 & +4 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Al resolverlo aplicando directamente el algoritmo de la división se obtiene:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 3x^2 - 4) : (x + 2) = x^2 + x - 2 \\
\underline{x^3 + 2x^2} \\
0 \ + x^2 \ - 4 \\
\quad \underline{+ x^2 \ + 2x} \\
\qquad 0 \ - 2x - 4 \\
\qquad\quad \underline{- 2x - 4} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

El polinomio que se obtiene de la división es de grado menor que el del dividendo. En este caso, se pueden obtener las otras raíces del polinomio resolviendo la ecuación cuadrática $x^2 + x - 2 = 0$

La división sintética es una herramienta sencilla que, en general, gusta a los estudiantes. Es el momento de abrir espacios para la conversación acerca de cómo los matemáticos buscaron formas para simplificar los cálculos, de forma similar a lo ocurrido con los logaritmos, y cómo los avances de la tecnología permiten obviar algunas de esas herramientas.

Actividad 3

Aplican el teorema del resto y el teorema del factor en la división de polinomios; relacionan los esfuerzos realizados a través del tiempo para evaluar y determinar las raíces de un polinomio con los avances en la tecnología que facilita significativamente dichas evaluaciones.

Ejemplo A

Determine a, sabiendo que - 2 es raíz de $p(x) = 5x^4 - 7x^3 + 11x + a$.

Indicaciones al docente

Es importante que los alumnos y alumnas comprendan que si (-2) es una raíz del polinomio, éste es divisible con resto 0 por $(x + 2)$; este procedimiento, aunque es un poco largo y según los coeficientes puede ser un poco engorroso, es totalmente correcto.

Un procedimiento más rápido es aplicando la división sintética. En este caso se obtiene:

	5	-7	0	11	a
-2		-10	34	-68	114
	5	-17	34	-57	114 + a

Si (- 2) es raíz del polinomio, necesariamente, $114 + a = 0$, de donde $a = -114$

Es importante destacar la ventaja de este método en términos del número de cálculos que deben hacerse en comparación con la evaluación directa $p(-2) = 0$

Ejemplo B

Sea p(x) = $4x^4 + 10\ x^3 + 19\ x + 5$. Hallar p(-3).

INDICACIONES AL DOCENTE

Una de los procedimientos de solución es evaluar el polinomio en -3, para lo cual será conveniente utilizar una calculadora.

Otro procedimiento es utilizar el teorema del resto

	4	10	0	19	5
- 3		-12	6	-18	-3
	4	-2	6	1	2

Como el residuo es 2, entonces p(-3) = 2

Es otro momento propicio para conversar sobre el aporte de los medios tecnológicos para esta evaluaciones.

Ejemplo C

Determinar los números *a* y *b*, sabiendo que p(x) = $2x^3 + a\ x^2 + bx - 8$ es divisible por (x-1) y que al dividirlo por (x-2) da resto 4.

INDICACIONES AL DOCENTE

Procurar que los alumnos y alumnas puedan utilizar tanto el procedimiento del algoritmo de la división como la división sintética, reconociendo que esta última es más rápida y sencilla en los cálculos.

Si se utiliza la división sintética se obtiene:

	2	a	b	- 8
1		2	a + 2	a + 2 + b
	2	a + 2	a + 2 + b	a + b - 6

Como (x - 1) es divisor de p(x), el resto debe ser igual a 0.

Luego: a + b - 6 = 0

Considerando la otra información del ejemplo se puede calcular

	2	a	b	-8
2		4	8 + 2a	16 + 4a + 2b
	2	4 + a	8 + 2a + b	4a + 2b + 8

De acuerdo a los datos, 4a + 2b + 8 = 4

La resolución del sistema

$$\left.\begin{array}{ll} a + b & = 6 \\ 4a + 2b & = -4 \end{array}\right|$$

permite obtener los valores para *a* y *b*, de acuerdo a las condiciones del ejemplo.

Ejemplo D

Si $p(x) = x^5 - 10x^3 + 7x + 6$; encontrar $p(3)$; ¿es $(x - 3)$ factor de $p(x)$?

Indicaciones al docente

Si se constatara que 3 es una raíz del polinomio, entonces $p(3)$ será igual a 0.
Utilizando la división sintética se obtiene:

	1	0	-10	0	7	6
3		3	9	-3	-9	-6
	1	3	-1	-3	-2	0

En consecuencia, $p(x) = 0$ y $p(x) = (x-3)(x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x - 2)$

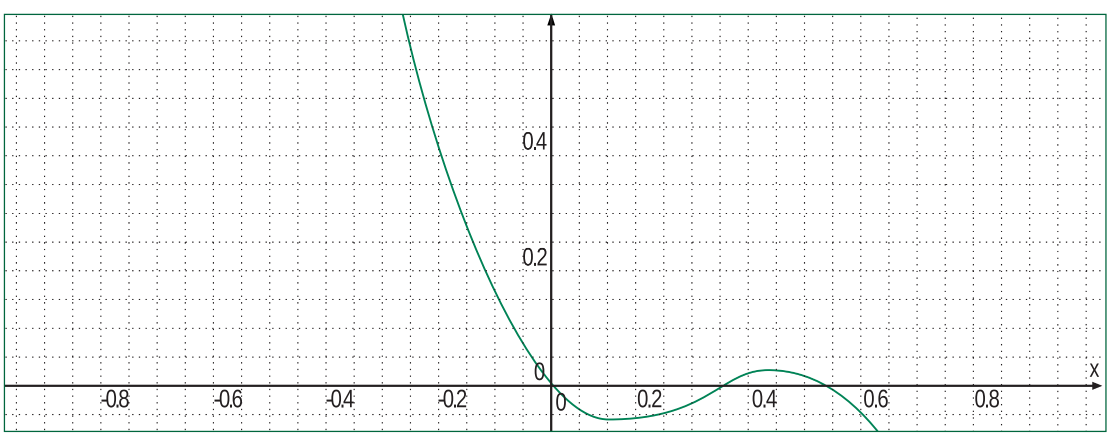
Ejemplo E

Encuentre todas las raíces de $p(x) = -6x^3 + 5x^2 - x$.

Indicaciones al docente

En este caso, interesa que los alumnos y alumnas se den cuenta que es posible factorizar el polinomio $p(x)$ por x, en donde el otro factor es una cuadrática que puede ser resuelta por métodos conocidos por los estudiantes.

También es posible graficar el polinomio para visualizar los tres puntos de intersección con el eje de las *x*.



Ejemplo F

Investigan en textos de historia de las matemáticas o en sitios en internet acerca de los aportes de Omar Khayyam, Scipione Ferro, Niccolo Fontana de Brescia(Tartaglia), Girolamo Cardano, Raffaelle Bombelli y otros a la solución de las ecuaciones de grado 3 y superiores.

INDICACIONES AL DOCENTE

Es muy interesante reflexionar con los alumnos y alumnas cómo los avances tecnológicos en relación con programas computacionales para matemáticas y las calculadoras gráficas contribuyen a eliminar cálculos engorrosos y lentos en relación con el tema de evaluación de polinomios. Además, cómo los teoremas y descubrimientos matemáticos que resolvieron esos problemas cobraron vida propia en el desarrollo de la matemática.

Actividad 4

Factorizan polinomios en producto de factores lineales y cuadráticos; determinan las raíces racionales de polinomios con coeficientes enteros, lo aplican en la resolución de ecuaciones cuadráticas y en algunos casos específicos de grado superior a 2.

Ejemplo A

Hallar los valores de *m* para que la siguiente ecuación tenga raíces iguales:

$x^2 - 15 - m(2x - 8) = 0$

INDICACIONES AL DOCENTE

Este ejemplo permitirá a los alumnos y alumnas retomar la ecuación de segundo grado y analizar el discriminante; es un momento adecuado para establecer los valores múltiples de una raíz; en este caso *m* toma dos valores distintos y para cada uno de ellos, la multiplicidad de la raíz es dos.

Ejemplo B

Encontrar un polinomio de grado 4 en que sus raíces están en progresión aritmética con $a_1 = 2$ y $d = 3$; escribirlo como producto de factores lineales.

INDICACIONES AL DOCENTE

Es conveniente que los alumnos y alumnas deduzcan que dado el grado del polinomio, éste tiene cuatro raíces; como éstas están en progresión aritmética, los estudiantes pueden establecer que las raíces son 2, 5, 8, 11.

En consecuencia el polinomio es $p(x) = (x - 2)(x - 5)(x - 8)(x - 11)$.

Ejemplo C

Determinar todas las raíces racionales de los siguientes polinomios, y escribirlos como productos de factores lineales y cuadráticos.

i) $p(x) = 4x^2 - 25$

ii) $q(x) = 10x^2 + 2x - 12$

iii) $r(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 3$

iv) $s(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$

v) $t(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$

INDICACIONES AL DOCENTE

Los casos i) y ii) son reconocibles por los estudiantes como polinomios de grado 2; luego, ellos saben determinar las raíces y discriminar si éstas son o no racionales.

En el caso iii) es necesario aplicar el teorema relativo a las raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros; es posible encontrarlas entre los cuocientes formados por los divisores de a_0 divididos por los divisores del coeficiente principal. Para este ejemplo hay 8 casos posibles ± 1; $\pm \frac{1}{2}$; ± 3; $\pm \frac{3}{2}$. Por división sintética se puede constatar que $-\frac{1}{2}$ es una raíz de este polinomio; de esa misma división queda establecido que $r(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 3 = (x - \frac{1}{2})(2x^2 + 2x - 6)$; obtener las otras raíces para el polinomio cuadrático es un tema conocido por los alumnos y alumnas; es interesante observar que el ejemplo solicita sólo las raíces racionales.

En los casos iv) y v) se opera de manera similar.

Ejemplo D

Encontrar todas las raíces reales de:

i) $q(x) = 6x^4 - 11x^3 - x^2 - 4$

ii) $p(x) = 81x^5 - 54x^4 + 3x^2 - 2x$

INDICACIONES AL DOCENTE

En ambos casos, en forma similar al ejemplo anterior, se aplica el teorema sobre las raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros; en el caso del ejemplo ii) es, sin lugar a dudas una tarea larga, que la tecnología por medio de programas computacionales o calculadoras resuelve en forma rápida y eficiente. Sin embargo, p(x) puede ser factorizado por *x* y por medio de división sintética es posible obtener que $\frac{2}{3}$ y $-\frac{1}{3}$ son raíces racionales del polinomio. Faltaría sólo estudiar lo que sucede con el polinomio cuadrático restante.

Ejemplo E

Encuentre un polinomio de grado 4, con coeficientes enteros que tenga como raíces.

i) 5, 4, -3

ii) 2, 2 + $\sqrt{3}$

iii) $\sqrt{2}$ + $\sqrt{3}$

INDICACIONES AL DOCENTE

Por tratarse de un polinomio de grado 4, las raíces son cuatro; en ninguno de los casos pedidos en el ejemplo se proponen cuatro raíces, esto permitirá que los alumnos y alumnas consideran una de esas raíces como raíz de valor múltiple, planteando por ejemplo, para el caso i) $(x-5)^2(x-4)(x+3)$, o bien inventen una cuarta raíz cualquiera.

En los casos ii) y iii) se sugiere considerar que si

$x = 2 + \sqrt{3}$, entonces
$x - 2 = \sqrt{3}$, de donde, elevando al cuadrado,
$x^2 - 4x + 4 = 3$,
$x^2 - 4x + 1 = 0$

O bien considerar la opción de las raíces conjugadas para un polinomio de grado dos.

Actividades para la evaluación y ejemplos

Las actividades que se proponen a continuación se complementan con algunos ejemplos. Para cada ejemplo se propone un conjunto de indicadores que importa tener en cuenta para evaluar el logro de los aprendizajes esperados por el alumno o alumna.

Estos indicadores son concordantes con los siguientes criterios de evaluación, ya descritos en la presentación de este programa:

- Resolución de problemas que involucren relaciones matemáticas.
- Desarrollo de habilidades de razonamiento matemático.
- Organización y estructuración de conceptos matemáticos.
- Comprensión y aplicación de procedimientos rutinarios.

Actividad 1

Suman, restan, multiplican y dividen polinomios; conocen y aplican las propiedades de la adición y multiplicación de polinomios.

Ejemplo A

Hallar *a*, *b*, *c* números reales, tales que : $2x^2 - 3x - 1 = a(x-1)^2 + b(x - 1) + c$

Observar si:

i) desarrollan y ordenan el polinomio de la derecha
ii) identifican los coeficientes
iii) determinan los valores de a, b y c

Ejemplo B

Sea $p(x) = x^3 + x$; determinar $q(x)$ tal que $p(x) + q(x) = x^2$

Observar si:

i) realizan procedimientos algebraicos correctos

Actividad 2

Realizan divisiones entre polinomios aplicando el teorema del resto y el teorema del factor.

Ejemplo A

Determine *m* sabiendo que 2 es raíz de $p(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + m$

Observar si:
i) realizan la división sintética considerando que 2 es raíz del polinomio
ii) determinan el valor de m *igualando el resto a 0*

Ejemplo B

Calcular p(2) en el polinomio $p(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 18x - 9$

Observar si:
i) reemplazan y hacen los cálculos numéricos
ii) realizan la división sintética y aplican el teorema del resto

Actividad 3

Determinan las raíces de polinomios con coeficientes enteros, de grados superior a 2. Factorizan polinomios en producto de factores lineales y cuadráticos.

Ejemplo A

Escribir el polinomio de grado 3 si sus raíces están en progresión geométrica de razón 0,5 y el primer término es 4.

Observar si:
i) determinan las tres raíces
ii) escriben el polinomio en forma factorizada
iii) escriben el polinomio como producto de tres factores

Ejemplo B

Calcular valores para *m* de modo que: $x^2 - 2x(1 - 3m) + 7(3 + 2m) = 0$ tenga raíces iguales

Observar si:
i) buscan el discriminante y lo igualan a 0
ii) calculan los valores para m
iii) constatan la validez de los valores encontrados

Ejemplo C

Sean $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$ raíces de $p(x) = 4x^4 + ax^3 + bx^2 + 5x - 4$; determinar las demás raíces.

Observar si:
i) realizan la división sintética con una de las raíces e igualan el resto a cero
ii) realizan la división sintética con la otra raíz, e igualan el resto a cero
iii) determinan los valores de a y b
iv) calculan las otras raíces del polinomio cuadrático resultante

Ejemplo D

Hallar un polinomio de grado 3, con coeficientes enteros que tenga

a) $\sqrt{7}$ como una raíz

b) $1 + \sqrt{5}$ como una raíz

Observar si:
i) se dan cuenta que uno de los factores del polinomio no puede ser de la forma $(x - \sqrt{7})$ *o bien* $(x - (1 + \sqrt{5}))$ *porque los coeficientes del polinomio pedido son números enteros.*
ii) proponen que uno de los factores del polinomio pedido sea un polinomio cuadrático, con coeficientes enteros que admita como soluciones las indicadas en el enunciado.
iii) el otro factor del polinomio pedido es cualquier polinomio de grado 1

Ejemplo E

Determinar todas las raíces de $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3$

Observar si:
i) obtienen las posibles raíces del polinomio aplicando el teorema relativo a las raíces de polinomios con coeficientes enteros
ii) verifican si son o no las raíces por medio de la división sintética
iii) calculan las raíces del polinomio de orden 2 al obtener una de las raíces del polinomio de orden 3

Unidad 3

Funciones trigonométricas

Contenidos

a) Medición de ángulos; radián. Funciones seno, coseno y tangente en el círculo unitario. Periodicidad. Demostración de las identidades fundamentales:

   $\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$; sen (A + B) y cos (A + B).

b) Gráfico de las funciones seno, coseno y tangente. Valores de estas funciones para algunos ángulos; valores para los ángulos complementarios. Preimágenes para algunos valores de la función y resolución de ecuaciones trigonométricas sencillas. Uso de calculadora científica.

Aprendizajes esperados

Los alumnos y alumnas:

a) Conocen las funciones trigonométricas, identifican sus gráficos, y respectivos dominios, recorridos y períodos.

b) Amplían el concepto de ángulo al considerarlo como un giro y las unidades de medida de los ángulos incorporando el radián.

c) Conocen relaciones trigonométricas para demostrar identidades y resolver ecuaciones.

d) Resuelven problemas que involucran conocimientos básicos de trigonometría.

Orientaciones didácticas

Las funciones periódicas son las herramientas matemáticas que se utilizan para modelar la periodicidad de muchos fenómenos, tanto naturales como construidos por el ser humano. Los recurrentes cambios en las mareas, los ciclos en el ámbito económico, las oscilaciones de la corriente eléctrica, las vibraciones mecánicas, las ondas asociadas a las teorías físicas de la luz y del sonido son algunos de estos tipos de fenómenos.

Una función se dice periódica si existe un número real p tal que $f(x + p) = f(x)$ para cualquier número x en el dominio de la función f. El menor p positivo que satisface la relación anterior se llama "período fundamental" de la función. Las funciones trigonométricas son las funciones periódicas por excelencia de la matemática, y tienen propiedades asombrosas que permiten el modelamiento de muchos de estos fenómenos. Particularmente es importante reflexionar con los estudiantes respecto al hecho de que la periodicidad las hacen esencialmente diferentes a las funciones polinomiales. Ecuaciones trigonométricas sencillas como $\operatorname{sen} x = 0$ ó $\cos x = 0$ tienen infinitas soluciones en la recta real, mientras que el número máximo de soluciones de una ecuación polinomial queda determinado por el grado del polinomio.

Las actividades y ejemplos propuestos en esta unidad son clásicos, pero metodológicamente se propone la fuerte utilización de las tecnologías disponibles, para facilitar la visualización y el descubrimiento de muchas de las propiedades que satisfacen las funciones trigonométricas. Particularmente, en la segunda actividad, el gráfico de las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ permite descubrir rápidamente que el dominio de ambas funciones es el conjunto de todos los números reales y que sus respectivos recorridos es el intervalo $[-1, 1]$.

Análogamente, al graficar las funciones $f(x) = A \operatorname{sen} x$ y $g(x) = A \cos x$, para valores determinados de A, puede verse que el recorrido es el intervalo $[-A, A]$, en el caso en que $A > 0$. Ello permite definir la amplitud de las curvas sinusoidales como $|A|$.

De la misma manera, es posible graficar funciones de la forma $f(x) = \operatorname{sen} Bx$ y $g(x) = \cos Bx$, para valores naturales de B y observar cómo se modifica el período de la función.

Actividades para el aprendizaje y ejemplos

Actividad 1

Transforman grados a radianes y viceversa; establecen la relación entre la medida de un ángulo en radianes y la longitud del arco de circunferencia.

Ejemplo A

i) Establecer las medidas en radianes para los ángulos α, β, y θ si $\alpha = -150°$; $\beta = -225°$; $\theta = 450°$.

ii) Calcular la medida en grados de α, β, y θ, si $\alpha = 5\pi$; $\beta = \frac{-\pi}{2}$; $\theta = \frac{5\pi}{4}$.

INDICACIONES AL DOCENTE

Es necesario comentar con los estudiantes el concepto de ángulo. Es probable que algunos conozcan la definición de un ángulo como la unión de dos rayos con origen común. Es conveniente complementarla con el concepto de ángulo como el giro de un rayo en torno a un centro a partir de una posición establecida. Esta última definición permite considerar ángulos con medidas mayores de 180 y también mayores de 360 grados e incorporar, además, el sentido del signo del ángulo. Es cómodo dibujar un ángulo con centro en el origen de un sistema de coordenadas, de modo que el lado fijo coincide con la parte positiva del eje de las *x*.

Ejemplo B

Completar la siguiente tabla que indica la relación entre valores en radianes y en grados para algunos ángulos.

radianes	0		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$			π	2π	3π
grados		30º			90º		135º	150º			

INDICACIONES AL DOCENTE

Los alumnos y alumnas tienen el hábito de la medición de ángulos en grados sexagesimales; generalmente tienen dificultad para utilizar el sistema de medición en radianes, de uso habitual en trigonometría.

Ejemplo C

i) Programar una calculadora en grados sexagesimales (deg) y determinar y anotar el valor del seno y coseno de ángulos: de 30°, 60°, 90°.

ii) Dibujar en una circunferencia de radio 1 los ángulos del centro de esas medidas e identificar el segmento que representa el valor del seno y el del coseno.

iii) Programar la calculadora en radianes (rad) y determinar los valores de seno y coseno para un ángulo que mide 1.047 radianes.

iv) Comparar con los valores anotados anteriormente y plantear razones que expliquen la igualdad aproximada entre sen 60° y sen1.047rad.

INDICACIONES AL DOCENTE

Es necesario que los alumnos y alumnas se familiaricen con la medición de ángulos en radianes y que utilicen la calculadora científica con el conocimiento de estos sistemas de medida, para evitar resultados erróneos. Además, la generalidad de las calculadoras científicas tienen un tercer modo de medición de ángulos que son los grados centesimales que no tienen un uso muy difundido.

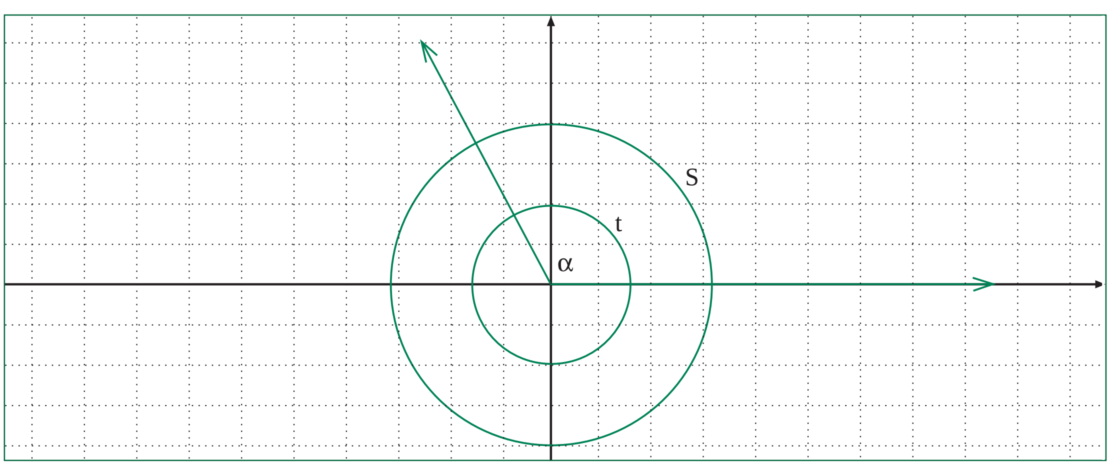
Ejemplo D

Un ángulo central α abarca un arco de 20 cm de longitud sobre una circunferencia de 2 m de radio. ¿Cuál es la medida del ángulo en radianes?

INDICACIONES AL DOCENTE

Es necesario recordar que en un ángulo del centro, si la circunferencia es de radio unitario, la medida del arco que subtiende el ángulo es igual a la medida de ese ángulo en radianes.

Si el radio de la circunferencia no es unitario, para determinar la medida del ángulo en radianes se recurre a la proporcionalidad entre los arcos y los radios correspondientes; de acuerdo al dibujo que sigue, el ángulo α subtiende el arco t de la circunferencia unitaria y el arco s de otra circunferencia de radio r.



En este caso se puede escribir: $\frac{t}{s} = \frac{1}{r}$, de donde *t*, que es el arco que corresponde a la medida de α en radianes, es $t = \frac{s}{r}$.

Ejemplo E

Dos ciudades que se encuentran sobre el círculo del Ecuador distan entre sí 200 km. ¿Cuál es la diferencia entre las longitudes de ellas suponiendo que el radio de la tierra en el Ecuador es 6400 km?

INDICACIONES AL DOCENTE

Es interesante que los alumnos y alumnas relacionen la longitud medida en grados en el sistema de coordenadas geográfica con los ángulos del centro en el círculo del Ecuador. Se sugiere establecer coordinaciones con los profesores de Historia y Ciencias Sociales.

Actividad 2

Estudian las funciones seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante; analizan el gráfico, establecen el dominio y el recorrido en cada caso.

Ejemplo A

Considerar la función seno;

i) Graficar la función f(x) = senx.

ii) Señalar el dominio y el recorrido de la función.

iii) Establecer el período.

iv) Constatar que para un valor determinado de la imagen de la función hay infinitos valores para la medida del ángulo.

v) Graficar; g(x) = - senx; h(x) = sen(-x) ¿Qué se puede concluir?

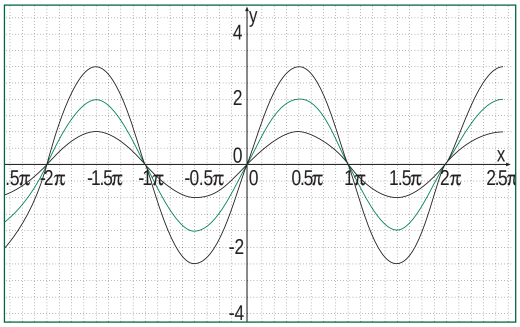
vi) Comparar los gráficos f(x) = senx; g(x) = 2 sen x; h(x) = 5 senx; ¿qué rol juega el coeficiente?

vii) Graficar f(x) = |senx|.

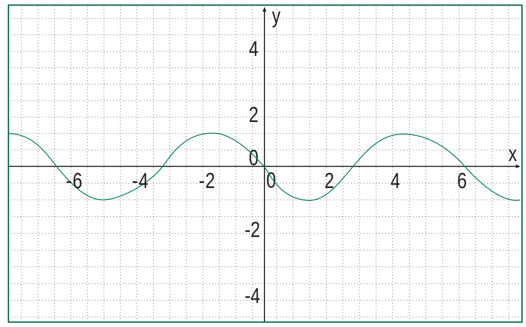
INDICACIONES AL DOCENTE

El uso de un programa computacional para graficar es un apoyo fundamental para el desarrollo de este ejemplo.

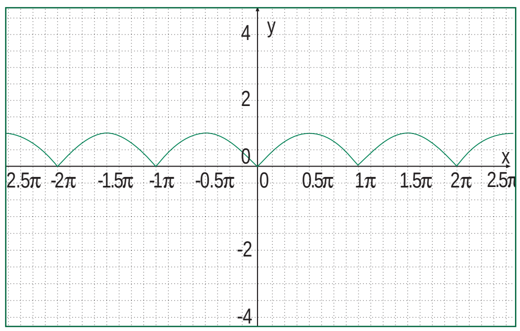
Importa que los alumnos y alumnas relacionen el concepto de amplitud de onda de esta función; en consecuencia esta función permitirá modelar fenómenos asociados a la luz, los colores, el sonido, entre otros.



f(x) = A senx; A > 0



h(x) = -senx o g(x) = sen(-x)



f(x) = |senx|

Además, es interesante retomar el tema del valor absoluto y analizar qué cambios se producen en el dominio, recorrido y periodicidad de la función seno. Importa que los estudiantes extraigan conclusiones a partir de las representaciones gráficas.

Ejemplo B

Considerar la función coseno;

i) Graficar la función f(x) = cosx.

ii) Señalar el dominio y el recorrido de esta función.

iii) Establecer el período.

iv) Constatar que para un valor determinado de la imagen de la función hay infinitos valores para la medida del ángulo.

v) Comparar las gráficas de las funciones seno y coseno.

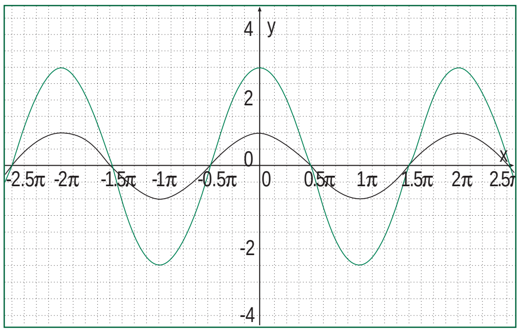
vi) Comparar las gráficas de f(x) = cosx; g(x) = cos(-x); relacionar con los valores de cos x y cos (- x) en el círculo unitario.

vii) Comparar los gráficos f(x) = 2 cos x; g(x) = 3 cosx ¿qué rol juega el coeficiente?

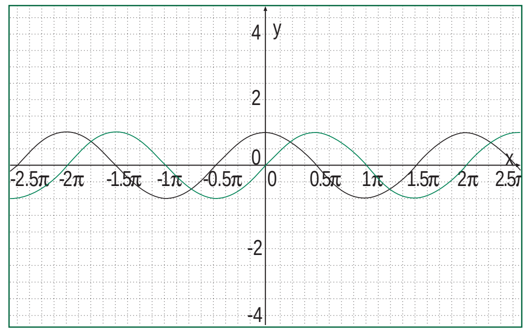
viii) Graficar f(x) = |cosx| .

INDICACIONES AL DOCENTE

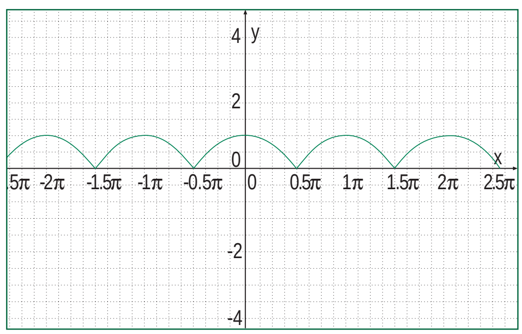
En forma similar al ejemplo anterior, el estudio de los gráficos debiera permitir a los alumnos y alumnas extraer y fundamentar conclusiones.



$f(x) = A \cos x;\ A > 0$



$h(x) = \cos x;\ g(x) = \operatorname{sen} x$



$f(x) = |\cos x|$

Ejemplo C

Considerar la función tangente;

i) Graficar la función f(x) = tanx.

ii) Señalar el dominio y el recorrido de esta función.

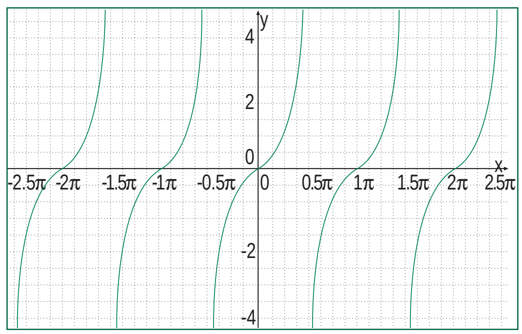
iii) Establecer el período.

iv) Constatar que para un valor determinado de la imagen de la función hay infinitos valores para la medida del ángulo.

v) Graficar $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$; establecer la relación con la tangente. ¿Por qué los puntos de la forma $x = (2n + 1)\dfrac{\pi}{2}$, con *n* entero, no pertenecen al dominio de la función?

Indicaciones al docente

En forma similar a los dos ejemplos anteriores es importante que los alumnos y alumnas establezcan conclusiones a partir de los gráficos y que los relacionen con los que derivan de los valores en el círculo de radio unitario.



Ejemplo D

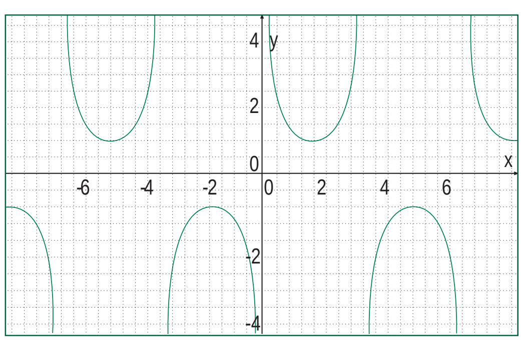
i) Graficar $f(x) = \text{cosec } x = \dfrac{1}{\text{sen } x}$; señalar el dominio y el recorrido de esta función.

ii) Graficar $f(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$; señalar el dominio y el recorrido de esta función.

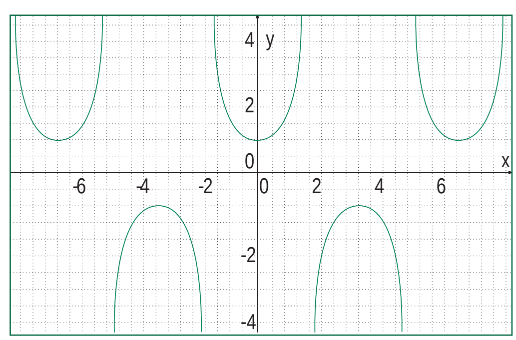
iii) Graficar $f(x) = \text{cotan } x = \dfrac{1}{\tan x}$ señalar el dominio y el recorrido de esta función.

Indicaciones al docente

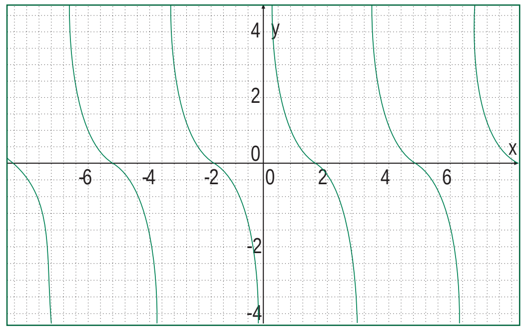
A partir de las gráficas, los estudiantes pueden establecer que los puntos para los cuales estas funciones no están definidas corresponden a los valores en que las funciones seno, coseno o tangente toman un valor igual a 0.



$f(x) = \dfrac{1}{\text{sen } x} = \text{cosec} x$



$g(x) = \dfrac{1}{\cos x} = \sec x$



$h(x) = \dfrac{1}{\tan x} = \text{cotg}x$

Ejemplo E

i) Graficar sen x, sen 2x, sen 3x; determinar los períodos de cada función.

ii) Graficar cos x, cos 2x, cos 3x; determinar los períodos de cada función.

INDICACIONES AL DOCENTE

Es conveniente que los alumnos y alumnas, a partir de estos gráficos, propongan conclusiones sobre las variaciones que se producen en el período como efecto de los factores que multiplican la medida del ángulo.

Es importante estimularlos para la generalización de modo que concluyan, por ejemplo que la función sen nx, con *n* entero positivo, tiene un período igual a $\frac{2\pi}{n}$.

Actividad 3

Demuestran algunas identidades trigonométricas sencillas.

Ejemplo A

Demostrar que:

i) $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

ii) $\text{cosc}^2\alpha = 1 + \text{ctg}^2\alpha$

iii) $\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$

INDICACIONES AL DOCENTE

Retomar el teorema de Pitágoras en el contexto de la identidad i).

Es importante que los alumnos y alumnas se habitúen a explicitar las restricciones, como las que son necesarias en los casos ii) y iii).

Ejemplo B

Calcular sin utilizar calculadora:

i) sen 15º

ii) cos 105º

iii) sen 75º

INDICACIONES AL DOCENTE

Es conveniente que los alumnos y alumnas conozcan el valor de las funciones trigonométricas para algunos ángulos específicos entre 0 y π; con esos valores pueden construir, aplicando las correspondientes identidades para sen$(A \pm B)$ y cos $(A \pm B)$, valores de esas funciones para otros ángulos.

Ejemplo C

Demostrar que:

i) $\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$

ii) $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen} x$

iii) $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

iv) $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

$= 2\cos^2 x - 1$

$= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

INDICACIONES AL DOCENTE

Interesa que los alumnos y alumnas apliquen las identidades trigonométricas ya conocidas en la demostración de otras nuevas. Es conveniente que los estudiantes deduzcan a partir de iv) las identidades para seno y coseno del ángulo medio.

Ejemplo D

Demostrar que:

i) $\operatorname{sen}(x + y) \bullet \operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y$

ii) $\cos(x + y) \bullet \cos(x - y) = \cos^2 x - \cos^2 y$

INDICACIONES AL DOCENTE

La resolución de estas identidades requiere no sólo conocer las identidades para seno y coseno de una suma y una diferencia sino, también, hacer uso de un razonable manejo algebraico de productos notables.

Ejemplo E

Expresar todas las funciones trigonométricas en términos de la función secante.

INDICACIONES AL DOCENTE

Este ejemplo se puede desarrollar en términos de cualquier función trigonométrica.

Actividad 4

Resuelven ecuaciones y problemas que involucren la resolución de ecuaciones trigonométricas, recurriendo, si es pertinente, a las funciones trigonométricas inversas.

Ejemplo A

Resolver las siguientes ecuaciones:

i) $\text{sen } x = 0{,}5$, para x en el intervalo $[-\pi, \pi]$

ii) $\cos x = -0{,}5$, para x en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

iii) $2\tan x = 1$, para x en el intervalo $[0, 2\pi]$

iv) $\text{sen } x = 7$

v) $4\text{sen } x = 0{,}38$

vi) $\cos x = -0{,}245$

INDICACIONES AL DOCENTE

Se sugiere que los alumnos y alumnas utilicen diferentes recursos en la resolución de estas ecuaciones. En algunos casos se podrán apoyar en una tabla con los valores de las funciones para algunos ángulos específicos, en otros conocen de memoria algunos valores, o bien utilizarán una calculadora.

Es necesario que los estudiantes tengan claridad que la calculadora da como valor el ángulo del primer cuadrante; se sugiere llegar a generalizaciones, por ejemplo, para el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

Ejemplo B

Resolver las siguientes ecuaciones:

i) $6\text{sen}^2 x + \text{sen } x - 1 = 0$

ii) $2\cos^2 x + \cos x - 15 = 0$

iii) $\tan^2 x - 5\tan x - 24 = 0$

iv) $1 + \cos x = \text{sen } x$

Indicaciones al docente

Se sugiere utilizar una variable auxiliar para que los alumnos y alumnas visualicen que se trata de ecuaciones de segundo grado; expresiones como $6u^2 + u - 1 = 0$ son reconocibles por los estudiantes como ecuaciones cuadráticas y pueden servir de apoyo para la comprensión de las ecuaciones trigonométricas cuadráticas.

Es necesario que los alumnos y alumnas se habitúen a analizar la existencia de las soluciones. En el ejemplo iv) al elevar al cuadrado la ecuación, se introducen nuevas soluciones posibles; es necesario comprobarlas para determinar las que son correctas.

Ejemplo C

Demostrar que en cualquier triángulo ABC se tiene que: $\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta}$

Indicaciones al docente

En este ejemplo se obtiene una parte del teorema del seno; puede ser interesante completarlo para el lado c y el tercer ángulo.

Ejemplo D

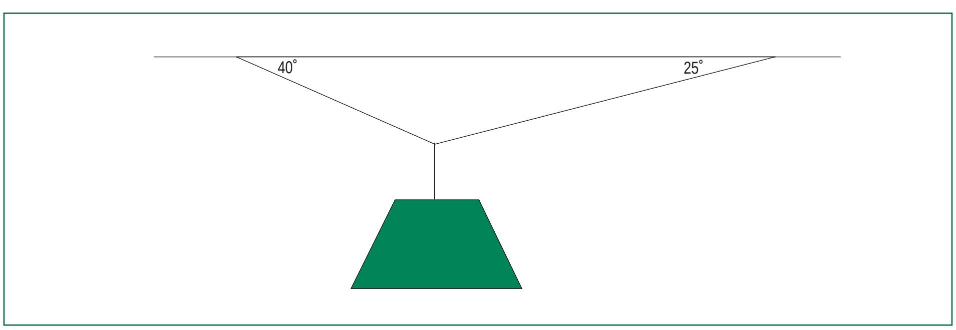
Si sen $\theta = \frac{-5}{13}$ y tan $\theta > 0$, determinar el valor de las otras funciones trigonométricas para ese ángulo.

Indicaciones al docente

En este ejemplo es necesario que los alumnos y alumnas especifiquen en qué cuadrante se encuentra el ángulo para así determinar el valor correspondiente.

Ejemplo E

Un peso de 200 kilos es soportado por dos cables como muestra la figura. ¿Cuál es la fuerza que se ejerce en cada uno de los cables?



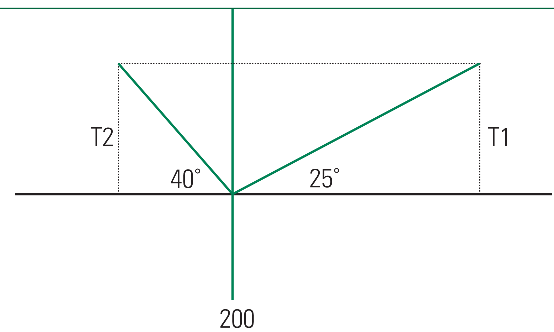
Sugerencia: descomponer las fuerzas que se ejerce sobre los cables en sus respectivas componentes horizontales y verticales.

INDICACIONES AL DOCENTE

Es necesario establecer coordinaciones con los profesores de Física.

Procurar que los alumnos y alumnas perciban que las fuerzas que se ejercen en cada uno de los cables corresponde a sendos vectores con origen común.

En consecuencia, al hacer la descomposición de las fuerzas en sus componentes horizontal y vertical se obtiene una situación como la que se grafica a continuación:



Las componentes de T_1 sobre los ejes son

$T_{1x} = T_1 \cos 25°$ $T_{1y} = T_1 \text{ sen } 25°$

Las componentes de T_2 sobre los ejes son

$T_{2x} = T_2 \cos 40°$ $T_{2y} = T_2 \text{ sen } 40°$

Como el sistema está en reposo, la suma de las fuerzas sobre cada eje debe ser igual a 0, se puede escribir el siguiente sistema cuyas incógnitas son T_1 y T_2

$$\begin{aligned} T_1 \cos 25° &= T_2 \cos 40° \\ T_1 \text{ sen } 25° + T_2 \text{ sen } 40° &= 200 \end{aligned}$$

Ejemplo F

Tres pueblos A, B y C están unidos por carreteras rectas y sin cuestas. La distancia AB es 6 km, la BC es 9 km y el ángulo que forman AB y BC es de 120° .¿Cuál es la distancia entre A y C?

INDICACIONES AL DOCENTE

Si α es la medida del segundo ángulo, el tercero mide (60° - α); aplicando el teorema del seno se puede obtener la medida de α, lo que posteriormente permite calcular la distancia pedida.

Actividades para la evaluación y ejemplos

Las actividades que se proponen a continuación se complementan con algunos ejemplos. Para cada ejemplo se propone un conjunto de indicadores que importa tener en cuenta para evaluar el logro de los aprendizajes esperados por el alumno o alumna.

Estos indicadores son concordantes con los siguientes criterios de evaluación, ya descritos en la presentación de este programa:

- Resolución de problemas que involucren relaciones matemáticas.
- Desarrollo de habilidades de razonamiento matemático.
- Organización y estructuración de conceptos matemáticos.
- Comprensión y aplicación de procedimientos rutinarios.

Actividad 1

Transforman grados a radianes y viceversa.

Ejemplo A

Si un ángulo mide 1,5 radianes, ¿es mayor, menor o igual que un ángulo recto?

Observar si:
i) recurren a un planteamiento de proporciones
ii) lo hacen mentalmente, considerando que 1,5 es la mitad de 3
iii) si toman el círculo unitario como referencia

Ejemplo B

Con una calculadora en modo radianes, calcule el valor de tan2; en seguida, calcule arctan del valor que está en pantalla. Explique por qué el valor que se obtiene para la medida del ángulo no es 2 radianes.

Observar si:
i) manejan con soltura la calculadora y conocen las funciones trigonométricas
ii) apoyan su reflexión en el círculo unitario
iii) apoyan su reflexión en un gráfico de la función tangente

Actividad 2

Relacionan las funciones trigonométricas con sus gráficos correspondientes, establecen el dominio, el recorrido y el período en cada caso.

Ejemplo A

¿Queda determinado un ángulo α menor que 360°, si se conoce el valor de seno α?

Observar si:
i) suponen que sí porque visualizan los ángulos sólo en el primer cuadrante
ii) apoyan su reflexión en el círculo unitario
iii) apoyan su reflexión en un gráfico de la función seno

Ejemplo B

¿Qué relación existe entre el seno de un ángulo y el coseno del ángulo complementario?

Observar si:
i) apoyan su reflexión en un triángulo rectángulo
ii) lo proponen como una identidad y la demuestran

Ejemplo C

¿Qué ángulos entre 0° y 360° tienen iguales, en valor absoluto, el seno y el coseno?

Observar si:
i) apoyan su reflexión en un gráfico de la función seno y coseno y y visualizan sólo los puntos de intersección como respuesta correcta
ii) apoyan su reflexión en el círculo unitario y visualizan los cuatro ángulos
iii) lo traducen a la ecuación $|\text{sen } x| = |\cos x|$, $0 \leq x \leq 2\pi$

Ejemplo D

Sean α y β dos ángulos que pertenecen al intervalo $[-\pi, \pi]$, y cuyos cosenos son iguales, ¿qué relación existe entre esos dos ángulos?

Observar si:
i) recurren al círculo unitario como apoyo para la reflexión
ii) recurren al gráfico como apoyo para la reflexión
iii) consideran que coseno es una función par

Actividad 3

Demuestran algunas identidades trigonométricas sencillas.

Ejemplo A

Demostrar si las siguientes igualdades son verdaderas:

a) $\dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{\text{cotg}\alpha + \text{cotg}\beta} = \tan\alpha \bullet \tan\beta$

b) $\text{sen} \bullet \dfrac{1}{\tan\alpha} = \cos\alpha$

c) $\dfrac{(1+\text{sen}\alpha)}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{(1+\text{sen}\alpha)} = 2\sec\alpha$

Observar si:
i) conocen las identidades básicas
ii) utilizan un formulario
iii) hacen transformaciones algebraicas pertinentes

Actividad 4

Resuelven ecuaciones trigonométricas.

Ejemplo A

Resolver los tres ejemplos siguientes sin utilizar calculadora ni tabla

a) $1 - \sqrt{2}\cos x = 0$, para valores de x en el intervalo $[0, 2\pi]$

b) $\cos^2 x - \text{sen}\, x = -1$, para el intervalo $[-\pi, 2\pi]$

c) $\cos^2 x = \cos x + \text{sen}^2 x$, para el intervalo $[-\pi, \pi]$

Observar si:
i) hacen transformaciones algebraicas pertinentes
ii) se apoyan en un formulario
iii) conocen los valores para las funciones de determinados ángulos
iv) utilizan identidades básicas

Ejemplo B

Resolver, utilizando calculadora.

a) $\cos^2 x = 3 - 5 \cos x$ para el intervalo $[0, 2\pi]$

b) $\text{sen } 2x + \cos x = 0$ para cualquier valor de x

Observar si:
i) hacen transformaciones algebraicas pertinentes
ii) se apoyan en un formulario
iii) utilizan la calculadora para las funciones inversas

Actividad 5

Resuelven problemas que involucran conocimientos trigonométricos básicos.

Ejemplo A

Determinar el ángulo del centro que subtiende una cuerda de 3 cm, si el radio de la circunferencia es 4 cm.

Observar si:
i) se apoyan con un esquema o dibujo
ii) trazan la altura del triángulo isósceles que se obtiene
iii) aplican las funciones trigonométricas en uno de los triángulos rectángulos que se obtienen.

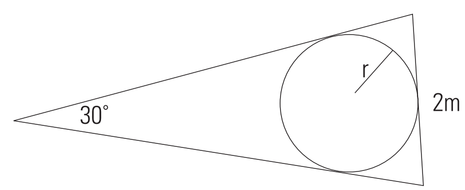
Ejemplo B

¿Habrá algún ángulo cuyo seno sea igual al seno del ángulo doble del ángulo dado?

Observar si:
i) buscan la respuesta por ensayo y error
ii) se apoyan en el círculo unitario
iii) se apoyan en el gráfico de la función seno
iv) traducen a la ecuación sen x = sen 2x y resuelven la ecuación

Ejemplo C

Encuentre *r* en la figura de modo que la circunferencia sea tangente a los tres lados del triángulo isósceles.



Observar si:

i) hacen un esquema o dibujo

ii) reconocen y aplican propiedades geométricas propias de los triángulos isósceles y rectángulos y de las tangentes a una circunferencia

iii) aplican relaciones trigonométricas pertinentes

Bibliografía

Aguilera Néstor (1995) Un paseo por el jardín de los fractales. Red Olímpica OMA. Buenos Aires.

Ayres, Frank; Meyer, Robert (1991) Trigonometría. Serie Shaum. Mc-Graw Hill. México.

Braun, Eliezer. (1996) Caos, fractales y cosas raras. Fondo de Cultura Económica. Serie La ciencia desde México. México.

De Guzmán Miguel. (1995) Para pensar mejor. Ediciones Pirámide. España.

Hall y Knight (1994) Álgebra Superior. UTHEA. México.

John Allen Paulos. (1991) Más allá de los números. Turquets Editores. Barcelona.

Mandelbrot Benoit (1997) La geometría tratado de la naturaleza. Tusquets Editorial. Barcelona.

Peterson Ivars (1992). El turista matemático. Alianza Editorial. Madrid.

Raymond A. Barnett (1997) Algebra y trigonometría. Editorial Mc-Graw Gill. México.

Rey J. y Babini J. (1997) Historia de la matemática. Editorial Gedisa. España.

Smullyan Raymond, Satan (1995) Cantor y el infinito. Editorial Gedisa. España.

Stewart Ian (1998). De aquí al infinito. Drakontos. Barcelona.

Talanquer, Vicente. (1996) Fractus, fracta, fractal. Fractales, de laberintos y espejos. Fondo de Cultura Económica. Serie La ciencia desde México. México.

Sitos en internet Software graficador shareware bajado de Internet EQUATION GRAPHER:

http://www.mfsoft.com/equationgrapher/
'Graphmatica' bajado de Internet: http//graphmataica.com
Enlaces : (http://www.enlaces.cl)
http://www.ciudadfutura.com/juegosmensa
http://www.dim.uchile.cl/
h t t p ://www.nalejandria.com/forms/matemas.htm
http://www.mat.puc.cl/~socmat
http://rsme.uned.es
http://fermat.usach.cl/~somachi/index.html
http://roble.pntic.mec.es/~jcamara/websup1.htm
http://nti.educa.rcanaria.es/usr/matematicas
http://members.xoom.com/pmatematicas
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/
http.//www.redemat.com