

Matemática

Programa de Estudio

Primer Año Medio

Ministerio de Educación



IMPORTANTE

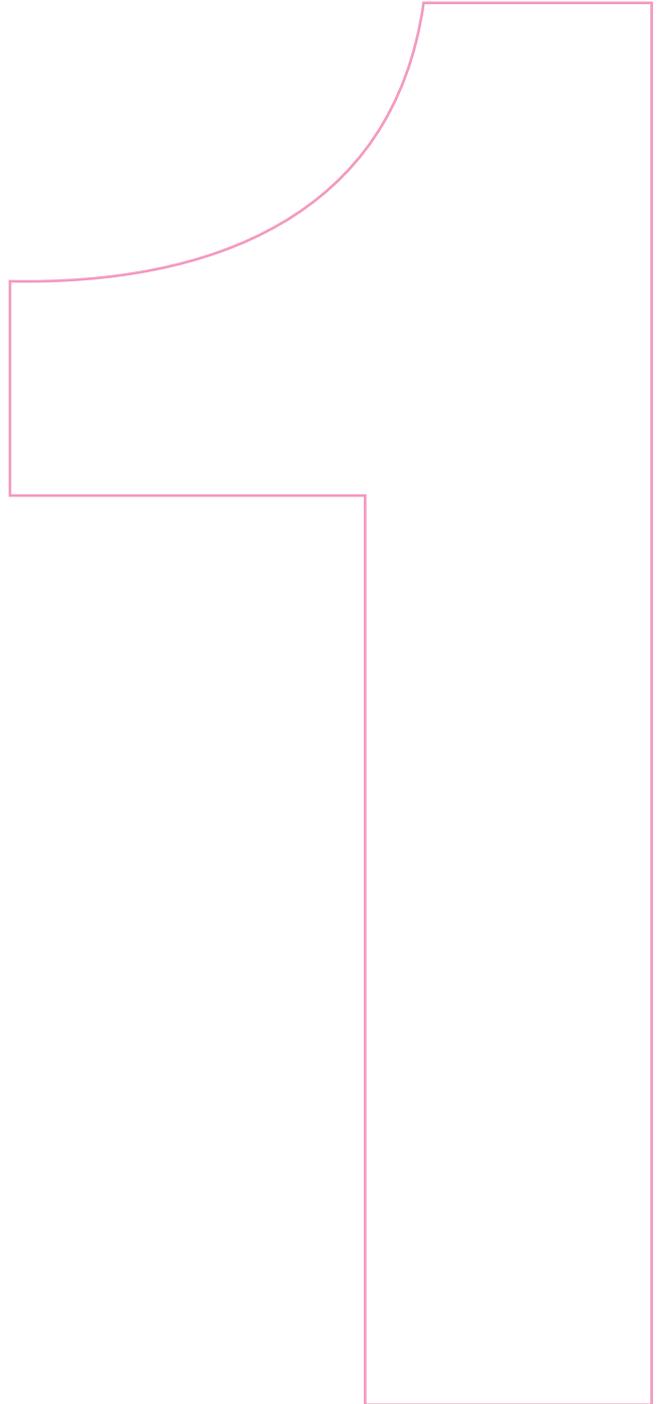
En el presente documento, se utilizan de manera inclusiva los términos como “el docente”, “el estudiante”, “el profesor”, “el alumno”, “el compañero” y sus respectivos plurales (así como otras palabras equivalentes en el contexto educativo); es decir, se refieren a hombres y mujeres.

Esta opción obedece a que no existe acuerdo universal respecto de cómo evitar la discriminación de géneros en el idioma español, salvo usando “o/a”, “los/las” y otras similares para referirse a ambos sexos en conjunto, y ese tipo de fórmulas supone una saturación gráfica que puede dificultar la comprensión de la lectura.

Matemática

Programa de Estudio
Primer Año Medio

Ministerio de Educación





Estimados profesores y profesoras:

La entrega de nuevos programas es una buena ocasión para reflexionar acerca de los desafíos que enfrentamos hoy como educadores en nuestro país.

La escuela tiene por objeto permitir a todos los niños de Chile acceder a una vida plena, ayudándolos a alcanzar un desarrollo integral que comprende los aspectos espiritual, ético, moral, afectivo, intelectual, artístico y físico. Es decir, se aspira a lograr un conjunto de aprendizajes cognitivos y no cognitivos que permitan a los alumnos enfrentar su vida de la mejor forma posible.

Los presentes Programas de Estudio, aprobados por el Consejo Nacional de Educación, buscan efectivamente abrir el mundo a nuestros niños, con un fuerte énfasis en las herramientas clave, como la lectura, la escritura y el razonamiento matemático. El manejo de estas habilidades de forma transversal a todos los ámbitos, escolares y no escolares, contribuye directamente a disminuir las brechas existentes y garantizan a los alumnos una trayectoria de aprendizaje continuo más allá de la escuela.

Asimismo, el acceso a la comprensión de su pasado y su presente, y del mundo que los rodea, constituye el fundamento para reafirmar la confianza en sí mismos, actuar de acuerdo a valores y normas de convivencia cívica, conocer y respetar deberes y derechos, asumir compromisos y diseñar proyectos de vida que impliquen actuar responsablemente sobre su entorno social y natural. Los presentes Programas de Estudio son la concreción de estas ideas y se enfocan a su logro.

Sabemos que incrementar el aprendizaje de todos nuestros alumnos requiere mucho trabajo; llamamos a nuestros profesores a renovar su compromiso con esta tarea y también a enseñar a sus estudiantes que el esfuerzo personal, realizado en forma sostenida y persistente, es la mejor garantía para lograr éxito en lo que nos proponemos. Pedimos a los alumnos que estudien con intensidad, dedicación, ganas de aprender y de formarse hacia el futuro. A los padres y apoderados los animamos a acompañar a sus hijos en las actividades escolares, a comprometerse con su establecimiento educacional y a exigir un buen nivel de enseñanza. Estamos convencidos de que una educación de verdad se juega en la sala de clases y con el compromiso de todos los actores del sistema escolar.

A todos los invitamos a estudiar y conocer en profundidad estos Programas de Estudio, y a involucrarse de forma optimista en las tareas que estos proponen. Con el apoyo de ustedes, estamos seguros de lograr una educación de mayor calidad y equidad para todos nuestros niños.



Felipe Bulnes Serrano
Ministro de Educación de Chile

Matemática

Programa de Estudio para Primer Año Medio
Unidad de Currículum y Evaluación

ISBN 978-956-292-326-2

Ministerio de Educación, República de Chile
Alameda 1371, Santiago
Primera Edición: 2011

Índice

Presentación	6	
Nociones Básicas	8	Aprendizajes como integración de conocimientos, habilidades y actitudes
	10	Objetivos Fundamentales Transversales
	11	Mapas de Progreso
Consideraciones Generales para Implementar el Programa	13	
	16	Orientaciones para planificar
	19	Orientaciones para evaluar
Matemática	24	Propósitos
	25	Habilidades
	26	Orientaciones didácticas
Visión Global del Año	28	Aprendizajes Esperados por semestre y unidad
Unidades	31	
Semestre 1	33	Unidad 1 Números
	45	Unidad 2 Álgebra
Semestre 2	57	Unidad 3 Geometría
	68	Unidad 4 Datos y Azar
Bibliografía	85	
Anexos	91	

Presentación

El programa es una propuesta para lograr los Objetivos Fundamentales y los Contenidos Mínimos Obligatorios

El programa de estudio ofrece una propuesta para organizar y orientar el trabajo pedagógico del año escolar. Esta propuesta pretende promover el logro de los Objetivos Fundamentales (OF) y el desarrollo de los Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO) que define el Marco Curricular¹.

La ley dispone que cada establecimiento puede elaborar sus propios programas de estudio, previa aprobación de los mismos por parte del Mineduc. El presente programa constituye una propuesta para aquellos establecimientos que no cuentan con programas propios.

Los principales componentes que conforman la propuesta del programa son:

- › una especificación de los aprendizajes que se deben lograr para alcanzar los OF y los CMO del Marco Curricular, lo que se expresa a través de los Aprendizajes Esperados²
- › una organización temporal de estos aprendizajes en semestres y unidades
- › una propuesta de actividades de aprendizaje y de evaluación, a modo de sugerencia

Además, se presenta un conjunto de elementos para orientar el trabajo pedagógico que se realiza a partir del programa y para promover el logro de los objetivos que este propone.

Este programa de estudio incluye:

- › **Nociones básicas.** Esta sección presenta conceptos fundamentales que están en la base del Marco Curricular y, a la vez, ofrece una visión general acerca de la función de los Mapas de Progreso
- › **Consideraciones generales para implementar el programa.** Consisten en orientaciones relevantes para trabajar con el programa y organizar el trabajo en torno a él

1 Decretos supremos 254 y 256 de 2009

2 En algunos casos, estos aprendizajes están formulados en los mismos términos que algunos de los OF del Marco Curricular. Esto ocurre cuando esos OF se pueden desarrollar íntegramente en una misma unidad de tiempo, sin que sea necesario su desglose en definiciones más específicas.

- › **Propósitos, habilidades y orientaciones didácticas.** Esta sección presenta sintéticamente los propósitos y sentidos sobre los que se articulan los aprendizajes del sector y las habilidades a desarrollar. También entrega algunas orientaciones pedagógicas importantes para implementar el programa en el sector
- › **Visión global del año.** Presenta todos los Aprendizajes Esperados que se debe desarrollar durante el año, organizados de acuerdo a unidades
- › **Unidades.** Junto con especificar los Aprendizajes Esperados propios de la unidad, incluyen indicadores de evaluación y sugerencias de actividades que apoyan y orientan el trabajo destinado a promover estos aprendizajes³
- › **Instrumentos y ejemplos de evaluación.** Ilustran formas de apreciar el logro de los Aprendizajes Esperados y presentan diversas estrategias que pueden usarse para este fin
- › **Material de apoyo sugerido.** Se trata de recursos bibliográficos y electrónicos que pueden emplearse para promover los aprendizajes del sector; se distingue entre los que sirven al docente y los destinados a los estudiantes

3 Relaciones interdisciplinarias. En algunos casos las actividades relacionan dos o más sectores y se simbolizan con 

Nociones Básicas

Aprendizajes como integración de conocimientos, habilidades y actitudes

Habilidades, conocimientos y actitudes...

Los aprendizajes que promueven el Marco Curricular y los programas de estudio apuntan a un desarrollo integral de los estudiantes. Para tales efectos, esos aprendizajes involucran tanto los conocimientos propios de la disciplina como las habilidades y actitudes.

...movilizados para enfrentar diversas situaciones y desafíos...

Se busca que los estudiantes pongan en juego estos conocimientos, habilidades y actitudes para enfrentar diversos desafíos, tanto en el contexto del sector de aprendizaje como al desenvolverse en su entorno. Esto supone orientarlos hacia el logro de competencias, entendidas como la movilización de dichos elementos para realizar de manera efectiva una acción determinada.

...y que se desarrollan de manera integrada

Se trata una noción de aprendizaje de acuerdo con la cual los conocimientos, las habilidades y las actitudes se desarrollan de manera integrada y, a la vez, se enriquecen y potencian de forma recíproca.

Deben promoverse de manera sistemática

Las habilidades, los conocimientos y las actitudes no se adquieren espontáneamente al estudiar las disciplinas. Necesitan promoverse de manera metódica y estar explícitas en los propósitos que articulan el trabajo de los docentes.

HABILIDADES

Son importantes, porque...

Son fundamentales en el actual contexto social

...el aprendizaje involucra no solo el saber, sino también el saber hacer. Por otra parte, la continua expansión y la creciente complejidad del conocimiento demandan cada vez más capacidades de pensamiento que permitan, entre otros aspectos, usar la información de manera apropiada y rigurosa, examinar críticamente las diversas fuentes de información disponibles y adquirir y generar nuevos conocimientos.

Esta situación hace relevante la promoción de diversas habilidades, como resolver problemas, formular conjeturas, realizar cálculos en forma mental y escrita y verificar proposiciones simples, entre otras.

Se deben desarrollar de manera integrada, porque...

Permiten poner en juego los conocimientos

...sin esas habilidades, los conocimientos y conceptos que puedan adquirir los alumnos resultan elementos inertes; es decir, elementos que no pueden poner en juego para comprender y enfrentar las diversas situaciones a las que se ven expuestos.

CONOCIMIENTOS

Son importantes, porque...

...los conceptos de las disciplinas o sectores de aprendizaje enriquecen la comprensión de los estudiantes sobre los fenómenos que les toca enfrentar. Les permiten relacionarse con el entorno, utilizando nociones complejas y profundas que complementan, de manera crucial, el saber que han obtenido por medio del sentido común y la experiencia cotidiana. Además, estos conceptos son fundamentales para que los alumnos construyan nuevos aprendizajes.

Enriquecen la comprensión y la relación con el entorno

Por ejemplo, si se observa una información en un diario que contenga datos representados en tablas o gráficos, el estudiante utiliza sus conocimientos sobre estadística para interpretar a esa información. Los conocimientos previos le capacitan para predecir sobre lo que va a leer para luego verificar sus predicciones en la medida que entiende la información y así construir este nuevo conocimiento.

Se deben desarrollar de manera integrada, porque...

...son una condición para el progreso de las habilidades. Ellas no se desarrollan en un vacío, sino sobre la base de ciertos conceptos o conocimientos.

Son una base para el desarrollo de habilidades

ACTITUDES

Son importantes, porque...

...los aprendizajes no involucran únicamente la dimensión cognitiva. Siempre están asociados con las actitudes y disposiciones de los alumnos. Entre los propósitos establecidos para la educación, se contempla el desarrollo en los ámbitos personal, social, ético y ciudadano. Ellos incluyen aspectos de carácter afectivo y, a la vez, ciertas disposiciones.

Están involucradas en los propósitos formativos de la educación

A modo de ejemplo, los aprendizajes de Matemática involucran actitudes como perseverancia, rigor, flexibilidad y originalidad al resolver problemas matemáticos, trabajo en equipo e iniciativa personal en la resolución de problemas en contextos diversos y respeto por ideas distintas a las propias.

Se deben enseñar de manera integrada, porque...

...en muchos casos requieren de los conocimientos y las habilidades para su desarrollo. Esos conocimientos y habilidades entregan herramientas para elaborar juicios informados, analizar críticamente diversas circunstancias y contrastar criterios y decisiones, entre otros aspectos involucrados en este proceso.

Son enriquecidas por los conocimientos y las habilidades

Orientan la forma de usar los conocimientos y las habilidades

A la vez, las actitudes orientan el sentido y el uso que cada alumno otorgue a los conocimientos y las habilidades adquiridos. Son, por lo tanto, un antecedente necesario para usar constructivamente estos elementos.

Objetivos Fundamentales Transversales (OFT)

Son propósitos generales definidos en el currículum...

Son aprendizajes que tienen un carácter comprensivo y general, y apuntan al desarrollo personal, ético, social e intelectual de los estudiantes. Forman parte constitutiva del currículum nacional y, por lo tanto, los establecimientos deben asumir la tarea de promover su logro.

...que deben promoverse en toda la experiencia escolar

Los OFT no se logran a través de un sector de aprendizaje en particular; conseguirlos depende del conjunto del currículum. Deben promoverse a través de las diversas disciplinas y en las distintas dimensiones del quehacer educativo (por ejemplo, por medio del proyecto educativo institucional, la práctica docente, el clima organizacional, la disciplina o las ceremonias escolares).

Integran conocimientos, habilidades y actitudes

No se trata de objetivos que incluyan únicamente actitudes y valores. Supone integrar esos aspectos con el desarrollo de conocimientos y habilidades.

Se organizan en una matriz común para educación básica y media

A partir de la actualización al Marco Curricular realizada el año 2009, estos objetivos se organizaron bajo un esquema común para la Educación Básica y la Educación Media. De acuerdo con este esquema, los Objetivos Fundamentales Transversales se agrupan en cinco ámbitos: crecimiento y autoafirmación personal, desarrollo del pensamiento, formación ética, la persona y su entorno y tecnologías de la información y la comunicación.

Mapas de Progreso

Son descripciones generales que señalan cómo progresan habitualmente los aprendizajes en las áreas clave de un sector determinado. Se trata de formulaciones sintéticas que se centran en los aspectos esenciales de cada sector. A partir de esto, ofrecen una visión panorámica sobre la progresión del aprendizaje en los doce años de escolaridad⁴.

Describen sintéticamente cómo progresa el aprendizaje...

Los Mapas de Progreso no establecen aprendizajes adicionales a los definidos en el Marco Curricular y los programas de estudio. El avance que describen expresa de manera más gruesa y sintética los aprendizajes que esos dos instrumentos establecen y, por lo tanto, se inscribe dentro de lo que se plantea en ellos. Su particularidad consiste en que entregan una visión de conjunto sobre la progresión esperada en todo el sector de aprendizaje.

...de manera congruente con el Marco Curricular y los programas de estudio

¿Qué utilidad tienen los Mapas de Progreso para el trabajo de los docentes?

Pueden ser un apoyo importante para definir objetivos adecuados y para evaluar (ver las Orientaciones para Planificar y las Orientaciones para Evaluar que se presentan en el programa).

Sirven de apoyo para planificar y evaluar...

Además, son un referente útil para atender a la diversidad de estudiantes dentro del aula:

- ▶ permiten más que simplemente constatar que existen distintos niveles de aprendizaje dentro de un mismo curso. Si se usan para analizar los desempeños de los estudiantes, ayudan a caracterizar e identificar con mayor precisión en qué consisten esas diferencias
- ▶ la progresión que describen permite reconocer cómo orientar los aprendizajes de los distintos grupos del mismo curso; es decir, de aquellos que no han conseguido el nivel esperado y de aquellos que ya lo alcanzaron o lo superaron
- ▶ expresan el progreso del aprendizaje en un área clave del sector, de manera sintética y alineada con el Marco Curricular

...y para atender la diversidad al interior del curso

4 Los Mapas de Progreso describen en siete niveles el crecimiento habitual del aprendizaje de los estudiantes en un ámbito o eje del sector. Cada uno de estos niveles presenta una expectativa de aprendizaje correspondiente a dos años de escolaridad. Por ejemplo, el Nivel 1 corresponde al logro que se espera para la mayoría de los niños y niñas al término de 2º básico; el Nivel 2 corresponde al término de 4º básico, y así sucesivamente. El Nivel 7 describe el aprendizaje de un alumno o alumna que, al egresar de la Educación Media, es “sobresaliente”, es decir, va más allá de la expectativa para IV medio que describe el Nivel 6 en cada mapa.

Relación entre Mapa de Progreso, Programa de Estudio y Marco Curricular

MARCO CURRICULAR

Prescribe los Objetivos Fundamentales y los Contenidos Mínimos Obligatorios que todos los estudiantes deben lograr.

Ejemplo:

Objetivo Fundamental I medio

Representar números racionales en la recta numérica; usar la representación decimal y de fracción de un racional, justificando la transformación de una en otra; aproximar números racionales, aplicar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números racionales en situaciones diversas y demostrar algunas de sus propiedades.

Contenido Mínimo Obligatorio

Representación de números racionales en la recta numérica; verificación de la cerradura de la adición, sustracción, multiplicación y división en los racionales.

MAPA DE PROGRESO

Entrega una visión sintética del progreso del aprendizaje en un área clave del sector, y se ajusta a las expectativas del Marco Curricular.

Ejemplo:

Mapa de Progreso Números y Operaciones

Nivel 7 Comprende los diferentes conjuntos numéricos.

Nivel 6 Reconoce los números complejos como...

Nivel 5 Reconoce a los números racionales como un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no admiten solución en los enteros; a los irracionales como un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no admiten solución en los racionales, y a los reales como la unión entre racionales e irracionales. Interpreta potencias de base racional y exponente racional, raíces enésimas y logaritmos, establece relaciones entre ellos y los utiliza para resolver diversos problemas. Realiza operaciones con números reales, calcula potencias, raíces y logaritmos y los aplica en diversos contextos.

Resuelve problemas, utilizando estrategias que implican descomponer un problema o situaciones propuestas en partes o sub problemas. Argumenta sus estrategias o procedimientos y utiliza ejemplos y contraejemplos para verificar la validez o la falsedad de conjeturas.

Nivel 4 Reconoce a los números enteros como...

Nivel 3 Reconoce que los números naturales...

Nivel 2 Utiliza los números naturales hasta 1.000...

PROGRAMA DE ESTUDIO

Orienta la labor pedagógica, estableciendo Aprendizajes Esperados que dan cuenta de los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos, y los organiza temporalmente a través de unidades.

Ejemplo:

Aprendizaje Esperado I medio

Aplicar las cuatro operaciones aritméticas con números racionales en situaciones diversas; aproximar los resultados, reconociendo las limitaciones de la calculadora.

Consideraciones Generales para Implementar el Programa

Las orientaciones que se presentan a continuación destacan algunos elementos relevantes al momento de implementar el programa. Algunas de estas orientaciones se vinculan estrechamente con algunos de los OFT contemplados en el currículum.

La lectura, la escritura y la comunicación oral deben promoverse en los distintos sectores de aprendizaje

Uso del lenguaje

Los docentes deben promover el ejercicio de la comunicación oral, la lectura y la escritura como parte constitutiva del trabajo pedagógico correspondiente a cada sector de aprendizaje.

Esto se justifica, porque las habilidades de comunicación son herramientas fundamentales que los estudiantes deben emplear para alcanzar los aprendizajes propios de cada sector. Se trata de habilidades que no se desarrollan únicamente en el contexto del sector Lenguaje y Comunicación, sino que se consolidan a través del ejercicio en diversos espacios y en torno a distintos temas y, por lo tanto, involucran los otros sectores de aprendizaje del currículum.

Estas habilidades se pueden promover de diversas formas

Al momento de recurrir a la lectura, la escritura y la comunicación oral, los docentes deben procurar:

LECTURA

- › la lectura de distintos tipos de textos relevantes para el sector (textos informativos propios del sector, textos periodísticos y narrativos, tablas y gráficos)
- › la lectura de textos de creciente complejidad en los que se utilicen conceptos especializados del sector
- › la identificación de las ideas principales y la localización de información relevante
- › la realización de resúmenes y la síntesis de las ideas y argumentos presentados en los textos
- › la búsqueda de información en fuentes escritas, discriminándola y seleccionándola de acuerdo a su pertinencia
- › la comprensión y el dominio de nuevos conceptos y palabras

ESCRITURA

- › la escritura de textos de diversa extensión y complejidad (por ejemplo, reportes, ensayos, descripciones, respuestas breves)
- › la organización y presentación de información a través de esquemas o tablas
- › la presentación de las ideas de una manera coherente y clara
- › el uso apropiado del vocabulario en los textos escritos
- › el uso correcto de la gramática y de la ortografía

COMUNICACIÓN ORAL

- › la capacidad de exponer ante otras personas
- › la expresión de ideas y conocimientos de manera organizada
- › el desarrollo de la argumentación al formular ideas y opiniones
- › el uso del lenguaje con niveles crecientes de precisión, incorporando los conceptos propios del sector
- › el planteamiento de preguntas para expresar dudas e inquietudes y para superar dificultades de comprensión
- › la disposición para escuchar información de manera oral, manteniendo la atención durante el tiempo requerido
- › la interacción con otras personas para intercambiar ideas, analizar información y elaborar conexiones en relación con un tema en particular, compartir puntos de vista y lograr acuerdos

Uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs)

Debe impulsarse el uso de las TICs a través de los sectores de aprendizaje

Se puede recurrir a diversas formas de utilización de estas tecnologías

El desarrollo de las capacidades para utilizar las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs) está contemplado de manera explícita como uno de los Objetivos Fundamentales Transversales del Marco Curricular. Esto demanda que el dominio y uso de estas tecnologías se promueva de manera integrada al trabajo que se realiza al interior de los sectores de aprendizaje. Para esto, se debe procurar que la labor de los estudiantes incluya el uso de las TICs para:

- › buscar, acceder y recolectar información en páginas web u otras fuentes, y seleccionar esta información, examinando críticamente su relevancia y calidad
- › procesar y organizar datos, utilizando plantillas de cálculo, y manipular la información sistematizada en ellas para identificar tendencias, regularidades y patrones relativos a los fenómenos estudiados en el sector
- › desarrollar y presentar información a través del uso de procesadores de texto, plantillas de presentación (power point) y herramientas y aplicaciones de imagen, audio y video
- › intercambiar información a través de las herramientas que ofrece internet, como correo electrónico, chat, espacios interactivos en sitios web o comunidades virtuales
- › respetar y asumir consideraciones éticas en el uso de las TICs, como el cuidado personal y el respeto por el otro, señalar las fuentes de donde se obtiene la información y respetar las normas de uso y de seguridad de los espacios virtuales

Atención a la diversidad

En el trabajo pedagógico, el docente debe tomar en cuenta la diversidad entre los estudiantes en términos culturales, sociales, étnicos o religiosos, y respecto de estilos de aprendizaje y niveles de conocimiento.

Esa diversidad conlleva desafíos que los profesores tienen que contemplar. Entre ellos, cabe señalar:

- › promover el respeto a cada uno de los estudiantes, en un contexto de tolerancia y apertura, evitando las distintas formas de discriminación
- › procurar que los aprendizajes se desarrollen en relación con el contexto y la realidad de los estudiantes
- › intentar que todos los alumnos logren los objetivos de aprendizaje señalados en el currículum, pese a la diversidad que se manifiesta entre ellos

Atención a la diversidad y promoción de aprendizajes

Se debe tener en cuenta que atender a la diversidad de estilos y ritmos de aprendizaje no implica “expectativas más bajas” para algunos estudiantes. Por el contrario, la necesidad de educar en forma diferenciada aparece al constatar que hay que reconocer los requerimientos didácticos personales de los alumnos, para que todos alcancen altas expectativas. Se aspira a que todos los estudiantes alcancen los aprendizajes dispuestos para su nivel o grado.

En atención a lo anterior, es conveniente que, al momento de diseñar el trabajo en una unidad, el docente considere que precisarán más tiempo o métodos diferentes para que algunos estudiantes logren estos aprendizajes. Para esto, debe desarrollar una planificación inteligente que genere las condiciones que le permitan:

- › conocer los diferentes niveles de aprendizaje y conocimientos previos de los estudiantes
- › evaluar y diagnosticar en forma permanente para reconocer las necesidades de aprendizaje
- › definir la excelencia, considerando el progreso individual como punto de partida
- › incluir combinaciones didácticas (agrupamientos, trabajo grupal, rincones) y materiales diversos (visuales, objetos manipulables)
- › evaluar de distintas maneras a los alumnos y dar tareas con múltiples opciones
- › promover la confianza de los alumnos en sí mismos
- › promover un trabajo sistemático por parte de los estudiantes y ejercitación abundante

La diversidad entre estudiantes establece desafíos que deben tomarse en consideración

Es necesario atender a la diversidad para que todos logren los aprendizajes

Esto demanda conocer qué saben y, sobre esa base, definir con flexibilidad las diversas medidas pertinentes

Orientaciones para planificar

La planificación favorece el logro de los aprendizajes

La planificación es un elemento central en el esfuerzo por promover y garantizar los aprendizajes de los estudiantes. Permite maximizar el uso del tiempo y definir los procesos y recursos necesarios para lograr los aprendizajes que se debe alcanzar.

El programa sirve de apoyo a la planificación a través de un conjunto de elementos elaborados para este fin

Los programas de estudio del Ministerio de Educación constituyen una herramienta de apoyo al proceso de planificación. Para estos efectos, han sido elaborados como un material flexible que los profesores pueden adaptar a su realidad en los distintos contextos educativos del país.

El principal referente que entrega el programa de estudio para planificar son los Aprendizajes Esperados. De manera adicional, el programa apoya la planificación a través de la propuesta de unidades, de la estimación del tiempo cronológico requerido en cada una y de la sugerencia de actividades para desarrollar los aprendizajes.

CONSIDERACIONES GENERALES PARA REALIZAR LA PLANIFICACIÓN

Se debe planificar tomando en cuenta la diversidad, el tiempo real, las prácticas anteriores y los recursos disponibles

La planificación es un proceso que se recomienda realizar, considerando los siguientes aspectos:

- › la diversidad de niveles de aprendizaje que han alcanzado los estudiantes del curso, lo que implica planificar considerando desafíos para los distintos grupos de alumnos
- › el tiempo real con que se cuenta, de manera de optimizar el tiempo disponible
- › las prácticas pedagógicas que han dado resultados satisfactorios
- › los recursos para el aprendizaje con que se cuenta: textos escolares, materiales didácticos, recursos elaborados por la escuela o aquellos que es necesario diseñar; laboratorio y materiales disponibles en el Centro de Recursos de Aprendizaje (CRA), entre otros

SUGERENCIAS PARA EL PROCESO DE PLANIFICACIÓN

Lograr una visión lo más clara y concreta posible sobre los desempeños que dan cuenta de los aprendizajes...

Para que la planificación efectivamente ayude al logro de los aprendizajes, debe estar centrada en torno a ellos y desarrollarse a partir de una visión clara de lo que los alumnos deben aprender. Para alcanzar este objetivo, se recomienda elaborar la planificación en los siguientes términos:

- › comenzar por una especificación de los Aprendizajes Esperados que no se limite a listarlos. Una vez identificados, es necesario desarrollar una idea lo más clara posible de las expresiones concretas que puedan tener. Esto implica reconocer qué desempeños de los estudiantes demuestran el logro de los aprendizajes. Se deben poder responder preguntas como ¿qué deberían

ser capaces de demostrar los estudiantes que han logrado un determinado Aprendizaje Esperado?, ¿qué habría que observar para saber que un aprendizaje ha sido logrado?

- › a partir de las respuestas a esas preguntas, decidir las evaluaciones a realizar y las estrategias de enseñanza. Específicamente, se requiere identificar qué tarea de evaluación es más pertinente para observar el desempeño esperado y qué modalidades de enseñanza facilitarán alcanzar este desempeño. De acuerdo a este proceso, se debe definir las evaluaciones formativas y sumativas, las actividades de enseñanza y las instancias de retroalimentación

...y, sobre esa base, decidir las evaluaciones, las estrategias de enseñanza y la distribución temporal

Los docentes pueden complementar los programas con los Mapas de Progreso, que entregan elementos útiles para reconocer el tipo de desempeño asociado a los aprendizajes.

Se sugiere que la forma de plantear la planificación arriba propuesta se use tanto en la planificación anual como en la correspondiente a cada unidad y al plan de cada clase.

La planificación anual

En este proceso, el docente debe distribuir los Aprendizajes Esperados a lo largo del año escolar, considerando su organización por unidades; estimar el tiempo que se requerirá para cada unidad y priorizar las acciones que conducirán a logros académicos significativos.

Para esto, el docente tiene que:

- › alcanzar una visión sintética del conjunto de aprendizajes a lograr durante el año, dimensionando el tipo de cambio que se debe observar en los estudiantes. Esto debe desarrollarse a partir de los Aprendizajes Esperados especificados en los programas. Los Mapas de Progreso pueden resultar un apoyo importante
- › identificar, en términos generales, el tipo de evaluación que se requerirá para verificar el logro de los aprendizajes. Esto permitirá desarrollar una idea de las demandas y los requerimientos a considerar para cada unidad
- › sobre la base de esta visión, asignar los tiempos a destinar a cada unidad. Para que esta distribución resulte lo más realista posible, se recomienda:
 - listar días del año y horas de clase por semana para estimar el tiempo disponible
 - elaborar una calendarización tentativa de los Aprendizajes Esperados para el año completo, considerando los feriados, los días de prueba y de repaso, y la realización de evaluaciones formativas y retroalimentación
 - hacer una planificación gruesa de las actividades a partir de la calendarización
 - ajustar permanentemente la calendarización o las actividades planificadas

Realizar este proceso con una visión realista de los tiempos disponibles durante el año

La planificación de la unidad

Realizar este proceso sin perder de vista la meta de aprendizaje de la unidad

Implica tomar decisiones más precisas sobre qué enseñar y cómo enseñar, considerando la necesidad de ajustarlas a los tiempos asignados a la unidad.

La planificación de la unidad debiera seguir los siguientes pasos:

- › especificar la meta de la unidad. Al igual que la planificación anual, esta visión debe sustentarse en los Aprendizajes Esperados de la unidad y se recomienda complementarla con los Mapas de Progreso
- › crear una evaluación sumativa para la unidad
- › idear una herramienta de diagnóstico de comienzos de la unidad
- › calendarizar los Aprendizajes Esperados por semana
- › establecer las actividades de enseñanza que se desarrollarán
- › generar un sistema de seguimiento de los Aprendizajes Esperados, especificando los tiempos y las herramientas para realizar evaluaciones formativas y retroalimentación
- › ajustar el plan continuamente ante los requerimientos de los estudiantes

La planificación de clase

Procurar que los estudiantes sepan qué y por qué van a aprender, qué aprendieron y de qué manera

Es imprescindible que cada clase sea diseñada considerando que todas sus partes estén alineadas con los Aprendizajes Esperados que se busca promover y con la evaluación que se utilizará.

Adicionalmente, se recomienda que cada clase sea diseñada distinguiendo su inicio, desarrollo y cierre y especificando claramente qué elementos se considerarán en cada una de estas partes. Se requiere considerar aspectos como los siguientes:

- › **inicio:** en esta fase, se debe procurar que los estudiantes conozcan el propósito de la clase; es decir, qué se espera que aprendan. A la vez, se debe buscar captar el interés de los estudiantes y que visualicen cómo se relaciona lo que aprenderán con lo que ya saben y con las clases anteriores
- › **desarrollo:** en esta etapa, el docente lleva a cabo la actividad contemplada para la clase
- › **cierre:** este momento puede ser breve (5 a 10 minutos), pero es central. En él se debe procurar que los estudiantes se formen una visión acerca de qué aprendieron y cuál es la utilidad de las estrategias y experiencias desarrolladas para promover su aprendizaje.

Orientaciones para evaluar

La evaluación forma parte constitutiva del proceso de enseñanza. No se debe usar solo como un medio para controlar qué saben los estudiantes, sino que cumple un rol central en la promoción y el desarrollo del aprendizaje. Para que cumpla efectivamente con esta función, debe tener como objetivos:

- › ser un recurso para medir progreso en el logro de los aprendizajes
- › proporcionar información que permita conocer fortalezas y debilidades de los alumnos y, sobre esa base, retroalimentar la enseñanza y potenciar los logros esperados dentro del sector
- › ser una herramienta útil para la planificación

Apoya el proceso de aprendizaje al permitir su monitoreo, retroalimentar a los estudiantes y sustentar la planificación

¿CÓMO PROMOVER EL APRENDIZAJE A TRAVÉS DE LA EVALUACIÓN?

Las evaluaciones adquieren su mayor potencial para promover el aprendizaje si se llevan a cabo considerando lo siguiente:

- › informar a los alumnos sobre los aprendizajes que se evaluarán. Esto facilita que puedan orientar su actividad hacia conseguir los aprendizajes que deben lograr
- › elaborar juicios sobre el grado en que se logran los aprendizajes que se busca alcanzar, fundados en el análisis de los desempeños de los estudiantes. Las evaluaciones entregan información para conocer sus fortalezas y debilidades. El análisis de esta información permite tomar decisiones para mejorar los resultados alcanzados
- › retroalimentar a los alumnos sobre sus fortalezas y debilidades. Compartir esta información con los estudiantes permite orientarlos acerca de los pasos que debe seguir para avanzar. También da la posibilidad de desarrollar procesos metacognitivos y reflexivos destinados a favorecer sus propios aprendizajes; a su vez, esto facilita involucrarse y comprometerse con ellos

Explicitar qué se evaluará

Identificar logros y debilidades

Ofrecer retroalimentación

¿CÓMO SE PUEDEN ARTICULAR LOS MAPAS DE PROGRESO DEL APRENDIZAJE CON LA EVALUACIÓN?

Los Mapas de Progreso ponen a disposición de las escuelas de todo el país un mismo referente para observar el desarrollo del aprendizaje de los alumnos y los ubican en un continuo de progreso. Los Mapas de Progreso apoyan el seguimiento de los aprendizajes, en tanto permiten:

- › reconocer aquellos aspectos y dimensiones esenciales de evaluar
- › aclarar la expectativa de aprendizaje nacional, al conocer la descripción de cada nivel, sus ejemplos de desempeño y el trabajo concreto de estudiantes que ilustran esta expectativa

Los mapas apoyan diversos aspectos del proceso de evaluación

- › observar el desarrollo, la progresión o el crecimiento de las competencias de un alumno, al constatar cómo sus desempeños se van desplazando en el mapa
- › contar con modelos de tareas y preguntas que permitan a cada alumno evidenciar sus aprendizajes

¿CÓMO DISEÑAR LA EVALUACIÓN?

La evaluación debe diseñarse a partir de los Aprendizajes Esperados, con el objeto de observar en qué grado se alcanzan. Para lograrlo, se recomienda diseñar la evaluación junto a la planificación y considerar las siguientes preguntas:

Partir estableciendo los Aprendizajes Esperados a evaluar...

› **¿Cuáles son los Aprendizajes Esperados del programa que abarcará la evaluación?**

Si debe priorizar, considere aquellos aprendizajes que serán duraderos y prerrequisitos para desarrollar otros aprendizajes. Para esto, los Mapas de Progreso pueden ser de especial utilidad

› **¿Qué evidencia necesitarían exhibir sus estudiantes para demostrar que dominan los Aprendizajes Esperados?**

Se recomienda utilizar como apoyo los Indicadores de Evaluación sugeridos que presenta el programa.

...y luego decidir qué se requiere para su evaluación en términos de evidencias, métodos, preguntas y criterios

› **¿Qué método empleará para evaluar?**

Es recomendable utilizar instrumentos y estrategias de diverso tipo (pruebas escritas, guías de trabajo, informes, ensayos, entrevistas, debates, mapas conceptuales, informes de laboratorio e investigaciones, entre otros).

En lo posible, se deben presentar situaciones que pueden resolverse de distintas maneras y con diferente grado de complejidad, para que los diversos estudiantes puedan solucionarlas y muestren sus distintos niveles y estilos de aprendizaje.

› **¿Qué preguntas se incluirá en la evaluación?**

Se deben formular preguntas rigurosas y alineadas con los Aprendizajes Esperados, que permitan demostrar la real comprensión del contenido evaluado

› **¿Cuáles son los criterios de éxito?, ¿cuáles son las características de una respuesta de alta calidad?**

Esto se puede responder con distintas estrategias. Por ejemplo:

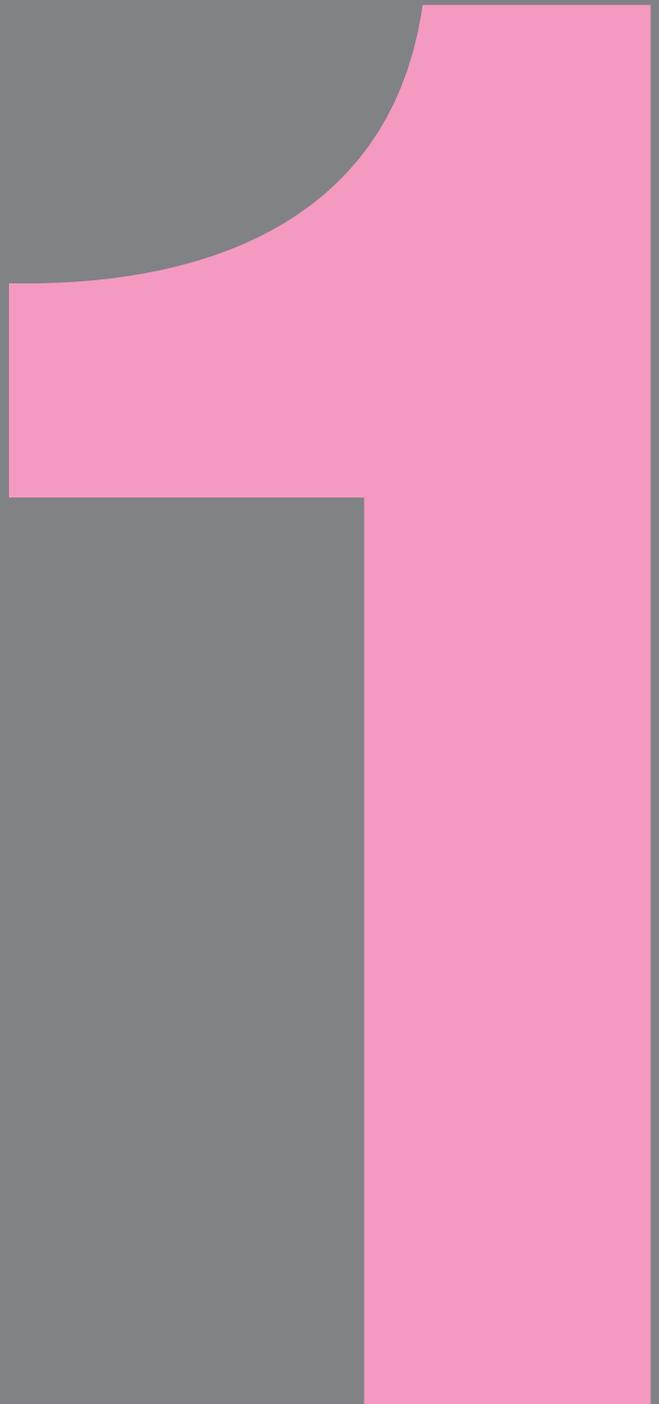
- comparar las respuestas de sus estudiantes con las mejores respuestas de otros alumnos de edad similar. Se pueden usar los ejemplos presentados en los Mapas de Progreso

- identificar respuestas de evaluaciones previamente realizadas que expresen el nivel de desempeño esperado, y utilizarlas como modelo para otras evaluaciones realizadas en torno al mismo aprendizaje
- desarrollar rúbricas⁵ que indiquen los resultados explícitos para un desempeño específico y que muestren los diferentes niveles de calidad para dicho desempeño

5 Rúbrica: tabla o pauta para evaluar

Matemática

Programa de Estudio
Primer Año Medio



Matemática

Propósitos

El aprendizaje de la matemática ayuda a comprender la realidad y proporciona herramientas para desenvolverse en la vida cotidiana. Entre ellas se encuentran el cálculo, el análisis de la información proveniente de diversas fuentes, la capacidad de generalizar situaciones, formular conjeturas, evaluar la validez de resultados y seleccionar estrategias para resolver problemas. Todo esto contribuye a desarrollar un pensamiento lógico, ordenado, crítico y autónomo, y a generar actitudes como precisión, rigurosidad, perseverancia y confianza en sí mismo, que se valoran no solo en la ciencia y la tecnología, sino también en la vida cotidiana.

Aprender matemáticas acrecienta también las habilidades relativas a la comunicación; por una parte, enseña a

presentar información con precisión y rigurosidad y, por otra, a demandar exactitud y rigor en las informaciones y argumentos que se recibe.

El conocimiento matemático y la capacidad para usarlo provocan importantes consecuencias en el desarrollo, el desempeño y la vida de las personas. El entorno social valora el conocimiento matemático y lo asocia a logros, beneficios y capacidades de orden superior. Aprender matemática influye en el concepto que niños, jóvenes y adultos construyen sobre sí mismos y sus capacidades; por lo tanto, contribuye a que la persona se sienta un ser autónomo y valioso. En consecuencia, la calidad, la pertinencia y la amplitud de ese conocimiento afecta las posibilidades y la

HABILIDADES DE PENSAMIENTO MATEMÁTICO

4° BÁSICO

Resolver problemas en contextos significativos que requieren el uso de los contenidos del nivel

5° BÁSICO

Resolver problemas en contextos diversos y significativos

6° BÁSICO

Resolver problemas en contextos significativos

Formular conjeturas y verificarlas, para algunos casos particulares

Formular y verificar conjeturas, en casos particulares

Ordenar números y ubicarlos en la recta numérica

Ordenar números y ubicarlos en la recta numérica

Realizar cálculos en forma mental y escrita

Realizar cálculos en forma mental y escrita

Realizar cálculos en forma mental y escrita

Habilidades

calidad de vida de las personas y afecta el potencial de desarrollo del país.

La matemática ofrece también la posibilidad de trabajar con entes abstractos y sus relaciones, y prepara a los estudiantes para que entiendan el medio y las múltiples relaciones que se dan en un espacio simbólico y físico de complejidad creciente. Se trata de espacios en los que la cultura, la tecnología y las ciencias se redefinen en forma permanente y se hacen más difíciles, y las finanzas, los sistemas de comunicación y los vínculos entre naciones y culturas se relacionan y se globalizan.

Al estudiar matemáticas, el estudiante adquiere el razonamiento lógico, la visualización espacial, el pensamiento analítico, el cálculo, el modelamiento y las destrezas para resolver problemas. La tabla siguiente puede resultar útil para:

- ▶ observar transversalmente las habilidades que se desarrollan en el sector
- ▶ focalizarse en un nivel y diseñar actividades y evaluaciones que enfatizen dichas habilidades
- ▶ situarse en el nivel, observar las habilidades que se pretendió enseñar en los años anteriores y las que se trabajarán más adelante
- ▶ advertir diferencias y similitudes en los énfasis por ciclos de enseñanza

7º BÁSICO	8º BÁSICO	I MEDIO
Resolver problemas en contextos diversos y significativos, utilizando los contenidos del nivel	Resolver problemas en contextos diversos y significativos	Analizar estrategias de resolución de problemas de acuerdo con criterios definidos
Analizar la validez de los procedimientos utilizados y de los resultados obtenidos	Evaluar la validez de los resultados obtenidos y el empleo de dichos resultados para fundamentar opiniones y tomar decisiones	Fundamentar opiniones y tomar decisiones
Ordenar números y ubicarlos en la recta numérica		
Realizar cálculos en forma mental y escrita	Realizar cálculos en forma mental y escrita	
Emplear formas simples de modelamiento matemático	Emplear formas simples de modelamiento matemático	Aplicar modelos lineales que representan la relación entre variables
	Verificar proposiciones simples, para casos particulares	Diferenciar entre verificación y demostración de propiedades

Orientaciones didácticas

Se ha concebido este sector como una oportunidad para que los estudiantes adquieran aprendizajes de vida. La matemática es un área poderosa de la cultura, pues permite comprender, explicar y predecir situaciones y fenómenos del entorno. Por eso, es importante que los docentes se esfuercen para que todos los alumnos del país aprendan los conocimientos y desarrollen las capacidades propias de esta disciplina. Estos programas entregan algunas orientaciones que ayudarán a los profesores a cumplir con este objetivo por medio de la planificación y en el transcurso de las clases.

LOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS: PROFUNDIDAD E INTEGRACIÓN

Los estudiantes deben explorar en las ideas matemáticas y entender que ellas constituyen un todo y no fragmentos aislados del saber. Tienen que enfrentar variadas experiencias para que comprendan en profundidad los conceptos matemáticos, sus conexiones y sus aplicaciones. De esta manera, podrán participar activamente y adquirir mayor confianza para investigar y aplicar las matemáticas. Se recomienda que usen materiales concretos, realicen trabajos prácticos y se apoyen en la tecnología, en especial en el ciclo básico.

EL USO DEL CONTEXTO

Es importante que el docente aclare que esta disciplina está enraizada en la cultura y en la historia; asimismo, que impacta en otras áreas del conocimiento científico, crea consecuencias y permite aplicaciones. Preguntarse cómo se originaron los conceptos y modelos matemáticos, en qué períodos de la historia y cómo se enlazaron con la evolución del pensamiento, es un ancla importante para el aprendizaje. Se recomienda usar analogías y representaciones cercanas a los estudiantes, en especial en las etapas de exploración. También se sugiere aplicar las matemáticas a otras áreas del saber y en la vida diaria como un modo de apoyar la construcción del conocimiento matemático.

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Esta disciplina se construye a partir de regularidades que subyacen a situaciones aparentemente diversas y

ayuda a razonar en vez de actuar de modo mecánico. Por eso es importante invitar a los alumnos a buscar regularidades. También se busca desarrollar y explicar la noción de estrategia, comparar diversas formas de abordar problemas y justificar y demostrar las proposiciones matemáticas. El docente debe procurar, asimismo, que los estudiantes conjeturen y verifiquen cómo se comportan los elementos y las relaciones con que se trabaja. Tienen que analizar los procedimientos para resolver un problema y comprobar resultados, propiedades y relaciones.

Aunque deben ser competentes en diversas habilidades matemáticas, el profesor tiene que evitar que pongan demasiado énfasis en los procedimientos si no comprenden los principios matemáticos correspondientes.

USO DEL ERROR

Usar adecuadamente el error ayuda a crear un ambiente de búsqueda y creación. Un educador puede aprovechar la equivocación para inducir aprendizajes especialmente significativos, si lo hace de manera constructiva. Se debe considerar el error como un elemento concreto para trabajar la diversidad en clases y permitir que todos los alumnos alcancen los aprendizajes propuestos.

APRENDIZAJE MATEMÁTICO Y DESARROLLO PERSONAL

La clase de Matemática ofrece abundantes ocasiones para el autoconocimiento y las interacciones sociales. Es una oportunidad para la metacognición⁶: ¿cómo lo hice?, ¿cómo lo hicieron?, ¿de qué otra manera es posible? Además, la percepción que cada cual tiene de su propia capacidad para aprender y hacer matemática, surge de la retroalimentación que le ha dado la propia experiencia. En ese sentido, el docente tiene en sus manos un poderoso instrumento: reconocer los esfuerzos y los logros de los alumnos. Otros aspectos que también ayudan a que cada estudiante aumente la confianza en sí mismo son valorar las diferencias, aceptar los éxitos o las acciones de sus pares, crear un clima de confianza y distinguir de qué modo enfrenta cada uno el triunfo o el fracaso, sea propio o de los demás.

6 Metacognición: manera de aprender a razonar sobre el propio razonamiento

TECNOLOGÍAS DIGITALES Y APRENDIZAJE MATEMÁTICO

El presente programa propone usar software para ampliar las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes. Estas tecnologías permiten representar nociones abstractas a través de modelos en los que se puede experimentar con ideas matemáticas; también se puede crear situaciones para que los alumnos exploren las características, los límites y las posibilidades de conceptos, relaciones o procedimientos matemáticos. Los procesadores geométricos, simbólicos y de estadística son laboratorios para investigar relaciones y ponerlas a prueba. Con un procesador simbólico, se puede analizar y entender números grandes o muy pequeños. Y se puede estudiar el comportamiento de funciones, incluso las de alta complejidad. Internet ofrece múltiples ambientes con representaciones dinámicas de una gran cantidad

de objetos matemáticos. Los procesadores geométricos permiten experimentar con nociones y relaciones de la geometría euclidiana, cartesiana o vectorial. Se trata de un espacio muy atractivo para los estudiantes y que los ayudará mucho a formarse para una vida cada vez más influida por las tecnologías digitales.

CLIMA Y MOTIVACIÓN

Se debe propiciar un ambiente creativo para que los alumnos formulen, verifiquen o refuten conjeturas respecto de los problemas que abordan. Ese ambiente debe admitir que el error, la duda y la pregunta son importantes y valiosos para construir conocimiento; asimismo, tiene que valorar los aportes de todos y aprovecharlos para crear una búsqueda y una construcción colectiva. En ese espacio será natural analizar acciones y procedimientos y explorar caminos alternativos.

Visión Global del Año

Aprendizajes Esperados por semestre y unidad

Semestre 1

Unidad 1

Números

AE 01

Distinguir problemas que no admiten solución en los números enteros y que pueden ser resueltos en los números racionales.

AE 02

Justificar matemáticamente que los decimales periódicos y semiperiódicos son números racionales.

AE 03

Establecer relaciones de orden entre números racionales.

AE 04

Representar números racionales en la recta numérica.

AE 05

Utilizar la calculadora para realizar cálculos reconociendo sus limitaciones.

AE 06

Verificar la densidad de los números racionales.

AE 07

Verificar la cerradura de las operaciones en los números racionales.

AE 08

Comprender el significado de las potencias de base racional y exponente entero.

AE 09

Resolver problemas en contextos diversos que involucran números racionales o potencias de base racional y exponente entero.

Tiempo estimado

65 horas pedagógicas

Unidad 2

Álgebra

AE 01

Identificar patrones en multiplicaciones de expresiones algebraicas no fraccionarias.

AE 02

Factorizar expresiones algebraicas no fraccionarias.

AE 03

Establecer estrategias para resolver ecuaciones lineales.

AE 04

Analizar representaciones de la función lineal y de la función afín.

AE 05

Realizar composiciones de funciones y establecer algunas propiedades algebraicas de esta operación.

AE 06

Resolver problemas asociados a situaciones cuyos modelos son ecuaciones literales de primer grado.

Tiempo estimado

70 horas pedagógicas

Semestre 2

Unidad 3

Geometría

AE 01

Identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico.

AE 02

Representar en el plano, adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar.

AE 03

Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.

AE 04

Identificar regularidades en la aplicación de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano.

AE 05

Formular y verificar conjeturas acerca de la aplicación de transformaciones isométricas a figuras geométricas en el plano cartesiano.

AE 06

Establecer el concepto de congruencia a partir de las transformaciones isométricas.

AE 07

Formular y verificar conjeturas acerca de criterios de congruencia en triángulos.

AE 08

Resolver problemas relativos a cálculos de vértices y lados de figuras geométricas del plano cartesiano y a la congruencia de triángulos.

Tiempo estimado

65 horas pedagógicas

Unidad 4

Datos y Azar

AE 01

Obtener información a partir del análisis de datos, en diversos contextos, presentados en gráficos y tablas de frecuencia, considerando la interpretación de medidas de tendencia central.

AE 02

Producir información, en contextos diversos, a través de gráficos y tablas de frecuencia con datos agrupados en intervalos, manualmente o mediante herramientas tecnológicas.

AE 03

Obtener la cardinalidad de espacios muestrales y eventos, en experimentos aleatorios finitos, usando más de una estrategia.

AE 04

Calcular la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño, extraídas desde una población.

AE 05

Formular conjeturas y verificarlas en casos particulares acerca de la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño, extraídas de dicha población.

AE 06

Interpretar información, en diversos contextos, mediante el uso de medidas de posición y de tendencia central, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando.

AE 07

Producir información, en contextos diversos, mediante el uso de medidas de posición y de tendencia central, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando.

AE 08

Utilizar el cálculo de medidas de tendencia central y de posición para analizar muestras de datos agrupados en intervalos.

AE 09

Resolver problemas referidos a cálculos de probabilidades, aplicando el modelo de Laplace o frecuencias relativas, dependiendo de las características del experimento aleatorio.

Tiempo estimado

80 horas pedagógicas

Unidades

Semestre 1

Unidad 1

Números

Unidad 2

Álgebra

Semestre 2

Unidad 3

Geometría

Unidad 4

Datos y Azar



Unidad 1

Números

PROPÓSITO

En esta unidad se recogen los aprendizajes que los estudiantes ya tienen sobre números enteros, fracciones y decimales, para introducir los números racionales. Se espera que comprendan sus características y propiedades, y sean capaces de ordenarlos, transformar de fracciones a números decimales, justificando la transformación realizada, y operar con ellos. En esta unidad se introducen también las potencias de base racional y exponente entero, de modo que los alumnos comprendan sus propiedades y las apliquen en la resolución de problemas.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- › Operatoria de números enteros
- › Potencias de base entera y exponente natural
- › Propiedades de las potencias de base natural, fraccionaria y decimal con exponente natural

PALABRAS CLAVE

Números racionales, potencias de base racional y exponente entero.

CONTENIDOS

- › Operaciones aritméticas con números racionales
- › Potencias de base racional y exponente entero
- › Propiedades de las potencias de base racional y exponente entero

HABILIDADES

- › Reconocer si un problema puede tener solución en los números enteros
- › Identificar los números racionales como un cociente de dos números enteros, con denominador distinto de cero
- › Transformar números de notación decimal a fracción y viceversa
- › Resolver situaciones en las que es necesario operar con números racionales
- › Conjeturar acerca de las propiedades de los números racionales
- › Utilizar las potencias de base racional y exponente entero para representar situaciones

ACTITUDES

- › Trabajo en equipo e iniciativa personal en la resolución de problemas en diversos contextos

Aprendizajes Esperados

APRENDIZAJES ESPERADOS

Se espera que los estudiantes sean capaces de:

INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS

Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:

AE 01

Distinguir problemas que no admiten solución en los números enteros y que pueden ser resueltos en los números racionales.

- › Indican si la solución de una ecuación de primer grado pertenece o no al conjunto de números enteros.
- › Reconocen cuando un problema, contextualizado, puede o no tener soluciones en el conjunto de los números enteros.
- › Establecen condiciones para que al dividir dos números enteros el cociente sea un número entero, y condiciones para que sea un número decimal positivo o negativo.
- › Dan ejemplos de la vida cotidiana en que la información numérica corresponde a números racionales negativos.
- › Identifican los números racionales como aquellos que pueden expresarse como un cociente de dos números enteros, con denominador distinto de cero.

AE 02

Justificar matemáticamente que los decimales periódicos y semiperiódicos son números racionales.

- › Dan características del conjunto de los números racionales.
- › Justifican los pasos de un procedimiento para expresar como cociente de enteros un número decimal periódico o semiperiódico.
- › Conjeturan acerca de la existencia de números que expresados como decimales no tengan período.
- › Conjeturan acerca de la existencia de números que no pueden ser expresados como cociente de enteros.

AE 03

Establecer relaciones de orden entre números racionales.

- › Formulan estrategias para comparar números decimales semiperiódicos.
- › Comparan números periódicos.
- › Ordenan números racionales de manera creciente.

AE 04

Representar números racionales en la recta numérica.

- › Formulan estrategias para ubicar en la recta numérica números decimales periódicos.
- › Ubican en la recta numérica números racionales de acuerdo a restricciones dadas. Por ejemplo, ubican cinco números que se encuentren entre 0,01 y 0,02 de manera que la cifra de las milésimas sea un número par.

APRENDIZAJES ESPERADOS

Se espera que los estudiantes sean capaces de:

INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS

Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:

AE 05

Utilizar la calculadora para realizar cálculos, reconociendo sus limitaciones.

- › Sistematizan procedimientos de cálculo escrito con ayuda de la calculadora de las cuatro operaciones con números racionales.
- › Realizan aproximaciones de los resultados obtenidos, mediante redondeo y truncamiento.
- › Reconocen las limitaciones de la calculadora para aproximar decimales.

AE 06

Verificar la densidad de los números racionales.

- › Proponen algoritmos que permiten intercalar números entre dos números racionales dados. Por ejemplo, el promedio de los números dados.
- › Usan el valor posicional para mostrar que, por ejemplo, entre 0,1 y 0,2 se encuentran: 0,11, 0,12,...

AE 07

Verificar la cerradura de las operaciones en los números racionales.

- › Argumentan acerca de la cerradura de la suma y multiplicación en los racionales.
- › Establecen las operaciones que son cerradas en los números racionales y justifican matemáticamente sus resultados.

AE 08

Comprender el significado de las potencias de base racional y exponente entero.

- › Identifican situaciones que pueden ser representadas por medio de potencias de base racional y exponente entero.
- › Realizan operaciones de multiplicación y división de potencias de base racional y exponente entero utilizando sus propiedades.
- › Resuelven problemas, utilizando potencias de base racional y exponente entero.

AE 09

Resolver problemas en contextos diversos que involucran números racionales o potencias de base racional y exponente entero.

- › Explican los procedimientos empleados para resolver problemas que involucran números racionales.
- › Evalúan las soluciones de problemas con números racionales en función del contexto.
- › Aplican propiedades de las potencias de base racional y exponente entero en la resolución de problemas.
- › Emplean más de una estrategia para resolver problemas referidos a potencias de base racional y exponente entero.

Aprendizajes Esperados en relación con los OFT

Trabajo en equipo e iniciativa personal en la resolución de problemas en contextos diversos

- › Participa de manera propositiva en actividades grupales.
- › Es responsable en la tarea asignada.
- › Toma iniciativa en actividades de carácter grupal.
- › Propone alternativas de solución a problemas relacionados con números enteros y potencias de base natural y exponente natural, en actividades grupales.

Orientaciones didácticas para la unidad

Se sugiere introducir los números racionales como una extensión del conjunto de los números enteros y plantear problemas en los que es imposible encontrar una solución entera. También se recomienda situar a los estudiantes en el contexto histórico en los que estos números cobraron relevancia y los problemas que solucionaron. Se recomienda también mostrar ejemplos de números que no son racionales.

La unidad permite ver nuevamente los conceptos de fracción y de número decimal, así como sus propiedades y los procedimientos para operar con ellos. Estos son dos temas en los que suele haber dificultades y lagunas de aprendizaje. Reubicar esos números y sus operaciones en el contexto de los racionales y mediante el uso de las potencias de diez, contribuye a su comprensión y a crear destrezas necesarias para este tipo de operaciones.

Los números racionales se expresan mediante un cociente de números enteros y los decimales finitos, periódicos y semiperiódicos, son números racionales. Por esto se hace necesario expresar estos números como fracciones. Aquí cobra sentido la divisibilidad entre enteros y la relación entre el resto de la división con el período en la representación decimal. Antes que

las reglas de operación o los algoritmos, lo importante son los procesos. La exploración de situaciones en los que el desarrollo decimal presenta o no un período, es la distinción con la que los estudiantes pueden comprender la diferencia entre un número racional y otro irracional.

La ubicación de números en la recta numérica contribuye a la comprensión de dichos números. En particular, prepara la noción de intervalo que será utilizada más adelante para trabajar distintos temas matemáticos, como las inecuaciones.

La unidad introduce las potencias de exponente cero y negativas de números racionales. Así se completan las potencias de base racional y exponente entero. Se sugiere relacionar el valor posicional de la notación decimal con las potencias de diez.

Se sugiere trabajar las cuatro operaciones con números racionales, en contextos de la resolución de problemas ligados a la vida cotidiana y a temas de otros sectores de aprendizaje. La resolución de problemas genera, además, espacio para abordar el concepto de cifras significativas y de aproximación.

Ejemplos de Actividades

AE 01

Distinguir problemas que no admiten solución en los números enteros y que pueden ser resueltos en los números racionales.

1

Identifican ecuaciones de primer grado que no admiten solución en los números enteros, pero que sí admiten solución en los números racionales no enteros. Por ejemplo, ecuaciones del tipo:

- › $2x - 1 = 6$
- › $5(4x + 1) = 2(6x + 3)$

2

En ecuaciones del tipo $ax + b = c$, donde la incógnita es x , determinan valores para a , b , c , de manera que:

- › la ecuación admita una solución entera
- › la ecuación admita una solución racional no entera

3

Identifican problemas en contextos cotidianos, cuya solución pertenece a los números enteros, y aquellos que admiten solución en los números racionales no enteros. Por ejemplo, identifican cuál de los problemas siguientes admite solución entera y cuál, solución racional no entera:

- › Si al triple de las bolitas que tiene una persona le agrega una bolita, entonces tiene 21 bolitas
- › Una persona abona \$10.000 de una deuda y el resto lo divide en tres partes iguales de \$6.000. ¿Cuál es la deuda?

4

Inventan problemas que:

- › admiten solución en los números enteros
- › admiten solución en los números racionales no enteros

AE 02

Justificar matemáticamente que los números decimales periódicos y semiperiódicos son números racionales.

1

Caracterizan el conjunto de los números racionales.

2

Demuestran que los siguientes números se pueden escribir como una fracción:

- › Números de la forma $0,\overline{a}$; $0,\overline{ab}$; $0,\overline{abc}$; etc.
- › Números de la forma $0,0\overline{a}$; $0,0\overline{ab}$; $0,0\overline{abc}$; etc.
- › Números de la forma $0,00\overline{a}$; $0,000\overline{a}$; $0,00\overline{ab}$; $0,00\overline{abc}$; $0,000\overline{abc}$; etc.
- › Números de la forma $0,\overline{a\overline{b}}$; $0,0\overline{a\overline{b}}$; $0,\overline{cd\overline{ab}}$; $0,00\overline{cde\overline{abc}}$; $0,000\overline{abc}$; etc.
- › Números de la forma $a,0\overline{b}$; $a,0\overline{bc}$; $a,00\overline{bcde\overline{f}}$; a,\overline{bc} ; etc.

- ❶ **Observaciones al docente:** Para el caso de un número decimal infinito periódico, el profesor podría plantear, por ejemplo, la siguiente ecuación, usando el decimal 0,666... (se repite el número 6 infinitamente): $x = 0,666\dots$

Amplificando ambos lados por 10, tendrá: $10 \cdot x = 10 \cdot 0,666\dots$

Restando la primera ecuación a la segunda, se obtiene: $9 \cdot x = 6$

Y multiplicando por el inverso multiplicativo de 9, se obtiene: $x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Para el caso de número decimal infinito semiperiódico 1,1444 el docente podría plantear, por ejemplo, la siguiente ecuación: $x = 1,1444$

Amplificando ambos lados por 100, se obtendrá: $100 \cdot x = 114,44$

Restando la primera ecuación a la segunda, se obtiene: $99 \cdot x = 113,3$

Amplificando ambos lados por 10, obtenemos: $990 \cdot x = 1133$

Y multiplicando por el inverso multiplicativo de 990, se obtiene: $x = \frac{1.133}{990}$

AE 03

Establecer relaciones de orden entre números racionales.

AE 04

Representar números racionales en la recta numérica.

1

Formulan estrategias para ubicar en la recta numérica los siguientes tipos de números:

- › Decimales finitos
- › Decimales periódicos
- › Decimales semiperiódicos

2

Formulan estrategias para comparar números:

- › Decimales finitos
- › Decimales periódicos y semiperiódicos

3

Comparan fracciones, utilizando los siguientes procedimientos:

- › Conversión a decimales
- › Conversión a fracciones de denominadores iguales
- › Multiplicaciones de numeradores por denominadores: $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad > bc$

4

Determinan números de acuerdo a restricciones dadas. Por ejemplo:

- › Determinan 10 números racionales mayores que 0,11 y menores que 0,12
- › Determinan 10 números racionales x , tales que $\frac{1}{7} < x < \frac{1}{6}$
- › Determinan números racionales cuya distancia a $\frac{2}{3}$ es mayor que $\frac{5}{3}$ y que sean menores que $\frac{12}{5}$

- ❶ **Observaciones al docente:** Se sugiere al profesor que 0,11 lo presente en la forma 0,110, o en la forma 0,1100, lo mismo para el decimal 0,12.

En el caso de las fracciones $\frac{1}{7}$ y $\frac{1}{6}$, se recomienda que las amplifiquen por un número adecuado de manera de tener denominadores iguales, y posteriormente que amplifiquen por potencias de 10 hasta obtener claridad acerca de los números que se deben insertar.

AE 05

Utilizar la calculadora para realizar cálculos, reconociendo sus limitaciones.

1

Realizan aproximaciones de cálculos y las verifican, utilizando la calculadora.

2

Verifican que los resultados que se obtienen con calculadoras al realizar cálculos de números decimales periódicos y semiperiódicos, son aproximaciones del resultado real.

Por ejemplo, discuten acerca de los diferentes resultados que se obtiene al calcular el área de un rectángulo de lados $\frac{5}{3}$ cm y $\frac{17}{7}$ cm, utilizando calculadoras que arrojan distinta cantidad de cifras decimales en el visor.

3

Utilizan la calculadora para realizar y evaluar expresiones en contextos del mundo que nos rodea. Por ejemplo, determinan la masa de la Tierra evaluando la expresión $M_T = \frac{gr^2}{G}$, donde $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, $r = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ NM}^2/\text{kg}^2$

AE 06

Verificar la densidad de los números racionales.

Realizan las siguientes actividades:

- › Eligen dos números racionales positivos al azar, por ejemplo: 3 y 7.
A continuación:
 - los ubican en la recta numérica
 - sacan su promedio y lo ubican en la recta numérica
 - verifican que la distancia entre el promedio y 3, y la distancia entre el promedio y 7, son iguales
- › Realizan el proceso anterior con números enteros negativos
- › Realizan el proceso anterior con números racionales no enteros
- › Generalizan el proceso seguido; es decir, concluyen la propiedad: “Entre dos números racionales siempre hay un número racional”

❶ **Observaciones al docente:** El profesor puede proponer a sus estudiantes que realicen la actividad anterior, pero con expresiones algebraicas. Es decir, que:

- > Consideren a, b racionales, tales que $a < b$
- > Obtengan su promedio y demuestren que es mayor que a , pero menor que b
- > Obtengan el promedio entre a y el promedio $\frac{a+b}{2}$ y demuestren que se encuentre entre esos números

Y así sucesivamente.

AE 07

Verificar la cerradura de las operaciones en los números racionales.

1

Demuestran que la suma de dos racionales es siempre racional.

2

Demuestran que operaciones combinadas con números racionales siempre dan un número racional.

AE 08

Comprender el significado de las potencias de base racional y exponente entero.

1

Identifican la propiedad que permite resolver potencias del tipo:

a. $\left(\frac{a}{b}\right)^m \left(\frac{a}{b}\right)^n, m, n \in \mathbb{Z}$, o $\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n, m, n \in \mathbb{Z}$

b. $\left(\frac{a}{b}\right)^m \left(\frac{c}{d}\right)^m, m \in \mathbb{Z}$, o $\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^m, m \in \mathbb{Z}$

c. $\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n\right)^m, m, n \in \mathbb{Z}$

d. $\left(\frac{a}{b}\right)^m, m \in \mathbb{Z}$

2

Utilizando las propiedades anteriores, realizan las siguientes demostraciones:

a. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m}, m \in \mathbb{Z}$

b. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m, m \in \mathbb{Z}$

AE 09

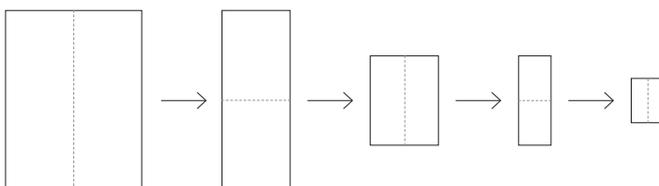
Resolver problemas en contextos diversos que involucran números racionales o potencias de base racional y exponente entero.

1

Resuelven problemas que involucran potencias de base racional y exponente entero.

Por ejemplo:

- a. Un trozo rectangular de cartulina de lado 40 cm de largo por 30 cm de ancho se dobla sucesivamente por la mitad, según muestra la figura:



Responden preguntas como:

- › ¿Cuánto medirá el área del cuadrado de la figura resultante después de hacer 8 dobleces?
- › ¿Cuánto medirá el área del cuadrado resultante después de hacer n dobleces?

❗ **Observaciones al docente:** Los estudiantes pueden realizar cálculos apropiados para estimar el área de la figura obtenida después del octavo doblez. Sin embargo, se sugiere al profesor guiar el trabajo de los alumnos en la notación de potencias para concluir que, después de n dobleces, el área de la figura es $2^{-n} \cdot 1200 \text{ cm}^2$

- b. Calculan el volumen de un paralelepípedo de largo 0,2 km, ancho 100 m y 30.000 cm de alto, y lo expresan en m^3
- c. Realizan comparaciones entre cantidades expresadas en potencias. Por ejemplo, calculan cuántas veces es mayor la distancia de la Tierra a la estrella más cercana, que el largo de una bacteria que mide $1,5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$

2

Resuelven problemas en contextos cotidianos.

Por ejemplo:

Las diferentes compañías telefónicas presentan ofertas de planes en UF a sus clientes, en los que se incluye una determinada cantidad de minutos para hablar y un tiempo determinado para una conexión a internet.

Por ejemplo:

TELEFONÍA E INTERNET

Planes	Velocidad (kbps)	Precio
A	128 - 64 kbps	1,82 UF
B	256 - 128 kbps	2,5 UF
C Inalámbrico	512 - 128 kbps	1,93 UF + instalación
D Inalámbrico	256 - 128 kbps	2,35 UF + instalación

Continúa en página siguiente ➔

Precio de instalación: \$9.990

Responden preguntas como las siguientes:

- › ¿Cuánto cuesta cada plan con el valor de la UF al día de hoy?
- › ¿Cuál es la diferencia en pesos entre los planes A y B, y entre C y D?
- › Si la UF aumenta un 0,1%, ¿en cuánto aumenta el valor del plan más caro?

3

Resuelven problemas relativos a operaciones aritméticas en contextos matemáticos.

Por ejemplo:

- › Dados dos números racionales P y Q , tales que: $0 < P < Q < 1$
 - a. Demuestran que $P \cdot Q$ se encuentra entre 0 y P
 - b. Demuestran que $P + Q$ se encuentra entre Q y $2Q$

Ejemplo de Evaluación

AE 01

Distinguir problemas que no admiten solución en los números enteros y que pueden ser resueltos en los números racionales.

INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS

- › Indican si la solución de una ecuación de primer grado pertenece o no al conjunto de números enteros.
- › Reconocen cuando un problema, contextualizado, puede o no tener soluciones en el conjunto de los números enteros.
- › Establecen condiciones para que al dividir dos números enteros el cociente sea un número entero, y condiciones para que sea un número decimal positivo o negativo.
- › Dan ejemplos de la vida cotidiana en que la información numérica corresponde a números racionales negativos.
- › Identifican los números racionales como aquellos que pueden expresarse como un cociente de dos números enteros, con denominador distinto de cero.

ACTIVIDAD

Responda a las interrogantes de acuerdo a las condiciones dadas en los enunciados.

- 1 Indique las condiciones que deben cumplir tres números enteros: a , b y c , para que la ecuación $ax + b = c$
 - › tenga una solución entera
 - › tenga como solución un número racional positivo
- 2 Una excursión tiene una relación mujeres-hombres de 5 es a 3. Se incorporan tres hombres y la relación pasa a ser 2 es a 1.
 - › ¿Cuáles son los datos del problema?
 - › ¿Cuáles son las incógnitas?
 - › Escriba una ecuación que represente la relación entre las variables y los datos del problema
 - › La solución del problema, ¿pertenece a los números enteros? Justificar

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Se sugiere considerar los siguientes aspectos:

- 1 Indican si la solución de una ecuación de primer grado es entera.
- 2 Reconocen el tipo de soluciones de un problema: entera o racional.
- 3 Identifican números racionales.



Unidad 2

Álgebra

PROPÓSITO

Esta unidad ofrece la oportunidad a los estudiantes de explorar naturalmente contextos multiplicativos de expresiones algebraicas y desarrollar productos, productos notables y factorizaciones de expresiones algebraicas. El programa prioriza en el desarrollo de multiplicaciones algebraicas, la comprensión de los procedimientos y el descubrimiento de reglas y propiedades a través de la formulación y verificación de conjeturas.

Por otra parte, en cuanto a la progresión en el aprendizaje relacionado con las funciones, se introduce el estudio de las funciones lineal y afín. Se propone a los alumnos identificar y representar dichas funciones a través de tablas, gráficos y algebraicamente.

Finalmente, en este nivel se trabaja la composición de funciones como un paso más en el estudio de funciones. Este contenido se conecta más adelante con la unidad de Geometría, en la cual se trata bajo la mirada de las transformaciones isométricas.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- › Concepto de variable
- › Dependencia e independencia de variables
- › Variación proporcional directa e inversa
- › Concepto de función
- › Dominio y recorrido de una función
- › Representación gráfica de funciones
- › Ecuación de primer grado con dos incógnitas

PALABRAS CLAVE

Productos notables, factorización de expresiones algebraicas, ecuaciones literales, función lineal y afín, modelamiento, composición de funciones.

CONTENIDOS

- › Funciones lineales y afines como modelos de situaciones o fenómenos
- › Representación gráfica de funciones lineales y afines
- › Resolución de problemas mediante ecuaciones literales
- › Composición de funciones y propiedades asociadas
- › Dominio y recorrido de funciones que se obtienen al componer otras funciones

HABILIDADES

- › Establecer los productos notables a través de la búsqueda de regularidades en la multiplicación de expresiones algebraicas
- › Factorizar expresiones algebraicas, usando los productos notables
- › Resolver problemas mediante ecuaciones literales
- › Modelar situaciones o fenómenos en diferentes contextos, utilizando funciones lineales
- › Representar gráficamente funciones lineales y afines
- › Argumentar respecto de las variaciones que se producen en la representación gráfica de funciones lineales y afines, al modificar los parámetros
- › Resolver problemas que involucren composición de funciones
- › Identificar el dominio y recorrido de funciones que son el resultado de la composición de otras

ACTITUDES

- › La perseverancia, el rigor, la flexibilidad y originalidad al resolver problemas matemáticos

Aprendizajes Esperados

APRENDIZAJES ESPERADOS

Se espera que los estudiantes sean capaces de:

INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS

Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:

AE 01

Identificar patrones en multiplicaciones de expresiones algebraicas no fraccionarias.

- › Multiplican expresiones algebraicas y reducen el resultado.
- › Establecen expresiones para sumas por diferencias y cuadrados de binomios.
- › Reconocen regularidades en multiplicaciones de expresiones algebraicas. Por ejemplo, en los productos $(a + b)(a - b)$, $(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$, $(a^3 - b^3)(a^3 + b^3)$

AE 02

Factorizar expresiones algebraicas no fraccionarias.

- › Sacan factor común en expresiones algebraicas.
- › Factorizan expresiones algebraicas, utilizando productos notables.
- › Expresan trinomios como el producto de dos binomios.

AE 03

Establecer estrategias para resolver ecuaciones lineales.

- › Emplean técnicas algebraicas para expresar ecuaciones literales de primer grado en la forma $ax = b$
- › Resuelven ecuaciones literales de primer grado.
- › Verifican las soluciones obtenidas.

AE 04

Analizar representaciones de la función lineal y de la función afín.

- › Reconocen la proporcionalidad directa como un caso de la función lineal.
- › Reconocen como funciones lineales relaciones de la física como $F = ma$ (Newton), $V = Ri$ (en circuitos eléctricos) y $F = kx$ (ley de Hooke), señalando variables y constantes.
- › Organizan en una tabla pares ordenados de una función.
- › Generan el gráfico cartesiano a partir de una tabla de valores.
- › Usan un procesador simbólico para registrar diversos valores de $y = kx$, variando los valores de k

APRENDIZAJES ESPERADOS

Se espera que los estudiantes sean capaces de:

INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS

Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:

AE 05

Realizar composiciones de funciones y establecer algunas propiedades algebraicas de esta operación.

- › Demuestran que la composición de funciones cumple la propiedad de clausura.
- › Dadas algunas funciones realizan composiciones de ellas y determinan el dominio y recorrido de la función resultante.
- › Discuten acerca de la conmutatividad de la composición de funciones. Analizan el caso en que las funciones son transformaciones isométricas.
- › Verifican que la composición de funciones es asociativa.
- › Verifican que la función identidad en un conjunto opera como elemento neutro para la composición de funciones.

AE 06

Resolver problemas asociados a situaciones cuyos modelos son ecuaciones literales de primer grado.

- › Identifican ecuaciones literales de primer grado en diversos contextos.
- › Reconocen situaciones cuyos modelos son ecuaciones literales.
- › En situaciones cuyos modelos son ecuaciones literales:
 - plantean la ecuación
 - la resuelven
 - la evalúan en función del contexto

Aprendizajes Esperados en relación con los OFT

La perseverancia, el rigor, la flexibilidad y originalidad, al resolver problemas matemáticos

- › Tiene un orden y método para el registro de información.
- › Termina los trabajos iniciados.
- › Es tenaz frente a obstáculos o dudas que se le presenten en problemas matemáticos.

Orientaciones didácticas para la unidad

Tal como lo sugieren los Aprendizajes Esperados, la unidad de Álgebra es una buena oportunidad para promover los Objetivos Fundamentales Transversales. A través del trabajo propuesto, se pueden incentivar aspectos como el rigor, la flexibilidad y la originalidad al resolver problemas. Por otro lado, interesa que los estudiantes sean ordenados y metódicos en el registro de la información.

Los productos notables se estudian tradicionalmente por nombre, según el tipo de expresión (cuadrado de binomio, trinomio de cuadrado perfecto, etc.). También se acostumbra a ver como reglas de resolución de ciertas expresiones que no siempre los alumnos son capaces de conectar con otras operaciones (por ejemplo, con la multiplicación).

Aquí se propone que los estudiantes conjeturen sobre aquellos productos que tienen ciertas características que los hacen "notables". Por ejemplo, el docente ofrece un listado de multiplicaciones para que ellos descubran las reglas que definen los productos notables. En caso de que no se produzcan hallazgos, se sugiere tensionar las conjeturas con preguntas como "¿Existe alguna relación o regularidad entre los términos de la expresión original y los que resultan luego de realizar el producto propuesto?".

Respecto de las funciones lineales y afines, el propósito es que los estudiantes establezcan conexiones entre los aprendizajes nuevos propuestos en esta unidad y aquellos logrados en años anteriores; por ejemplo, los relacionados con proporcionalidad directa. Pero más aún, que los vinculen con el concepto mismo de función que comienza a desarrollarse desde 8º básico, a través del cual se introducen la notación y elementos como dominio y recorrido.

Se recomienda introducir la composición de funciones a través de metáforas que faciliten su comprensión para luego realizar la formalización a través de la utilización del lenguaje algebraico. De este modo se facilita la verificación y demostración de propiedades de la composición de funciones. Se sugiere poner énfasis en este contenido, ya que se retomará en la unidad de Geometría a través del estudio de las transformaciones isométricas.

Finalmente, el estudio de funciones se presta para realizar análisis de representaciones, usando software gráfico. De este modo es posible explorar las distintas formas que toman estas funciones al variar los parámetros que las constituyen. En otras palabras, este tipo de recursos tecnológicos facilitan al estudiante el análisis, la formulación de conjeturas y su verificación.

Ejemplos de Actividades

AE 01

Identificar patrones en multiplicaciones de expresiones algebraicas no fraccionarias.

1

Realizan multiplicaciones entre expresiones algebraicas. Por ejemplo, multiplican:

- > $(a + b)(a - 2b)$
- > $(a + b - c)(a - b + 2c)$
- > $(a^2 + b^2 - 1)(2a^2 - 3b^2 + 4)$

2

Establecen relaciones al observar regularidades en productos especiales:

- > $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
- > $(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = a^4 - b^4$
- > $(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = a^5 - b^5$

3

Establecen relaciones al observar regularidades en cuadrados de polinomios:

- > $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- > $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
- > $(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$

- ❗ **Observaciones al docente:** Es importante que el profesor permita a los estudiantes deducir los productos trabajados, a partir de las regularidades observadas. De esta manera se constituye en un aprendizaje significativo. Los alumnos pueden conjeturar sobre los productos notables presentados y otros que ellos puedan encontrar. Pueden verificar resultados mediante tablas que les ayuden a organizar los datos.

AE 02

Factorizar expresiones algebraicas no fraccionarias.

1

Factorizan expresiones, utilizando productos notables. De este tipo son las siguientes factorizaciones:

- > $4x^2 - 16y^2$
- > $x^2 + 4xy + y^2$
- > $4(x - z)^2 - 36(y + 2)^2$
- > $(x + 2)^2 + 8(x + 2) + 16$
- > $x^4 - 16y^4$

2

Utilizan la forma $a^2 + a(b + c) + bc = (a + b)(a + c)$. De este tipo son las siguientes factorizaciones:

- > $x^2 + 7x + 10$
- > $a^2 + 6a - 7$
- > $b^2 - 3b - 54$
- > $4a^2 + 14a - 8$

3

Un terreno rectangular tiene una superficie $x^2 + 7x + 12$ y como largo a $x + 4$. Respecto de este enunciado, los estudiantes determinan:

- > su ancho
- > su perímetro cuando $x = 100$ metros

4

Realizan factorizaciones intermedias para llegar a la factorización final. De este tipo son las siguientes factorizaciones:

- > $ac + bc + ad + bd$
- > $ax - 2ay + 3a + bx - 2by + 3b$
- > $ad - dx + ac - cx$

5

Transforman expresiones algebraicas aplicando productos notables y factorizan la expresión transformada.

Por ejemplo:

- > Factorizan la expresión $4a^4 + b^4$; con este propósito, transforman esta expresión en la forma $(2a^2 + b^2)^2 - (2ab)^2$
- > Factorizan la expresión $16x^4 + 4$; con este propósito, transforman esta expresión en la forma $(4x^2 + 2)^2 - 16x^2$

6

Utilizan la suma por diferencia para determinar el cambio de temperatura (dilatación) que experimenta una plancha metálica rectangular cuando, producto del calentamiento a que se expone, tanto su ancho como su largo se dilatan.

AE 03

Establecer estrategias para resolver ecuaciones lineales.

1

Elaboran estrategias para expresar una variable en función de otras variables.

Por ejemplo:

- > Dada la ecuación $\frac{2a}{3} - x = y$, buscan una estrategia para obtener una expresión para x en función de las otras variables
- > Dada la ecuación $x + 2y - 3a = 4$, buscan una estrategia para obtener una expresión para a en función de las otras variables

2

Establecen estrategias para resolver ecuaciones literales. Por ejemplo:

- > Resuelven la ecuación $ax = bx + c$, donde x es la incógnita
- > Resuelven la ecuación $ax = bx + cx + d$, donde x es la incógnita

- ❗ **Observaciones al docente:** En este tipo de actividades, el propósito es que los estudiantes sean capaces de relacionar variables a partir de diversos contextos y trabajar con expresiones ya entregadas, o bien que ellos deban obtener o deducir, como en la actividad N° 2.

Es importante apoyar a los alumnos en la resolución de ecuaciones literales, ecuaciones que, por lo general, se presentan como fórmulas en diferentes contextos.

AE 04

Analizar representaciones de la función lineal y de la función afín.

1

Identifican funciones lineales en contextos de proporcionalidad. Por ejemplo, en el contexto geométrico del perímetro y área de un cuadrado de lado (a), establecen diferencias entre la relación lado-perímetro y la relación lado-área. Para ello:

- › Utilizan tablas en las que asignan distintos valores al lado (a) y obtienen tanto el perímetro (P) como el área (A)
- › Identifican las expresiones $P = 4a$ y $A = a^2$
- › Grafican ambas relaciones en el plano cartesiano
- › Establecen cocientes entre los valores del perímetro y el lado, así como cocientes entre el área y el lado
- › Identifican en qué caso ocurre la proporcionalidad directa

❗ **Observaciones al docente:** Esta actividad se focaliza en el estudio de las funciones. Tiene como objetivo que los estudiantes relacionen la función lineal con la proporcionalidad entre cantidades, que grafiquen y modelen diversas situaciones.

Para lograr este objetivo, es importante que los alumnos generen datos, que los registren en tablas y posteriormente, que los grafiquen. A partir de cocientes entre variables, deben identificar la proporcionalidad directa. Pueden verificar lo anterior, considerando una función lineal cualquiera; por ejemplo: $f(x) = 3x$

2

Modelan situaciones asociadas a la función afín. Por ejemplo, se puede presentar la siguiente situación a los estudiantes:

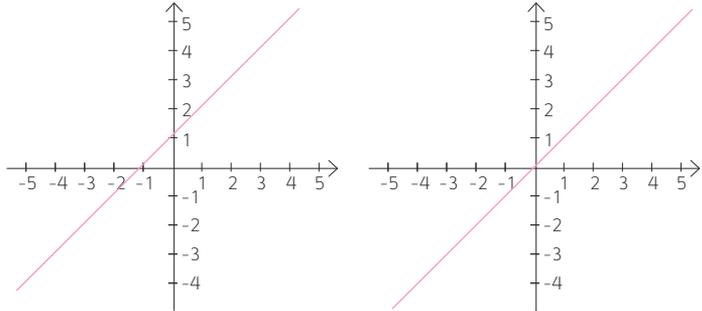
Una compañía de teléfonos celulares ofrece el siguiente plan: cargo fijo de \$8.590 y \$94 por cada minuto que se habla en cualquier horario.

Responden las siguientes preguntas:

- › ¿Cuáles son las variables involucradas?
- › ¿Cuánto se paga por hablar 25, 37 y 55 minutos, respectivamente?
Registrar estos valores en una tabla y graficar, manualmente o usando un software adecuado los valores.
- › Observando el gráfico, ¿qué diferencias se observa respecto de la función lineal?
- › Si llamamos “ t ” al valor total de la cuenta y “ x ” a los minutos hablados, exprese t en función de x .
- › ¿Qué concluye?

3

Identifican gráficos que representan la función lineal y gráficos que representan la función afín. Por ejemplo, identifican cuál de los gráficos siguientes representa la función lineal y cuál representa la función afín, justificando su elección.



4

A partir de las expresiones algebraicas de las funciones o usando tablas de valores, obtienen el gráfico de una función lineal o afín, en forma manual o utilizando algún software gráfico.

5

Determinan si una situación particular puede ser modelada por una función lineal o afín.

Por ejemplo:

Considerar un conjunto de rectángulos cuyo perímetro es siempre igual a 48 cm. Los distintos rectángulos tienen bases y alturas diferentes, pero el perímetro es el mismo en cada caso.

- › Encontrar una función de la base con respecto a la altura que modele esta situación
- › Determinar el dominio de la función
- › Graficar la función

❗ **Observaciones al docente:** Para esta actividad, cada solicitud es importante, en particular la de graficar la situación. También es clave hablar de los “valores permitidos” en este contexto particular y afianzar el concepto de dominio de una función. Además, se puede solicitar el recorrido de la función en cuestión.

R 6

Realizan experimentos relativos a la ley de Hook. Con ese propósito, se toma un resorte cualquiera y de él se suspenden masas. Se registran en una tabla la fuerza ejercida sobre el resorte (peso de la masa medido en Newton) y la deformación medida en metros. A continuación demuestran que el cociente entre la fuerza y la deformación es constante. (Física)

AE 05

Realizar composiciones de funciones y establecer algunas propiedades algebraicas de esta operación.

1

A partir de dos funciones dadas, determinan la función resultante de componer dichas funciones, así como también el dominio y el recorrido de la nueva función. Por ejemplo, si se tienen las funciones $h(x) = 2x$ con dominio $D_h = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ y $g(x) = \frac{x}{4}$ con dominio $D_g = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, determinan $g \circ h$ y el dominio y recorrido de $g \circ h$

2

Demuestran algunas propiedades respecto de la composición de funciones.

Por ejemplo:

- › Verifican si la composición de funciones cumple o no la propiedad de asociatividad
- › Verifican que la composición de funciones no es conmutativa

3

Comprueban otras propiedades de la composición de funciones.

Por ejemplo:

- › Sean f y g funciones afines, comprobar si $f \circ g$ y $g \circ f$ son también funciones afines
- › Si f , g y h son funciones lineales, demostrar que $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. ¿Se cumple lo mismo en el caso de funciones afines?
- › ¿Qué sucede con $f \circ g$, si g es una función constante y f una función cualquiera?

4

A partir de dos funciones obtienen la nueva función compuesta, verifican valores y relaciones.

Por ejemplo:

- › Si $f(x) = ax$ y $g(x) = bx$, encuentran la relación entre $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$
- › Si $f(t) = at$ y $g(t) = b - t$, determinan el valor de $g\left(f\left(\frac{b}{a}\right)\right)$

AE 06

Resolver problemas asociados a situaciones cuyos modelos son ecuaciones literales de primer grado.

1

Identifican situaciones, cuyos modelos son ecuaciones literales de primer grado.

2

Resuelven problemas que involucran ecuaciones literales en contextos geométricos.

Por ejemplo:

- › Obtienen una expresión algebraica para la altura de una pirámide, a partir de la fórmula de su volumen
- › Encuentran una expresión para el área del trapecio en función de sus bases y altura
- › Obtienen los valores de la altura de un cono para distintos valores de su volumen y del radio de su base

R 3

Resuelven problemas relativos a la velocidad del sonido. Por ejemplo, dos personas que se encuentran a s metros separadas desean escuchar, cada una, la voz de la otra persona. ¿Después de cuánto tiempo, en función de s se produce esto? (Física)

Ejemplo de Evaluación

AE 05

Realizar composiciones de funciones y establecer algunas propiedades algebraicas de esta operación.

INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS

- › Demuestran que la composición de funciones cumple la propiedad de clausura.
- › Dadas algunas funciones realizan composiciones de ellas y determinan el dominio y recorrido de la función resultante.
- › Discuten acerca de la conmutatividad de la composición de funciones. Analizan el caso en que las funciones son transformaciones isométricas.
- › Verifican que la composición de funciones es asociativa.
- › Verifican que la función identidad en un conjunto opera como elemento neutro para la composición de funciones.

ACTIVIDAD

A continuación se presentan tres funciones definidas en los números racionales. Responda las preguntas referidas a la composición de estas funciones.

Considere las funciones f , g y h definidas en el conjunto de los números racionales, definidas por $f(x) = x^2$, $g(x) = x - 3$ y $h(x) = 2x + 1$; para todo x racional.

Preguntas:

- ¿Cuál es el valor de $(f \circ g)(2)$?
- Indique el dominio de la función $g \circ f$.
- Verifique que $f \circ g \neq g \circ f$.
- Defina una función $j(x)$ en los números racionales, tal que $(j \circ f)(x) = f(x)$ y $(f \circ j)(x) = f(x)$.
- Verifique la siguiente propiedad de la composición de funciones: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN.

Se sugiere considerar los siguientes aspectos:

- 1 Determina el valor de la composición de dos funciones en un elemento del dominio.
- 2 Verifica propiedades de la composición de funciones.
- 3 Demuestra que la composición de funciones no es conmutativa.
- 4 Identifica a la función identidad como elemento neutro de la composición de funciones.



Unidad 3

Geometría

PROPÓSITO

Esta unidad ofrece a los alumnos la posibilidad de trabajar la geometría en el plano cartesiano, donde estudian las transformaciones isométricas y la congruencia de figuras. De esta manera se les presenta la oportunidad de obtener resultados geométricos y de profundizar los ya adquiridos relativos a estas transformaciones en 8° básico de manera analítica.

Específicamente, los estudiantes trabajan los elementos básicos del plano cartesiano, transforman figuras del plano a través de la aplicación de traslaciones, rotaciones y reflexiones, desarrollan el concepto de congruencia a partir del concepto de transformación isométrica, establecen los criterios de congruencia en triángulos, y los utilizan en la resolución de problemas y en el establecimiento de propiedades en polígonos.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- › Transformaciones isométricas en el plano euclidiano
- › La recta numérica
- › Ángulos y lados en polígonos
- › Composición de funciones

PALABRAS CLAVE

Plano cartesiano, vector; traslación, reflexión y rotación en el plano cartesiano, congruencia y criterios de congruencia.

CONTENIDOS

- › Caracterización del plano cartesiano
- › Ubicación de puntos y figuras en el plano cartesiano e identificación de las coordenadas de los vértices de polígonos dibujados en él
- › Vectores en el plano cartesiano
- › Aplicación de transformaciones isométricas y composiciones de ellas en el plano cartesiano
- › Concepto de congruencia
- › Criterios de congruencia en triángulos
- › Aplicaciones de los criterios de congruencia

HABILIDADES

- › Caracterizar el plano cartesiano
- › Realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano
- › Caracterizar la congruencia de figuras a partir de las transformaciones isométricas
- › Utilizar el concepto de congruencia en la resolución de problemas

ACTITUDES

- › Perseverancia, rigor, flexibilidad y originalidad al resolver problemas matemáticos
- › Trabajo en equipo e iniciativa personal en la resolución de problemas en contextos diversos

Aprendizajes Esperados

APRENDIZAJES ESPERADOS

Se espera que los estudiantes sean capaces de:

INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS

Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:

AE 01

Identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico.

- › Identifican puntos y coordenadas de vértices de polígonos y de elementos de la circunferencia en el plano cartesiano.
- › Dibujan puntos, polígonos y circunferencias en el plano cartesiano en forma manual o usando un procesador geométrico.

AE 02

Representar en el plano adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar.

- › Representan gráficamente vectores en el plano cartesiano, dados sus componentes.
- › Identifican vectores y encuentran las componentes resultantes de adiciones y sustracciones entre ellos.
- › Encuentran las componentes de vectores que resultan de la multiplicación de vectores por escalar.

AE 03

Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.

- › Efectúan composiciones de transformaciones isométricas en el plano cartesiano.
- › Reconocen las figuras resultantes al aplicar composiciones de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano.

AE 04

Identificar regularidades en la aplicación de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano.

- › Identifican regularidades al aplicar composiciones de reflexiones a figuras en el plano cartesiano.
- › Identifican regularidades al aplicar sucesivas composiciones de traslaciones a figuras del plano cartesiano.

APRENDIZAJES ESPERADOS

Se espera que los estudiantes sean capaces de:

INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS

Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:

AE 05

Formular y verificar conjeturas acerca de la aplicación de transformaciones isométricas a figuras geométricas en el plano cartesiano.

- › Conjeturan acerca de la aplicación de composiciones de transformaciones isométricas a figuras del plano cartesiano.
- › Conjeturan acerca de la conmutatividad de transformaciones isométricas y verifican las conjeturas formuladas en casos particulares.
- › Verifican, en casos particulares, conjeturas formuladas acerca de la aplicación de sucesivas traslaciones a figuras en el plano cartesiano, en forma manual o usando un procesador geométrico.

AE 06

Establecer el concepto de congruencia a partir de las transformaciones isométricas.

- › Reconocen que dos figuras son congruentes cuando existen transformaciones isométricas que aplicadas en una de ellas permiten obtener la otra figura.
- › Identifican las transformaciones isométricas que transforman una figura en otra que es congruente a ella.

AE 07

Formular y verificar conjeturas acerca de criterios de congruencia en triángulos.

- › Conjeturan acerca del criterio lado-ángulo-lado.
- › Conjeturan acerca de criterios de congruencia en triángulos y dan ideas geométricas para verificar esas conjeturas.
- › Calculan trazos en triángulos aplicando criterios de congruencia verificados. Por ejemplo, utilizan el criterio lado-lado-lado para calcular segmentos en triángulos.

AE 08

Resolver problemas relativos a cálculos de vértices y lados de figuras geométricas del plano cartesiano y a la congruencia de triángulos.

- › Resuelven problemas relativos a la congruencia en triángulos utilizando los criterios establecidos.
- › Demuestran propiedades de congruencia en polígonos utilizando los criterios de congruencia en triángulos.
- › Resuelven problemas relativos a cálculos de medidas de segmentos en el plano cartesiano.
- › Resuelven problemas relativos a coordenadas de vértices de figuras en el plano cartesiano.

Aprendizajes Esperados en relación con los OFT

Actitudes de perseverancia, rigor, flexibilidad y originalidad al resolver problemas matemáticos

- › Mostrar un método para realizar las tareas propuestas.
- › Terminar los trabajos iniciados.
- › Desarrollar tenacidad frente a obstáculos o dudas que se les presenten en problemas propuestos sobre transformaciones isométricas y congruencias.

Trabajo en equipo e iniciativa personal en la resolución de problemas en contextos diversos

- › Participar de manera propositiva en actividades grupales.
- › Ser responsable en la tarea asignada.
- › Tomar iniciativa en actividades de carácter grupal.
- › Proponer alternativas de solución a problemas propuestos en actividades grupales.

Orientaciones didácticas para la unidad

Tal como lo sugieren los Aprendizajes Esperados, la unidad de Geometría es una buena oportunidad para promover los Objetivos Fundamentales Transversales. A través del trabajo propuesto, se pueden incentivar aspectos como el rigor, la flexibilidad y la originalidad al resolver problemas. Por otro lado, interesa que los estudiantes sean ordenados y metódicos en el registro de la información. Además, particularmente en esta unidad, es importante que tomen la iniciativa en el trabajo de equipo y propongan alternativas de solución a problemas propuestos.

Se sugiere enfatizar la importancia que tiene trabajar la geometría en el plano cartesiano, ya que este es un nuevo escenario que permite ver los conceptos geométricos desde una perspectiva analítica. Es importante que el docente mencione y ejemplifique las diferencias entre el plano cartesiano y el plano euclidiano. Hay que recordar que en 8° básico también se trabajan las transformaciones isométricas, pero a través de construcciones con regla y compás. Se sugiere incorporar actividades que permitan a los estudiantes relacionarse con las coordenadas (por ejemplo, la representación de puntos, polígonos y circunferencias y la resolución de problemas que involucren el cálculo de medidas de lados de polígonos).

El énfasis del trabajo con las transformaciones isométricas está puesto en aplicar traslaciones, reflexiones o

rotaciones a figuras en el plano cartesiano. Es importante generalizar algunas propiedades (por ejemplo, las relacionadas con los vértices de las figuras resultantes respecto de la figura original). Con respecto a la composición de transformaciones isométricas, se sugiere establecer una relación estrecha con lo estudiado en la unidad de Álgebra. Esta es una buena oportunidad para que los alumnos contextualicen la composición de fracciones. También se recomienda potenciar todo el trabajo con el uso de un procesador geométrico.

Es importante que los estudiantes vinculen las transformaciones isométricas con el concepto de congruencia, y que definan dos figuras como congruentes cuando es posible aplicar una o más transformaciones isométricas a una de esas figuras para luego obtener la otra. También se sugiere al docente mostrar a los alumnos que, para trasladar, rotar o reflejar una figura, basta con aplicar estas transformaciones isométricas a determinados puntos de la figura. En el caso de los polígonos, basta aplicar esas transformaciones a los vértices. Se recomienda, además, profundizar en el concepto de los teselados y su análisis a partir de las transformaciones isométricas.

Finalmente, los criterios de congruencias deben establecerse en la clase con la participación del profesor y los estudiantes. No deben ser aprendidos de memoria. Estos criterios son relevantes para la demostración de propiedades de congruencia en polígonos.

Ejemplos de Actividades

AE 01

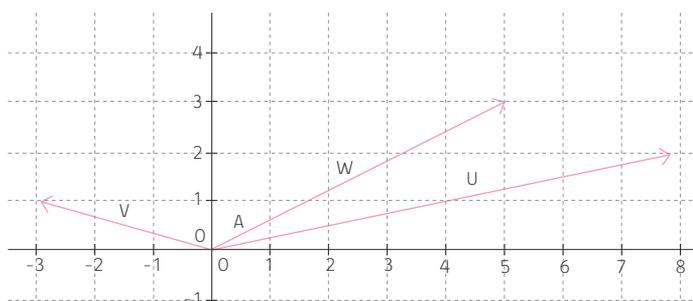
Identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico.

- 1
Determinan las coordenadas de puntos en el plano cartesiano.
- 2
Dadas las coordenadas de algunos puntos, los estudiantes los ubican en el plano cartesiano.
- 3
Dibujan polígonos en el plano cartesiano, conocidas las coordenadas de sus vértices.
- 4
Dibujan en el plano cartesiano una circunferencia, conocidas las coordenadas del centro y la medida de su radio.
- 5
Dadas las coordenadas de tres puntos que pertenecen a una circunferencia, la dibujan en el plano cartesiano.

AE 03

Representar en el plano adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar.

- 1
Dibujan diferentes vectores en el plano cartesiano, dadas sus coordenadas. Por ejemplo:
 - > $\vec{u} = (3, 2)$ y $\vec{v} = (-3, 1)$
 - > $\vec{a} = (5, 1)$ en un sistema de coordenadas rectangulares con origen en $(2, 3)$
- 2
Determinan y dibujan el vector resultante de la suma de vectores. Por ejemplo:
 - > Obtienen el vector resultante de la suma $\vec{u} + \vec{v}$ cuando $\vec{u} = (2, -1)$ y $\vec{v} = (-4, 5)$ y lo dibujan en el plano cartesiano
 - > Determinan la relación que existe entre vectores dibujados en el plano cartesiano. Por ejemplo, de los vectores \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} del gráfico siguiente:



3

Determinan y dibujan el vector resultante del producto entre un vector y un escalar.

Por ejemplo:

- > $2\vec{u}$, donde $3\vec{u} = (-1,4)$
- > $-\vec{u} + \vec{u}$
- > $-3\vec{u} + 2\vec{v}$, cuando se sabe que $-\vec{u} + \vec{v} = (2,5)$

4

Determinan el vector que representa la fuerza resultante de fuerzas aplicadas sobre un objeto.

- ❶ **Observaciones al docente:** Se sugiere al profesor trabajar estas actividades con el docente de Física. De esta manera, los estudiantes pueden conocer herramientas que les permitirán entender conceptos de la física en este nivel o en niveles superiores.

AE 04

Identificar regularidades en la aplicación de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano.

1

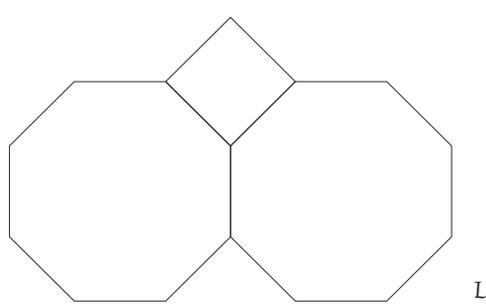
Identifican regularidades al aplicar sucesivas traslaciones a figuras en el plano cartesiano. Por ejemplo, al aplicar la composición de traslaciones $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{u}} \circ \dots \circ T_{\vec{u}}$, donde $\vec{u} = (2,4)$, al paralelogramo de vértices $(1,1)$, $(5,1)$, $(7,4)$, $(3,4)$

2

Identifican regularidades al rotar, con respecto al origen y en un ángulo de 30° sucesivas veces, una figura en este plano.

3

Identifican regularidades al reflejar respecto al eje L , sucesivas veces, la configuración formada por dos octógonos regulares y un cuadrado: 8 8 4



AE 05

Formular y verificar conjeturas acerca de la aplicación de transformaciones isométricas a figuras geométricas en el plano cartesiano.

1

Observan figuras que están rotadas y conjeturan acerca de:

- > procedimientos para determinar el ángulo de rotación
- > procedimientos para determinar el punto con respecto al cual se rotó la figura

2

Conjeturan acerca de la transformación isométrica que corresponde a la composición de reflexiones, cuando:

- > los dos ejes de simetría son paralelos
- > los ejes de simetría se intersectan en un punto O formando un ángulo α

❶ **Observaciones al docente:** Es importante que los estudiantes realicen las actividades anteriores:

- > en forma manual, utilizando regla y compás
- > utilizando un procesador geométrico

3

Verifican las conjeturas formuladas en las actividades 1 y 2

4

Conjeturan acerca de la relación entre la composición de traslaciones y la operatoria vectorial asociada.

AE 06

Establecer el concepto de congruencia a partir de las transformaciones isométricas.

1

Dibujan una figura en el plano cartesiano y aplican sobre ella una transformación isométrica.

Por ejemplo, al triángulo de vértices $A(2,1)$, $B(5,2)$, $C(4,5)$ aplican la traslación $T_{(1,3)}$ y obtienen el triángulo A' , B' , C'

Comparan las medidas de los lados de los triángulos A , B , C y A' , B' , C' y sacan conclusiones con respecto a la forma, al tamaño de sus lados y al área de ellos. De esta manera, concluyen que son congruentes.

2

Observan dos figuras congruentes y determinan las transformaciones isométricas o composiciones de transformaciones isométricas que lleven una figura en la otra.

❶ **Observaciones al docente:** Se sugiere al profesor guiar al estudiante en la segunda actividad. Esta es una actividad que requiere de concentración y de capacidad de visualización por parte del alumno.

3

Elaboran una definición del concepto de congruencia de figuras del plano en términos de las transformaciones isométricas.

AE 07

Formular y verificar conjeturas acerca de criterios de congruencia en triángulos.

1

Formulan conjeturas acerca de criterios de congruencia en triángulos con respecto a:

- › lados
- › lados y ángulos

2

Describen una idea geométrica de la demostración de las conjeturas acerca de los criterios formulados.

AE 08

Resolver problemas relativos a cálculos de vértices y lados de figuras geométricas del plano cartesiano y a la congruencia de triángulos.

1

Determinan las coordenadas de los vértices de rectángulos, cuadrados, rombos, triángulos rectángulos y triángulos equiláteros a partir de la información acerca de vértices de esos polígonos. Por ejemplo, determinan las coordenadas del cuarto vértice de un rectángulo, si se sabe que las coordenadas de tres de sus vértices son $(1, 1)$, $(1, 6)$ y $(8, 1)$.

- ❗ **Observaciones al docente:** Se sugiere al profesor facilitar el trabajo de los estudiantes, proponiendo polígonos convexos que tengan vértices de coordenadas enteras. De esta manera, se centra el trabajo en el proceso geométrico que involucra la determinación de las coordenadas y no en el cálculo numérico que implica coordenadas de lados racionales e irracionales.

Se recomienda también al docente trabajar con coordenadas que sean enteras negativas o mezclas entre enteros positivos y negativos.

2

Calculan perímetros y áreas de rectángulos, cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados, utilizando información relativa a sus vértices.

3

Determinan los pasos para resolver el siguiente problema: Calcular el área de un rectángulo si se sabe que los puntos $(1, 2)$ y $(7, 6)$ son los extremos de su diagonal y que sus lados son paralelos a la abscisa y la ordenada.

4

Elaboran estrategias para calcular perímetros y áreas de paralelogramos, donde un par de lados paralelos sean, a su vez, paralelos a uno de los ejes coordenados, y para calcular perímetros y áreas de triángulos, cuando uno de sus lados es paralelo a uno de los ejes coordenados, utilizando información relativa a sus vértices y el teorema de Pitágoras. Calculan los perímetros y las áreas de esas figuras.

5

Utilizan los criterios de congruencia en triángulos para demostrar, por ejemplo, que las diagonales de un paralelogramo se bisecan, que todo punto de la simetral de un trazo equidista de sus extremos, etc.

- ❗ **Observaciones al docente:** Es importante que el estudiante, en cada demostración, indique el criterio de congruencia empleado, la hipótesis y la tesis.

Se sugiere que el docente enseñe explícitamente los pasos de una demostración y que enfatice la justificación formal y matemática de cada paso de la secuencia demostrativa.

Ejemplo de Evaluación

AE 08

Resolver problemas relativos a cálculos de vértices y lados de figuras geométricas del plano cartesiano y a la congruencia de triángulos.

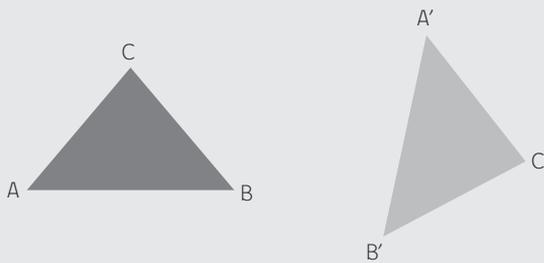
INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS

- › Resuelven problemas relativos a la congruencia en triángulos utilizando los criterios establecidos.
- › Demuestran propiedades de congruencia en polígonos utilizando los criterios de congruencia en triángulos.
- › Resuelven problemas relativos a cálculos de medidas de segmentos en el plano cartesiano.
- › Resuelven problemas relativos a coordenadas de vértices de figuras en el plano cartesiano.

ACTIVIDAD

A continuación se presentan dos triángulos. Responda las interrogantes referidas a las condiciones que se deben dar para que se cumpla la congruencia entre ellos.

Dados los triángulos ABC y A'B'C' de la figura:



- Se afirma que los triángulos son congruentes.
¿Qué transformaciones isométricas aplicaría al triángulo ABC para verificar (o descartar) la afirmación? Fundamentar.
- Se sabe que los trazos AB y A'B' son congruentes y que la medida de los ángulos de los vértices en A y en A' son iguales.
¿Qué condición, mínima, agregaría para asegurar la congruencia de los triángulos? Justificar.
- Se sabe que los triángulos ABC y A'B'C' tienen la medida de sus ángulos interiores respectivamente iguales, esto es $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ y $\angle C = \angle C'$.
¿Podemos concluir que los triángulos son congruentes?

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Se sugiere considerar los siguientes aspectos:

- 1 Reconocen que los triángulos son congruentes por aplicación de transformaciones.
- 2 Conjeturan acerca de criterios de congruencia.
- 3 Verifican propiedades de la congruencia de triángulos.
- 4 Resuelven problemas relativos a la congruencia de triángulos.

PROPÓSITO

En el ámbito del tratamiento de datos, los alumnos comienzan el estudio de representaciones gráficas para datos agrupados en intervalos, tales como histogramas y polígonos de frecuencia. El propósito es que, al finalizar la unidad, los estudiantes sean capaces tanto de interpretar como de producir información a través de estos gráficos, en diversos contextos. El énfasis estará puesto en el análisis de diferentes situaciones, donde deban tomar decisiones respecto de cuándo es pertinente utilizar histogramas o polígonos de frecuencia. Asimismo, se espera que interpreten y produzcan información, en diversos contextos, utilizando tanto medidas de tendencia central como medidas de posición, considerando el tipo de datos involucrados. Respecto de los conceptos de población y muestra, se busca que reconozcan relaciones entre la media aritmética de una población finita y la media aritmética de las medias muestrales, cuando se extraen muestras de igual tamaño desde la misma población.

En cuanto al ámbito del manejo del azar, en esta unidad continúa el trabajo con la probabilidad desde un punto de vista teórico (modelo de Laplace) y desde lo experimental (frecuencias relativas), pero ahora los estudiantes deben decidir cuándo es posible aplicar un modelo u otro, dependiendo de las condiciones particulares de cada situación o experimento aleatorio. Además, se incorporan las técnicas combinatorias, que constituyen verdaderas herramientas para ayudar en el conteo de los elementos de un espacio muestral. Por ejemplo, en eventos relacionados con la extracción de dos letras del conjunto $\{a, b, c \text{ y } d\}$, es interesante sugerirles que empleen técnicas combinatorias para determinar la cantidad de subconjuntos de dos elementos de este conjunto, número que corresponde al espacio muestral.

Unidad 4

Datos y Azar

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- › Población y muestra
- › Experimento aleatorio
- › Gráficos de frecuencia
- › Tablas de frecuencia con datos agrupados en intervalos
- › Media aritmética y moda para datos agrupados en intervalos
- › Muestreo aleatorio simple
- › Equiprobabilidad de eventos
- › Principio multiplicativo
- › Espacio muestral asociado a un experimento aleatorio
- › Probabilidad teórica de un evento
- › Modelo de Laplace
- › Condiciones del modelo de Laplace: finitud del espacio muestral y equiprobabilidad

PALABRAS CLAVE

Gráficos de datos agrupados en intervalos, como histogramas y polígonos de frecuencia.

CONTENIDOS

- › Histogramas, polígonos de frecuencia y de frecuencias acumuladas, considerando la interpretación de medidas de tendencia central y posición
- › Medidas de tendencia central (media, moda y mediana) y medidas de posición (percentiles y cuartiles) de datos agrupados en intervalos
- › Técnicas combinatorias para resolver diversos problemas que involucren el cálculo de probabilidades
- › Muestras de un tamaño dado, en las que se pueden extraer desde una población de tamaño finito, con y sin reemplazo
- › Formulación y verificación de conjeturas, en casos particulares, acerca de la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño extraídas de dicha población, con y sin reemplazo
- › Resolución de problemas en contextos de incerteza, aplicando el cálculo de probabilidades mediante el modelo de Laplace o frecuencias relativas, dependiendo de las condiciones del problema

HABILIDADES

- › Obtener información a partir del análisis de los datos presentados en histogramas, polígonos de frecuencia y de frecuencias acumuladas, considerando la interpretación de medidas de tendencia central y posición
- › Organizar y representar datos usando histogramas, polígonos de frecuencia y frecuencias acumuladas, contruidos manualmente y con herramientas tecnológicas
- › Analizar una muestra de datos agrupados en intervalos, mediante el cálculo de medidas de tendencia central (media, moda y mediana) y medidas de posición (percentiles y cuartiles), en diversos contextos y situaciones
- › Resolver diversos problemas que involucren técnicas combinatorias para el cálculo de probabilidades
- › Utilizar y establecer estrategias para determinar el número de muestras de un tamaño dado, que se pueden extraer desde una población de tamaño finito, con y sin reemplazo
- › Formular y verificar conjeturas, en casos particulares, acerca de la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño extraídas de dicha población, con y sin reemplazo
- › Resolver problemas en contextos de incerteza, aplicando el cálculo de probabilidades mediante el modelo de Laplace o frecuencias relativas, dependiendo de las condiciones del problema

ACTITUDES

- › Interés por conocer la realidad al trabajar con información cuantitativa de diversos contextos

Aprendizajes Esperados

APRENDIZAJES ESPERADOS

Se espera que los estudiantes sean capaces de:

INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS

Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:

AE 01

Obtener información a partir del análisis de datos presentados en gráficos, considerando la interpretación de medidas de tendencia central.

- › Explican la pertinencia y ventajas de representar un conjunto de datos, a través de un histograma o polígono de frecuencia, respecto a otras representaciones gráficas.
- › Obtienen información mediante el análisis de datos presentados en histogramas y polígonos de frecuencia.
- › Interpretan datos agrupados en intervalos y organizados en tablas de frecuencia, en diversos contextos.
- › Calculan la media, moda y mediana, a partir de una tabla de frecuencia con datos agrupados en intervalos, y las interpretan de acuerdo al contexto.
- › Comparan dos o más conjuntos de datos usando medidas de tendencia central.

AE 02

Producir información, en contextos diversos, a través de gráficos obtenidos desde tablas de frecuencia con datos agrupados en intervalos, manualmente o mediante herramientas tecnológicas.

- › Determinan un número adecuado de intervalos para organizar (agrupar) un conjunto de datos, acorde a la cantidad de datos disponibles.
- › Construyen tablas de frecuencias con datos agrupados, donde seleccionen el tipo de frecuencia según el análisis que se requiera hacer.
- › Representan un conjunto de datos agrupados en intervalos mediante un histograma e interpretan la información acorde al contexto.
- › Construyen, a partir de un histograma, el polígono de frecuencia asociado y justifican la utilización de dicha representación gráfica.
- › Construyen un histograma o polígono de frecuencia, utilizando una herramienta tecnológica.

AE 03

Obtener la cardinalidad de espacios muestrales y eventos, en experimentos aleatorios finitos, usando más de una estrategia.

- › Determinan la cardinalidad de un espacio muestral utilizando el principio multiplicativo en diversos experimentos aleatorios. Por ejemplo, al lanzar un dado y una moneda, el espacio muestral tiene $6 \cdot 2 = 12$ resultados posibles.
- › Obtienen el número de muestras aleatorias posibles de un tamaño dado que se pueden extraer, sin reposición, desde una población de tamaño finito, aplicando el número combinatorio.
- › Seleccionan la técnica combinatoria apropiada para resolver problemas que involucren el cálculo de probabilidades, acorde a los requerimientos de cada problema.

APRENDIZAJES ESPERADOS

Se espera que los estudiantes sean capaces de:

INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS

Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:

AE 04

Calcular la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño, extraídas desde una población.

- › Establecen estrategias para determinar el número de muestras de un tamaño dado, con o sin reemplazo, que se pueden extraer desde una población de tamaño finita.
- › Calculan el promedio de cada una de las muestras de igual tamaño extraídas desde una población.
- › Calculan el promedio de todos los promedios de muestras de igual tamaño extraídas desde una población.

AE 05

Formular conjeturas y verificarlas en casos particulares acerca de la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño, extraídas de dicha población.

- › Realizan diferentes comparaciones entre la media de una población con la media de cada uno de los promedios de muestras de igual tamaño extraídas desde una población.
- › Conjeturan acerca de la relación que existe entre la media de una población y el promedio de cada uno de los promedios de muestras de igual tamaño extraídas desde una población.
- › Verifican, utilizando herramientas tecnológicas, la conjetura formulada.

AE 06

Interpretar información, en diversos contextos, mediante el uso de medidas de posición y de tendencia central, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando.

- › Interpretan información estadística, expresada en términos de cuartiles o quintiles publicada en medios de comunicación.
- › Evalúan la pertinencia del uso de medidas de posición o tendencia central de acuerdo al tipo de datos involucrados.
- › Extraen información respecto de medidas de posición, a partir de un polígono de frecuencias acumuladas.
- › Comparan información respecto a dos o más conjuntos de datos, utilizando medidas de tendencia central y de posición y comunican sus conclusiones.
- › Extraen información en relación a una situación o fenómeno, en la que se presentan datos por medio de alguna de las medidas de tendencia central.

APRENDIZAJES ESPERADOS

Se espera que los estudiantes sean capaces de:

INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS

Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:

AE 07

Producir información, en contextos diversos, mediante el uso de medidas de posición y de tendencia central, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando.

- › Comunican información estadística acerca de algún fenómeno, utilizando medidas de posición, por ejemplo, cuartiles.
- › Construyen un polígono de frecuencias acumuladas, en forma manual o mediante herramientas tecnológicas, a partir de un cierto contexto, e interpretan desde esta representación algunas medidas de posición.
- › Deciden según el tipo de datos (ordinales, nominales, cuantitativos, etc.) los parámetros a utilizar para resumir información estadística referida a algún fenómeno o situación.
- › Determinan medidas de tendencia central o posición mediante una planilla electrónica u otra herramienta tecnológica.

AE 08

Utilizar el cálculo de medidas de tendencia central y de posición para analizar muestras de datos agrupados en intervalos.

- › Determinan el valor de la media muestral de datos agrupados en intervalos.
- › Determinan la mediana de muestras de datos agrupados en intervalos.
- › Determinan cuartiles y percentiles de muestras de datos agrupados en intervalos.
- › Analizan muestras de datos agrupados en intervalos mediante cuartiles.
- › Utilizan la media para analizar muestras de datos agrupados en intervalos.

AE 09

Resolver problemas referidos a cálculos de probabilidades, aplicando el modelo de Laplace o frecuencias relativas, dependiendo de las características del experimento aleatorio.

- › A partir de diferentes experimentos aleatorios, identifican resultados equiprobables. Por ejemplo, una ruleta dividida en sectores iguales.
- › Identifican experimentos aleatorios que permiten asignar probabilidades a sus eventos en forma teórica mediante el modelo de Laplace.
- › Identifican experimentos aleatorios que permiten asignar probabilidades a sus eventos de acuerdo a las frecuencias relativas.
- › Asignan probabilidades de ocurrencia a eventos, mediante el modelo de Laplace o las frecuencias relativas, de acuerdo a las características del experimento aleatorio.

Aprendizajes Esperados en relación con los OFT

Interés por conocer la realidad al trabajar con información cuantitativa de diversos contextos

- › Propone temas de su interés para trabajar en clases.
- › Aporta información complementaria sobre los temas abordados.
- › Formula preguntas sobre los temas implicados en la información trabajada.
- › Plantea opiniones al interpretar los datos.
- › Argumenta y contraargumenta con base en los datos analizados.

Orientaciones didácticas para la unidad

A través del trabajo propuesto en Datos y Azar, se puede incentivar el interés por conocer la realidad y la búsqueda de la información en diversas fuentes. La unidad también sirve para promover una actitud crítica frente a la información que entregan los medios de comunicación y el trabajo en equipo en la resolución de problemas que involucren el análisis de datos. También es importante argumentar con base en los datos analizados.

Es esencial trabajar en contextos de interés para los estudiantes, especialmente en el ámbito de la estadística. Estos contextos pueden extraerse de diarios, revistas o internet, de modo que vean que la estadística está en conexión con la vida cotidiana y es una herramienta para interpretar y modelar la realidad. Se espera que los alumnos discutan cuándo es más pertinente utilizar histogramas y cuándo polígonos de frecuencia, que desarrollen la capacidad de decidir respecto del uso de este tipo de representaciones, en función del tipo de datos y el propósito de un estudio.

Es importante que los estudiantes verifiquen las formas de obtener las medidas de tendencia central (media, moda y mediana) a partir de un conjunto de datos agrupados. Se sugiere, además, incorporar a la discusión las medidas de posición, que permiten obtener nueva información y comparar conjuntos de datos a partir de los cuartiles. Esta es una buena ocasión para mostrar la utilidad de los gráficos de “caja y bigotes”, que permiten comparar conjuntos de datos.

Respecto de los contenidos de población y muestra, se recomienda plantear discusiones con los alumnos acerca de lo que sucede al tomar de una misma población, distintas muestras de igual tamaño. Por ejemplo, si se

tiene el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y se toman muestras de tamaño 2, la idea sería comparar la media aritmética del conjunto original, que es igual a 3, con la media aritmética de las medias muestrales, para luego indagar sobre relación existente. Finalmente, concluir acerca de qué sucede si se toman todas las muestras de tamaño 2.

En la parte de probabilidades, se pone énfasis en la obtención de la “cardinalidad de espacios muestrales y eventos, en experimentos aleatorios finitos, usando más de una estrategia, aplicada al cálculo de probabilidades en diversas situaciones”. Esa es una oportunidad para incorporar las técnicas combinatorias que potencian el conteo.

Por otra parte, se sugiere realizar experimentos en los que no es posible aplicar el modelo de Laplace. El propósito es que los estudiantes vean qué sucede con las frecuencias relativas. Por ejemplo, se puede lanzar un dado cargado (no equilibrado) de cuyas caras no se puede decir que tengan $1/6$ de posibilidades de salir. En este caso, es necesario utilizar una tabla de frecuencias y registrar un número razonablemente elevado de lanzamientos para ver dónde se estabilizan las frecuencias para cada cara del dado. Otro experimento puede ser dejar caer un vaso plástico y determinar cuáles son las posibilidades de que caiga hacia arriba, de costado o hacia abajo. Después se pregunta ¿cuál es la probabilidad de ocurrencia para cada uno de los eventos?

Por último, se puede citar errores en la aplicación del modelo de Laplace. Un ejemplo histórico es el clásico “error de D’Alembert” al trabajar con el experimento de lanzar dos monedas.

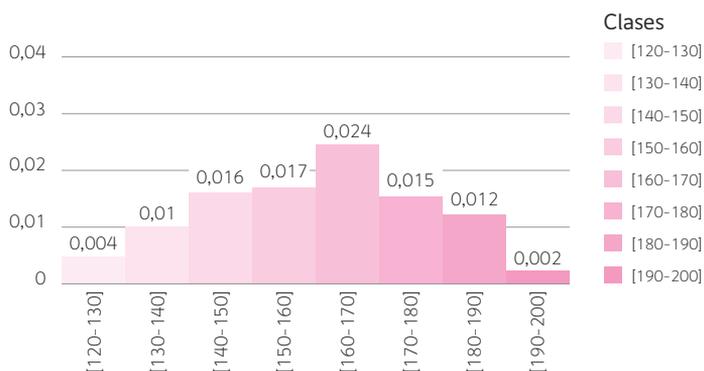
Ejemplos de Actividades

AE 01

Obtener información a partir del análisis de datos presentados en gráficos, considerando la interpretación de medidas de tendencia central.

1

Obtienen información a partir de la lectura de histogramas y polígonos de frecuencia en diferentes contextos. Por ejemplo, el siguiente histograma⁶ representa las frecuencias relativas obtenidas de las estaturas de un grupo aleatorio de 100 personas.



❗ **Observaciones al docente:** Notar que cada barra debe tener un área proporcional a la frecuencia relativa del intervalo que forma su base.

Responden preguntas del tipo:

Aproximadamente, ¿dónde se encuentran la media y la moda del conjunto de datos?

2

Extraen información y escriben conclusiones de información estadística entregada con distintos tipos de gráficos.

Por ejemplo:

Observan el gráfico⁷ que se presenta a continuación y responden las preguntas formuladas. (Gráfico en página siguiente)

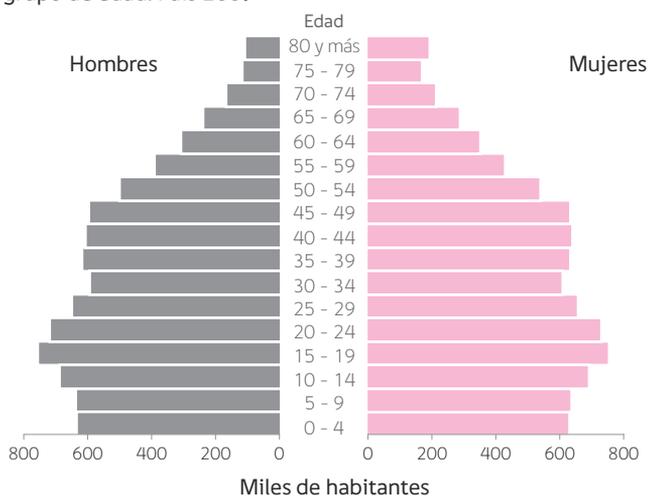
- La cantidad de hombres mayores de 35 años va disminuyendo sistemáticamente. ¿Qué ocurre con la cantidad de mujeres en ese rango de edad?
- El grupo de mayores de 80 años, ¿por qué sexo está compuesto mayoritariamente?

6 Tomado del texto del estudiante *El poder de la información y la toma de decisiones*. Unidad de Estadística IV medio. Enlaces Matemática. Centro Comenius USACH.

7 Fuente: Chile Proyecciones y Estimación de población Censo 2002.

www.ine.cl/canales/menu/publicaciones/compendio_estadistico/pdf/2009/1_2_estadisticas_demograficas.pdf

Distribución de la población estimada al 30 de junio, por sexo y grupo de edad. País 2009



❗ **Observaciones al docente:** Se sugiere que el profesor genere más preguntas para incentivar la discusión entre los estudiantes con opiniones basadas en la extracción correcta de información del gráfico. Se puede complementar el análisis pidiéndoles que justifiquen el uso de este tipo de gráfico para representar el conjunto de datos.

3

Extraen información y escriben conclusiones de información estadística entregada en tablas de frecuencia.

Por ejemplo:

La tabla que se muestra a continuación resume la estatura de 60 deportistas de un club.

Intervalo	Punto medio	Frecuencia	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa porcentual
[1,65 - 1,70]		8		
[1,70 - 1,75]		12		
[1,75 - 1,80]		18		
[1,80 - 1,85]		14		
[1,85 - 1,90]		6		
[1,90 - 1,95]		2		

N=60

› Completan la tabla de distribución de frecuencias con las columnas que aparecen

- › Calculan las medidas de tendencia central (media, mediana y moda) de la muestra
- › Interpretan el significado de cada una de las medidas de tendencia central acorde al contexto

❶ **Observaciones al docente:** Se sugiere que el profesor genere más preguntas para justificar la construcción de cada columna de la tabla, de modo que el estudiante pueda extraer información útil de cada una de ellas.

Se sugiere que los alumnos, en conjunto con el docente, revisen y discutan procedimientos para obtener las medidas de tendencia central para datos agrupados en intervalos. Es necesario considerar cuándo se está realizando una aproximación del valor. Los estudiantes pueden verificar esto, por ejemplo, tomando un conjunto de datos, y determinar el promedio con todos ellos. Luego aplican alguna estrategia para trabajar con los datos agrupados y obtienen el promedio de esta manera. Deben comparar ambos resultados.

AE 02

Producir información, en contextos diversos, a través de gráficos obtenidos desde tablas de frecuencia con datos agrupados en intervalos, manualmente o mediante herramientas tecnológicas.

1

Producen información relevante, a partir de un conjunto de datos en un cierto contexto.

Por ejemplo:

A un grupo de 45 fumadores de distintas edades se les consultó por la cantidad de años que llevan fumando. La tabla siguiente muestra la cantidad de años de cada uno de los encuestados.

1	41	38	22	43	29	19	16	1	35	29	2	29	46	20
31	2	20	25	22	25	31	3	19	15	42	38	30	16	18
28	18	3	27	23	28	6	12	32	36	7	28	10	50	28

2

Construyen una tabla de distribución de frecuencias en intervalos para organizar la información, estableciendo la cantidad de intervalos y su ancho más adecuado. Incluyen en la tabla el punto medio o marca de clase del intervalo, las frecuencias, las frecuencias relativas y las frecuencias relativas porcentuales.

3

Escogen y construyen un gráfico para presentar la información.

4

Calculan las medidas de tendencia central de la muestra (media, mediana y moda).

5

Ingresa los datos a una planilla electrónica y construyen un gráfico adecuado para verificar la respuesta anterior.

6

Responden a la pregunta: ¿cuál es la menor cantidad de años que lleva un fumador? ¿Y la mayor?

7

Responden a la pregunta: ¿cuánto tiempo como mínimo lleva fumando la mayoría de los encuestados?

- ❗ **Observaciones al docente:** La construcción de la tabla requiere el cálculo del rango de los datos y la determinación del ancho de los intervalos que se formarán, valores que están sometidos a recomendaciones prácticas para no perder exactitud de la información y no dificultar su tratamiento.

Se sugiere al docente enseñar explícitamente la utilización de un software que permita la manipulación de datos y la construcción de gráficos.

AE 03

Obtener la cardinalidad de espacios muestrales y eventos, en experimentos aleatorios finitos, usando más de una estrategia.

1

Determinan las combinaciones posibles a partir de un conjunto finito de objetos. Por ejemplo, ante la siguiente situación: *María tiene en su clóset 6 blusas de las cuales 2 son blancas, 3 son verdes y una es negra con lunares blancos, 8 pantalones, 4 negros, dos café y dos azules*, los estudiantes pueden responder preguntas del tipo:

- › ¿De cuántas maneras posibles puede combinar las blusas con los pantalones?
- › ¿Cuántas combinaciones posibles puede hacer de una blusa verde con un pantalón negro?
- › Si María se viste sacando al azar una blusa y un pantalón, ¿cuál es la probabilidad que María vista una blusa negra con lunares blancos y un pantalón negro?

- ❗ **Observaciones al docente:** Se debe estimular el uso de técnicas combinatorias, en particular el principio multiplicativo, como herramientas para ayudar en el conteo de los elementos de un espacio muestral.

Finalmente, generar discusión en torno a las técnicas utilizadas para responder las preguntas.

2

Utilizan diagramas de árbol para determinar el espacio muestral de diversos experimentos aleatorios. Por ejemplo, el lanzamiento de dos dados, el lanzamiento de un dado y una moneda, el lanzamiento de tres monedas, etc.

3

Utilizan técnicas combinatorias apropiadas para determinar la cardinalidad de espacios muestrales de experimentos aleatorios.

4

Seleccionan la técnica combinatoria apropiada para resolver problemas que involucren el cálculo de probabilidades, acorde a los requerimientos de cada problema. Por ejemplo, combinaciones.

AE 04

Calcular la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño, extraídas desde una población.

AE 05

Formular conjeturas y verificarlas en casos particulares acerca de la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño, extraídas de dicha población.

1

Extraen muestras al azar de igual tamaño de una población finita P . Por ejemplo, de una población que tiene como elementos los números 2, 4, 5, 6, 7, 9:

- › Extraen 5 muestras al azar de tamaño 3
- › Calculan la media de cada una de las muestras, con esto obtienen los números $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5$
- › Calculan la media de los números $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5$ y la denotan $\bar{\bar{X}}_5$
- › Calculan la media de la población y la comparan con $\bar{\bar{X}}_5$

2

Extraen, de P , un número mayor de muestras de tamaño 3, por ejemplo 7, y repiten el proceso anterior; es decir:

- › Calculan la media de cada una de las muestras, con esto obtienen los números $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6, \bar{x}_7$
- › Calculan la media de los números $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6, \bar{x}_7$ y la denota $\bar{\bar{X}}_7$
- › Comparan la media de la población P con $\bar{\bar{X}}_7$

3

Realizan nuevamente el experimento anterior, pero con mayor cantidad de muestras de tamaño 3, y calculan la media de las medias y la comparan con la media de la población.

4

Conjeturan acerca de la relación que existe entre la media de las medias de muestras de igual tamaño extraídas desde una población y la media de esta.

5

Verifican la conjetura formulada en casos particulares.

- ❗ **Observaciones al docente:** Puede resultar útil proponer el uso de la calculadora para generar números aleatorios. La idea es utilizar la función "aleatorio" para generar números al azar entre 0 y 1. También puede generar números aleatorios entre 1 y 15, usando la misma función. Cabe mencionar que en esta experiencia también se podría utilizar una planilla electrónica para generar dichos números.

Esta actividad es una oportunidad para observar la manera en que los estudiantes establecen métodos para generar muestras aleatorias a partir de un conjunto mayor o población.

AE 06

Interpretar información, en diversos contextos, mediante el uso de medidas de posición y de tendencia central, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando.

AE 07

Producir información, en contextos diversos, mediante el uso de medidas de posición y de tendencia central, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando.

R 1

A partir de un gráfico o de una tabla de datos de su interés, extraen información relevante para el contexto. (Economía)

Por ejemplo:

El siguiente gráfico muestra el gasto y el ingreso medio de los hogares de Santiago, según quintil.

Gasto e ingreso mensual promedio del Gran Santiago por hogar, según quintil de Ingreso per Cápita (Pesos de abril de 2007)



Fuente: www.ine.cl/canales/chile_estadistico/encuestas_presupuestos_familiares/2008/Presentacion%20EPF%202006-2007.pdf

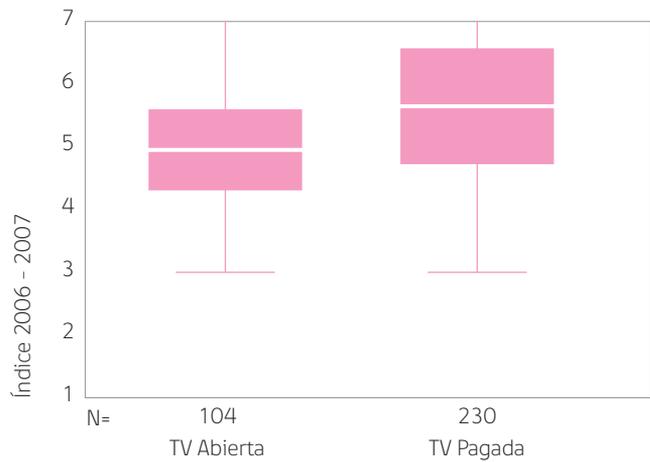
- > Interpretan el gráfico, extrayendo información relevante basada en las medidas de posición (quintiles) y de tendencia central (promedio) que se muestran (hacen una estimación de estas medidas)
- > Conjeturan acerca del gasto-ingreso medio del percentil 80
- > Comparan los promedios de gasto e ingreso en los primeros cuatro quintiles
- > Estiman el valor de las medidas de tendencia central de la muestra
- > Discuten sobre los factores que influyen en los datos

2

Comparan dos o más conjuntos de datos, usando medidas de tendencia central y de posición. Por ejemplo, comparan usando diagramas de caja y bigotes. En el siguiente gráfico⁸ se muestra la valoración (puntaje) hacia las opciones de TV abierta y TV pagada respecto de la programación infantil.

Continúa en página siguiente →

8 Fuente: CNTV Departamento de Estudios 2007.



Otros datos son:

	Media	Mediana
TV Abierta	5,14	5,08
TV Pagada	5,47	5,43

Responden a la pregunta: ¿qué se puede concluir respecto de la valoración de la TV pagada versus la TV abierta?

- ❗ **Observaciones al docente:** Esta es una buena oportunidad para introducir los diagramas de caja y bigotes, los cuales permiten comparar conjuntos de datos a partir de los valores: máximo, primer cuartil, segundo cuartil, tercer cuartil y mínimo.

3

A partir de la información gráfica expresada en polígonos de frecuencia acumulada, establecen relaciones, considerando medidas de posición como cuartiles, quintiles u otro percentil.

4

Realizan un estudio estadístico de un tema de interés que incluya:

- › Recopilación de información
- › Síntesis de la información mediante el cálculo de las medidas de tendencia central y algunas medidas de posición
- › Representación gráfica de la información, seleccionando el gráfico más adecuado de acuerdo a la clasificación de la variable en estudio
- › Análisis de la información a través de una planilla electrónica que facilita los cálculos y permite verificar los propios, además de contribuir en la exactitud de la representación gráfica

- ❗ **Observaciones al docente:** Esta actividad puede constituirse como un proyecto de curso, en el cual los alumnos se motiven a realizar un estudio de interés que parte de una o varias preguntas que necesitan ser respondidas. La importancia de este trabajo radica en el hecho de que puede integrar a más de un Aprendizaje Esperado.

AE 08

Utilizar el cálculo de medidas de tendencia central y de posición para analizar muestras de datos agrupados en intervalos.

1

Calculan la media de muestras obtenidas de una población y que están agrupadas en intervalos, y utilizan este cálculo para analizar la muestra. Por ejemplo, en un colegio se toman muestras de estudiantes de edades entre 10 y 11 años para analizar sus pesos. El docente entrega a los alumnos información relativa a estas muestras en intervalos y les pide que la analicen, utilizando cálculos de la media de estos datos.

2

El profesor pide ahora a los estudiantes que utilicen cuartiles para analizar la información anterior y que entreguen conclusiones al respecto.

AE 09

Resolver problemas referidos a cálculos de probabilidades, aplicando el modelo de Laplace o frecuencias relativas, dependiendo de las características del experimento aleatorio.

1

Realizan una lista de experimentos aleatorios y destacan aquellos que tienen resultados equiprobables.

2

Discuten situaciones o anécdotas históricas respecto de la equiprobabilidad de sucesos y el modelo de Laplace. Por ejemplo, acerca del error de D'Alembert con respecto al lanzamiento de dos monedas idénticas.

❗ **Observaciones al docente:** Para mayor información con respecto al error de D'Alembert, se puede ingresar a: www2.scielo.org/ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1317-58152009000100004&lng=es&nrm=iso

3

Realizan una lista de experimentos en los que, a priori, no pueden asegurar equiprobabilidad de los resultados. Por ejemplo, lanzar dados cargados o no equilibrados, lanzar chinchas o vasos plásticos. Justifican entonces por qué no se puede aplicar el modelo de Laplace.

4

Calculan probabilidades en experimentos de diversos contextos, escribiendo en su cuaderno la justificación del modelo (frecuencias relativas o Laplace) utilizado en el cálculo.

Por ejemplo:

- › En el juego de la ruleta, cierto jugador experto registró los resultados de 100.000 lanzamientos en un mes. Obtuvo que la bolita cayó aproximadamente 49.500 veces en el color negro, aproximadamente 48.500 veces en el color rojo y el resto de las ocasiones cayó en el cero (verde).
- › Si el jugador se dispone a apostar, ¿por qué color lo hará? Justifique su respuesta.
- › La ruleta tiene 36 números negros, 36 números rojos y 1 número verde. Sabiendo que los resultados son equiprobables, ¿qué color jugaría usted?

Continúa en página siguiente →

› ¿Todos los colores tienen la misma probabilidad de ocurrencia?



❗ **Observaciones al docente:** Se sugiere al profesor implementar el cálculo de probabilidades, utilizando tanto el modelo de frecuencias relativas como el modelo de Laplace.

Ejemplo de Evaluación

AE 03

Obtener la cardinalidad de espacios muestrales y eventos, en experimentos aleatorios finitos, usando más de una estrategia.

INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS

- › Determinan la cardinalidad de un espacio muestral utilizando el principio multiplicativo en diversos experimentos aleatorios. Por ejemplo, al lanzar un dado y una moneda, el espacio muestral tiene $6 \cdot 2 = 12$ resultados posibles.
- › Obtienen el número de muestras aleatorias posibles de un tamaño dado que se pueden extraer, sin reposición, desde una población de tamaño finito, aplicando el número combinatorio.
- › Seleccionan la técnica combinatoria apropiada para resolver problemas que involucren el cálculo de probabilidades, acorde a los requerimientos de cada problema.

AE 09

Resolver problemas referidos a cálculos de probabilidades, aplicando el modelo de Laplace o frecuencias relativas, dependiendo de las características del experimento aleatorio.

INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS

- › Asignan probabilidades de ocurrencia a eventos, mediante el modelo de Laplace o las frecuencias relativas, de acuerdo a las características del experimento aleatorio.

ACTIVIDAD

Responda a las siguientes preguntas de acuerdo a las situaciones propuestas.

- 1 Una caja contiene 6 fichas numeradas del 1 al 6. Se sacan al azar tres fichas de una vez. Luego se forman, con las tres fichas sacadas, todos los números de tres cifras posibles.
 - a. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?
 - b. ¿Cuál es la probabilidad de que, al sacar las tres fichas, se pueda formar un número par?
 - c. ¿Cuál es la probabilidad de que, al sacar las tres fichas, se pueda formar al menos un número impar?
- 2 En un curso de 50 estudiantes, ¿cuántas muestras de 5 estudiantes se pueden seleccionar al azar, sin que se repitan estudiantes en las distintas muestras?

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Se sugiere considerar los siguientes aspectos:

- 1 Determinan cardinalidad de un espacio muestral.
- 2 Obtienen número de muestras posibles.
- 3 Calculan la probabilidad de un evento utilizando técnicas de combinatoria.

BIBLIOGRAFÍA PARA EL DOCENTE

- ALEKSANDROV, A., KOLMOGOROV, A., LAURENTIEV, M Y OTROS. (1976). *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Madrid: Alianza Universidad.
- ALSINA CATALÁ, C. Y OTROS. (1990). *Simetría dinámica*. Síntesis.
- ALSINA CATALÁ, C., BURGUÉS FLAMERICH, C., FORTUNY AYMENY, J. M. (1988). *Materiales para construir la geometría*. Síntesis.
- ALSINA CATALÁ, C.; FORTUNY AYMENY, J. M.; BURGUÉS FLAMERICH, C. *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Síntesis.
- ALSINA, BURGUÉS, FORTUNY, GIMÉNEZ Y TORRA. (1996). *Enseñar matemáticas*. Madrid: Graó.
- ARAYA S., ROBERTO, MATUS, CLAUDIA. (2008). *Buscando un orden para el azar, Proyecto Enlaces Matemática*. Santiago: Centro Comenius Universidad de Santiago de Chile.
- ARGÜELLES RODRÍGUEZ, J. (1989). *Historia de la matemática*. Akal.
- ARIAS, Y OTROS. (1992). *Hoja de Cálculo en la enseñanza de las matemáticas en Secundaria*. Madrid: Universidad Autónoma de Madrid.
- ARTIGUE, M. (1994). Una introducción a la didáctica de la matemática, en *Enseñanza de la Matemática. Selección bibliográfica*. MCyE.
- ARTIGUE, MICHÉLE Y OTROS. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México, Iberoamericana.
- AZCÁRATE GIMÉNEZ, C., DEULOFEU PIQUET, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Síntesis.
- BERLANGA, R., BOSCH, C., RIVAUD, J. (2000). *Las Matemáticas, perejil de todas las salsas*. México: Fondo de Cultura Económica.
- BOYER, C. B. (1987). *Historia de las Matemáticas*. Madrid: Alianza.
- CALLEJO, LUZ. (1994). *Un club de Matemática para la diversidad*. Madrid: Narcea.
- CANTORAL, R., Y OTROS. (2003). *Desarrollo del pensamiento Matemático*. Garza.
- CAÑÓN, C. (1993). *La matemática creación y descubrimiento*. Madrid: Universidad Pontifica de Comillas.
- CEDILLO, TENOCH. (1997). *Calculadoras: Introducción al Álgebra*. México: Iberoamericana.
- CENTENO, JULIA. (1995). *Números decimales*. Madrid: Síntesis.
- CORBALÁN, FERNANDO. (1995). *La matemática aplicada a la vida cotidiana*. Barcelona: Graó.
- COXETER, H. S. M., GREITZER, S. L. (1994). *Retorno a la Geometría*. Madrid: DLS-Euler Editores.
- D'AMORE, BRUNO. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Colombia: Magisterio.
- DE BURGOS, J. (1994). *Curso de Álgebra y Geometría*. Madrid: Alhambra Longman.
- DE MELLO E SOUZA, JULIO CÉSAR (MALBA TAHAN). (2002). *El hombre que calculaba*. Limusa.
- DÍAZ, J. Y OTROS. (1987). *Azar y probabilidad*. Madrid: Síntesis.
- DICKSON, L., BROWN, M., Y GIBSON, O. (1991). *El aprendizaje de las Matemáticas*. Barcelona: Labor.
- DOLORES, C., Y OTROS. (2007). *Matemática Educativa*. Madrid: Díaz de Santos.
- DUHALDE, M. E., GONZÁLEZ, M. T. (2003). *Encuentros cercanos con la matemática*. Argentina: AIQUE.
- GARCÍA TALAVERA G. (1998). *Heurística Geométrica*. México: Limusa.
- GOÑI, J. M. (COORD.). (2000). *El Currículo de Matemática en los inicios del siglo XXI*. Barcelona: Graó.
- GOVINDEN L., PORTUS. (1998). *Introducción a la Estadística*. Mc Graw Hill.
- HONSBERGER, R. (1994). *El ingenio en las Matemáticas*. Madrid: DLS-Euler Editores.
- JOHSUA, S., DUPIN, J. (2005). *Introducción a la didáctica de las ciencias y la matemática*. Buenos Aires: Colihue.
- KOSTOVSKY, A. N. (1984). *Construcciones Geométricas mediante un Compás*. Moscú: Mir.
- LEHMANN, CHARLES. (2001). *Álgebra*. Limusa.
- MALILA C., GHYKA. (1968). *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*. Buenos Aires: Poseidón.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN DE CHILE. (2004). *Matemática. Programa de Estudio, Primer Año Medio*.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN DE CHILE. (2004). *Matemática. Programa de Estudio, Segundo Año Medio*.
- MOYA, M., TRONCOSO, M., YAÑEZ, M. (2008). *El poder de la generalización. Primero Medio*.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN DE CHILE. (2009). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios, Matemática*.
- PLANAS, NURIA, ALSINA, ÁNGEL. (2005). *Educación Matemática y buenas prácticas*. Barcelona: Graó.
- REVISTA UNO. (1997). *Las Matemáticas en el entorno*. Barcelona: Graó.
- REYES, C., VALENZUELA, MARISOL. (2006). Ministerio de Educación. *Matemática. Guía didáctica para el profesor. Primer Año Medio*. Mc Graw Hill.
- RODRIGUEZ, JOSÉ Y OTROS. (1997). *Razonamiento Matemático*. México: Internacional Thompson.
- SAAVEDRA G., EUGENIO. (2005). *Contenidos Básicos de Estadística y Probabilidad*. Universidad de Santiago.
- SADOVSKY, P. (2005). *Enseñar Matemática Hoy*. Argentina: Libros del Zorral.
- SERRANO, J. M. Y OTROS. (1997). *Aprendizaje Cooperativo en Matemática*. Universidad de Murcia.
- SMITH, STANLEY A. *Álgebra, trigonometría y geometría*. Prentice Hall.
- SPIEGEL, M., MOYER, R. E. (2006). *Álgebra Superior*. Schaum. Mc Graw Hill.

SULLIVAN, M. (2006). *Álgebra y Trigonometría*. Séptima Edición. Pearson/Prentice Hall.

VALENZUELA, P. H. (2006). *Fundamentos de matemática universitaria. Álgebra y Cálculo*. Pearson.

VARGAS-MACHUCA, INMACULADA, GONZÁLEZ, JOSÉ LUIS Y OTROS. (1990). *Números Enteros. Matemáticas: Cultura y Aprendizaje*. Madrid: Síntesis.

VILLANUEVA Y OTROS. (1993). *Geometría elemental*. Santiago: Universidad Católica de Chile.

WINSTON H., ELPHICK D. (2001). *101 Actividades para implementar los Objetivos Fundamentales transversales*. Lom.

Sitios web

Ministerio de Educación de Chile: www.mineduc.cl
Instrumentos Curriculares (Mapas de Progreso, Programas de estudio, etc.): www.curriculum-mineduc.cl
Instituto Nacional de Estadísticas: www.inec.cl
Red Maestros de Maestros (Mineduc): www.rmm.cl
Sitio Key Currículum Press de textos de matemática:

Geometría: www.keypress.com/x19850.xml (Ver capítulos de lecciones en español).

Álgebra: www.keypress.com/x19578.xml (Ver capítulos de lecciones en español).

Textos para el docente y el estudiante educación secundaria, México: www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas/recdidactico.html
http://telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/mat_ed/mat_ed_01.php

Recursos digitales interactivos en la web

Portal Educar Chile: www.educarchile.cl/Portal.Base/Web/verContenido.aspx?ID=186119
Enlaces: www.catalogored.cl/recursos-educativos-digitales?nivel_educativo=50&subsector_basica=65
Proyecto Descartes, España: <http://recursostic.educacion.es/descartes/web/>
Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales, applets de la Universidad de UTAH: <http://nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html>
Eduteka, Portal Educativo, Colombia: www.eduteka.org/directorio, luego elegir la carpeta "Matemáticas" o bien desde el enlace directo: www.eduteka.org/directorio/index.php?t=sub_pages&cat=204
Actividades sugeridas por temas: www.eduteka.org/MI/master/interactivate

BIBLIOGRAFÍA PARA EL ESTUDIANTE

GARCÍA TALAVERA, G. (1998). *Heurística Geométrica*. México: Limusa.

CANTORAL, R., FARFÁN, R., CORDERO, F., ALANIS, J., RODRÍGUEZ, R. (2003). *Desarrollo del pensamiento Matemático*. Garza.

ARGÜELLES RODRÍGUEZ, J. (1989). *Historia de la matemática*. Akal.

ARIAS, Y OTROS. (1992). *Hoja de Cálculo en la enseñanza de las matemáticas en Secundaria*. Madrid: Universidad Autónoma de Madrid.

AZCÁRATE GIMÉNEZ, C., DEULOFEU PIQUET, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Síntesis.

BOYER, C. B. (1987). *Historia de las Matemáticas*. Madrid: Alianza.

DE BURGOS, J. (1994). *Curso de Álgebra y Geometría*. Madrid: Alhambra Longman.

CAÑÓN, C. (1993). *La matemática creación y descubrimiento*. Madrid: Universidad Pontificia de Comillas.

COXETER, H. S. M., GREITZER, S.L. (1994). *Retorno a la Geometría*. Madrid: DLS-Euler Editores.

HONSBERGER, R. (1994). *El ingenio en las Matemáticas*. Madrid: DLS-Euler Editores.

DE MELLO E SOUZA, JULIO CÉSAR (MALBA TAHAN) (2002). *El hombre que calculaba*. Limusa.

ARAYA S., ROBERTO, MATUS, CLAUDIA. (2008). *Buscando un orden para el azar*. Santiago: Centro Comenius Universidad de Santiago de Chile.

GOVINDEN L., PORTUS. (1998). *Introducción a la Estadística*. Mc Graw Hill.

MOYA, M., TRONCOSO, M., YAÑEZ, M. (2008). *El poder de la generalización. Primero Medio*.

Sitios web

Textos para el docente y el estudiante educación secundaria, México: www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas/recdidactico.html
http://telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/mat_ed/mat_ed_01.php

Recursos digitales interactivos en la web

Portal Educar Chile: www.educarchile.cl/Portal.Base/Web/verContenido.aspx?ID=186119
Enlaces: www.catalogored.cl/recursos-educativos-digitales?nivel_educativo=50&subsector_basica=65
Proyecto Descartes, España: <http://recursostic.educacion.es/descartes/web/aplicaciones.php>
Biblioteca Nacional de Manipuladores Virtuales, applets de la Universidad de UTAH: El enlace genérico es <http://nlvm.usu.edu/es/nav>, o bien puede escoger los enlaces directos:
Números y operaciones: http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_g_4_t_1.html
Álgebra: http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_g_4_t_2.html
Geometría: http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_g_4_t_3.html
http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_g_4_t_4.html

Análisis de Datos y Probabilidad: http://nlvm.usu.edu/es/nav/category_g_4_t_5.html

EduTEKA, Portal Educativo, Colombia: Actividades sugeridas: www.eduteka.org/MI/master/interactivate/

El enlace genérico de las unidades temáticas es www.eduteka.org/directorio o bien puede escoger los enlaces directos:

Números y operaciones: www.eduteka.org/directorio/index.php?t=sub_pages&cat=362

Geometría: www.eduteka.org/directorio/index.php?t=sub_pages&cat=363

www.eduteka.org/directorio/index.php?t=sub_pages&cat=364

Probabilidad y Estadística: www.eduteka.org/directorio/index.php?t=sub_pages&cat=365

Álgebra: www.eduteka.org/directorio/index.php?t=sub_pages&cat=366

BIBLIOGRAFÍA CRA

A continuación se detallan publicaciones que se puede encontrar en las bibliotecas de los Centros de Recursos para el Aprendizaje (CRA) en cada establecimiento:

Unidad 1

BALDOR, AURELIO. (2002). *Aritmética*. México D.F., Publicaciones Cultural.

GARDNER, MARTIN. (1995). *Carnaval matemático*. Madrid: Alianza Editorial.

Unidad 2

MORENO, R. (2007). *Alhacén, el arquímedes árabe*. Madrid: Nivola.

ROJANO, T., URSINI, S. (1997). *Aprendiendo álgebra con hojas electrónicas de cálculo*. Iberoamérica.

Unidad 3

BALDOR, AURELIO. *Geometría y trigonometría*. México D.F., Publicaciones Cultural.

FILLOY, E., HITT, F. (1981). *Geometría analítica*. Iberoamérica.

Unidad 1 y 2

VARIOS AUTORES. *Aritmética y álgebra*. Santiago de Chile, Santillana.

Todas las Unidades

ARGÜELLES, JUAN. (1994). *Matemática recreativa*. México: Akal.

ARGÜELLES, JUAN. (1989). *Historia de la matemática*. México: Akal.

BERLANGA Y OTROS. (1999). *Las matemáticas, perejil de todas las salsas*. Fondo de Cultura Económica.

CORBALÁN, FERNANDO. (1995). *La matemática aplicada a la vida cotidiana*. Barcelona: Graó.

GALDÓS, L. (1995). *Consultor matemático*. Madrid: Cultural de Ediciones.

GARDNER, MARTIN. (2007). *Los acertijos de Sam Loyd*. España: Zugarto.

GARDNER, MARTIN. (1992). *Magia Inteligente*. España: Zugarto.

GARDNER, MARTIN. (1994). *Matemática para divertirse*. España: Zugarto.

GUEDJ, DENIS. (1998). *El imperio de las cifras y los números*. Barcelona: Ediciones B.

HEBER NIETO, JOSÉ. (2005). *Olimpiadas matemáticas: el arte de resolver problemas*. Los libros de El Nacional.

IRIZO, CONSTANZA, LÓPEZ, JORGE. (1992). *De la prensa a las matemáticas*. Barcelona: Octaedro.

JIMÉNEZ, DOUGLAS. (2006). *Matemáticos que cambiaron al mundo*. Los libros de El Nacional.

KLINE, MORRIS. (1992). *Matemáticas para los estudiantes de humanidades*. México: Fondo de Cultura Económica.

MATAIX, MARIANO. (1993). *Esbozos biográficos y pasatiempos matemáticos*. Barcelona: Marcombo.

NOMDEDEU, X. (2000). *Mujeres, manzanas y matemáticas, entretajadas*. Madrid: Nivola Libros.

PÉREZ-RUIZ SOBERÓN, MARIO. (2002). *Pitágoras. El misterio de la voz interior*. Una investigación de arqueología filosófica. Barcelona: Océano.

SERRANO, ESTEBAN. (2007) *¡Ojalá no hubiera números!* Madrid: Nivola Libros.

TAHAN, MALBA. (2006). *El hombre que calculaba*. Buenos Aires: Pluma y Papel.

TAHAN, MALBA. (2006). *Matemática curiosa y divertida*. Buenos Aires: Pluma y Papel.

VANCLEAVE, JANICE. (1997). *Matemáticas para niños y jóvenes*. México: Limusa.

CARREÑO, XIMENA, CRUZ, XIMENA. (1997). *Álgebra*. Santiago de Chile, Arrayán Editores.

Anexos

Anexo 1

Uso flexible de otros instrumentos curriculares

*Orientan sobre la
progresión típica de
los aprendizajes*

Existe un conjunto de instrumentos curriculares que los docentes pueden utilizar de manera conjunta y complementaria con el programa de estudio. Estos se pueden usar de manera flexible para apoyar el diseño e implementación de estrategias didácticas y para evaluar los aprendizajes.

Mapas de Progreso⁹. Ofrecen un marco global para conocer cómo progresan los aprendizajes clave a lo largo de la escolaridad.

Pueden usarse, entre otras posibilidades, como un apoyo para abordar la diversidad de aprendizajes que se expresa al interior de un curso, ya que permiten:

- › caracterizar los distintos niveles de aprendizaje en los que se encuentran los estudiantes de un curso
- › reconocer de qué manera deben continuar progresando los aprendizajes de los grupos de estudiantes que se encuentran en estos distintos niveles

*Apoyan el trabajo
didáctico en el aula*

Textos escolares. Desarrollan los Objetivos Fundamentales y los Contenidos Mínimos Obligatorios para apoyar el trabajo de los alumnos en el aula y fuera de ella, y les entregan explicaciones y actividades para favorecer su aprendizaje y su autoevaluación.

Los docentes también pueden enriquecer la implementación del currículum, haciendo uso de los recursos entregados por el Mineduc a través de:

- › Los **Centros de Recursos para el Aprendizaje (CRA)** y los materiales impresos, audiovisuales, digitales y concretos que entregan
- › El **Programa Enlaces** y las herramientas tecnológicas que ha puesto a disposición de los establecimientos

9 En una página describen, en 7 niveles, el crecimiento típico del aprendizaje de los estudiantes en un ámbito o eje del sector a lo largo de los 12 años de escolaridad obligatoria. Cada uno de estos niveles presenta una expectativa de aprendizaje correspondiente a dos años de escolaridad. Por ejemplo, el Nivel 1 corresponde al logro que se espera para la mayoría de los niños y niñas al término de 2º básico; el Nivel 2 corresponde al término de 4º básico, y así sucesivamente. El Nivel 7 describe el aprendizaje de un alumno que, al egresar de la Educación Media, es “sobresaliente”; es decir, va más allá de la expectativa para IV medio descrita en el Nivel 6 en cada mapa.

Anexo 2

Objetivos Fundamentales por semestre y unidad

OBJETIVO FUNDAMENTAL	SEMESTRE 1	SEMESTRE 2
OF 01 Comprender que los números racionales constituyen un conjunto numérico en el que es posible resolver problemas que no tienen solución en los números enteros y caracterizarlos como aquellos que pueden expresarse como un cociente de dos números enteros con divisor distinto de cero.	unidad 1	
OF 02 Representar números racionales en la recta numérica, usar la representación decimal y de fracción de un racional justificando la transformación de una en otra, aproximar números racionales, aplicar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números racionales en situaciones diversas y demostrar algunas de sus propiedades.	unidad 1	
OF 03 Comprender el significado de potencias que tienen como base un número racional y exponente entero y utilizar sus propiedades.	unidad 1	
OF 04 Transformar expresiones algebraicas no fraccionarias, utilizando diversas estrategias y usar las funciones lineales y afines como modelos de situaciones o fenómenos y representarlas gráficamente en forma manual o usando herramientas tecnológicas.	unidad 2	
OF 05 Identificar regularidades en la realización de transformaciones isométricas en el plano cartesiano, formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones sobre figuras geométricas.		unidad 3
OF 06 Comprender los conceptos y propiedades de la composición de funciones y utilizarlos para resolver problemas relacionados con las transformaciones isométricas.		unidad 3
OF 07 Conocer y utilizar conceptos y propiedades asociados al estudio de la congruencia de figuras planas, para resolver problemas y demostrar propiedades.		unidad 3
OF 08 Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante gráficos que se obtienen desde tablas de frecuencia, cuyos datos están agrupados en intervalos.		unidad 4

OBJETIVO FUNDAMENTAL

SEMESTRE 1

SEMESTRE 2

OF 09

Obtener la cardinalidad de espacios muestrales y eventos, en experimentos aleatorios finitos, usando más de una estrategia y aplicarla al cálculo de probabilidades en diversas situaciones.

unidad 4

OF 10

Comprender la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño extraídas de dicha población.

unidad 4

OF 11

Interpretar y producir información, en contextos diversos, mediante el uso de medidas de posición y de tendencia central, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando.

unidad 4

OF 12

Seleccionar la forma de obtener la probabilidad de un evento, ya sea en forma teórica o experimentalmente, dependiendo de las características del experimento aleatorio.

unidad 4

OF 13

Aplicar modelos lineales que representan la relación entre variables, diferenciar entre verificación y demostración de propiedades y analizar estrategias de resolución de problemas de acuerdo con criterios definidos, para fundamentar opiniones y tomar decisiones.

unidad 1

unidad 2

unidad 3

Anexo 3

Contenidos Mínimos Obligatorios por semestre y unidad

CONTENIDOS MÍNIMOS OBLIGATORIOS	SEMESTRE 1	SEMESTRE 2
NÚMEROS		
CMO 01		
Identificación de situaciones que muestran la necesidad de ampliar el conjunto de los números enteros al conjunto de los números racionales y caracterización de estos últimos.	unidad 1	
CMO 02		
Representación de números racionales en la recta numérica, verificación de la cerradura de la adición, sustracción, multiplicación y división en los racionales y verificación de la propiedad: “entre dos números racionales siempre existe otro número racional”.	unidad 1	
CMO 03		
Justificación de la transformación de números decimales infinitos periódicos y semiperiódicos a fracción.	unidad 1	
CMO 04		
Sistematización de procedimientos de cálculo escrito y con ayuda de herramientas tecnológicas de adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números racionales y su aplicación en la resolución de problemas.	unidad 1	
CMO 05		
Aproximación de racionales a través del redondeo y truncamiento, y reconocimiento de las limitaciones de la calculadora para aproximar decimales.	unidad 1	
CMO 06		
Extensión de las propiedades de potencias al caso de base racional y exponente entero, y aplicación de ellas en diferentes contextos.	unidad 1	
CMO 07		
Resolución de problemas en contextos diversos que involucran números racionales o potencias de base racional y exponente entero, enfatizando el análisis crítico de los procedimientos de resolución y de los resultados obtenidos.	unidad 1	
ÁLGEBRA		
CMO 08		
Establecimiento de estrategias para transformar expresiones algebraicas no fraccionarias en otras equivalentes, mediante el uso de productos notables y factorizaciones.		unidad 2

CONTENIDOS MÍNIMOS OBLIGATORIOS

SEMESTRE 1

SEMESTRE 2

ÁLGEBRA

CMO 08

Establecimiento de estrategias para transformar expresiones algebraicas no fraccionarias en otras equivalentes, mediante el uso de productos notables y factorizaciones.

unidad 2

CMO 09

Resolución de problemas cuyo modelamiento involucre ecuaciones literales de primer grado.

unidad 2

CMO 10

Análisis de las distintas representaciones de la función lineal¹⁰, su aplicación en la resolución de diversas situaciones problema y su relación con la proporcionalidad directa.

unidad 2

CMO 11

Estudio de la composición de funciones, análisis de sus propiedades y aplicación a las transformaciones isométricas.

unidad 3

CMO 12

Uso de un software gráfico en la interpretación de la función afín, análisis de las situaciones que modela y estudio de las variaciones que se producen por la modificación de sus parámetros¹¹.

unidad 2

GEOMETRÍA

CMO 13

Identificación del plano cartesiano y su uso para representar puntos y figuras geométricas manualmente y haciendo uso de un procesador geométrico.

unidad 3

CMO 14

Notación y representación gráfica de vectores en el plano cartesiano y aplicación de la suma de vectores para describir traslaciones de figuras geométricas.

unidad 3

CMO 05

Formulación de conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de traslaciones, reflexiones y rotaciones sobre figuras geométricas en el plano cartesiano y verificación, en casos particulares, de dichas conjeturas mediante el uso de un procesador geométrico o manualmente.

unidad 3

10 Mediante expresiones algebraicas, tablas y gráficos.

11 Pendiente e intercepto con el eje Y.

CONTENIDOS MÍNIMOS OBLIGATORIOS

SEMESTRE 1

SEMESTRE 2

CMO 16

Relación del concepto de congruencia de figuras planas con las transformaciones isométricas, formulación y verificación de conjeturas, en casos particulares, acerca de criterios de congruencia en triángulos y utilización de estos criterios en la resolución de problemas y en la demostración de propiedades en polígonos.

unidad 3

DATOS Y AZAR

CMO 17

Obtención de información a partir del análisis de los datos presentados en histogramas, polígonos de frecuencia y de frecuencias acumuladas, considerando la interpretación de medidas de tendencia central y posición.

unidad 4

CMO 18

Organización y representación de datos, extraídos desde diversas fuentes, usando histogramas, polígonos de frecuencia y frecuencias acumuladas, construidos manualmente y con herramientas tecnológicas.

unidad 4

CMO 19

Análisis de una muestra de datos agrupados en intervalos, mediante el cálculo de medidas de tendencia central (media, moda y mediana) y medidas de posición (percentiles y cuartiles), en diversos contextos y situaciones.

unidad 4

CMO 20

Uso de técnicas combinatorias para resolver diversos problemas que involucren el cálculo de probabilidades.

unidad 4

CMO 21

Utilización y establecimiento de estrategias para determinar el número de muestras de un tamaño dado, que se pueden extraer desde una población de tamaño finito, con y sin reemplazo.

unidad 4

CMO 22

Formulación y verificación de conjeturas, en casos particulares, acerca de la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño extraídas de dicha población, con y sin reemplazo.

unidad 4

CMO 23

Resolución de problemas en contextos de incerteza, aplicando el cálculo de probabilidades mediante el modelo de Laplace o frecuencias relativas, dependiendo de las condiciones del problema.

unidad 4

Anexo 4

Relación entre Aprendizajes Esperados, Objetivos Fundamentales (OF) y Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO)

APRENDIZAJES ESPERADOS	OF	CMO
Unidad 1		
Números		
AE 01	1	1
Distinguir problemas que no admiten solución en los números enteros y que pueden ser resueltos en los números racionales no enteros.		
AE 02	2	3
Justificar matemáticamente que los decimales periódicos y semiperiódicos son números racionales.		
AE 03	2	2
Establecer relaciones de orden entre números racionales.		
AE 04	2	2
Representar números racionales en la recta numérica.		
AE 05	2	4 - 5
Utilizar la calculadora para realizar cálculos reconociendo sus limitaciones.		
AE 06	2	2
Verificar la densidad de los números racionales.		
AE 07	2	2
Verificar la cerradura de las operaciones en los números racionales.		
AE 08	3	6
Comprender el significado de las potencias de base racional y exponente entero.		
AE 09	2 - 3	7
Resolver problemas en contextos diversos que involucran números racionales o potencias de base racional y exponente entero.		

Unidad 2

Álgebra

AE 01	4	8
Identificar patrones en multiplicaciones de expresiones algebraicas no fraccionarias.		
AE 02	4	8
Factorizar expresiones algebraicas no fraccionarias.		
AE 03	4	9
Establecer estrategias para resolver ecuaciones lineales.		
AE 04	4	10 - 12
Analizar representaciones de la función lineal y de la función afín.		
AE 05	6	11
Realizar composiciones de funciones y establecer algunas propiedades algebraicas de esta operación.		
AE 06	4	9
Resolver problemas asociados a situaciones cuyos modelos son ecuaciones literales de primer grado.		

Unidad 3

Geometría

AE 01	5	13
Identificar y representar puntos y coordenadas de figuras geométricas en el plano cartesiano, manualmente o usando un procesador geométrico.		
AE 02	5 - 6	14
Representar en el plano, adiciones, sustracciones de vectores y multiplicaciones de un vector por un escalar.		
AE 03	5 - 6	11 - 15
Aplicar composiciones de funciones para realizar transformaciones isométricas en el plano cartesiano.		
AE 04	5	15
Identificar regularidades en la aplicación de transformaciones isométricas a figuras en el plano cartesiano.		
AE 05	5	15
Formular y verificar conjeturas acerca de la aplicación de transformaciones isométricas a figuras geométricas en el plano cartesiano.		
AE 06	5	16
Establecer el concepto de congruencia a partir de las transformaciones isométricas.		
AE 07	5	16
Formular y verificar conjeturas acerca de criterios de congruencia en triángulos.		
AE 08	7	13 - 16
Resolver problemas relativos a cálculos de vértices y lados de figuras geométricas del plano cartesiano y a la congruencia de triángulos.		

Unidad 4

Datos y Azar

AE 01	8	17
Obtener información a partir del análisis de datos, en diversos contextos, presentados en gráficos y tablas de frecuencia, considerando la interpretación de medidas de tendencia central.		
AE 02	8	18 - 19
Producir información, en contextos diversos, a través de gráficos y tablas de frecuencia con datos agrupados en intervalos, manualmente o mediante herramientas tecnológicas.		
AE 03	9	20
Obtener la cardinalidad de espacios muestrales y eventos, en experimentos aleatorios finitos, usando más de una estrategia.		
AE 04	10	21 - 22
Calcular la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño, extraídas desde una población.		
AE 05	10	21 - 22
Formular conjeturas y verificarlas en casos particulares acerca de la relación que existe entre la media aritmética de una población de tamaño finito y la media aritmética de las medias de muestras de igual tamaño, extraídas de dicha población.		
AE 06	11	19 - 22
Interpretar información, en diversos contextos, mediante el uso de medidas de posición y de tendencia central, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando.		
AE 07	11	19 - 22
Producir información, en contextos diversos, mediante el uso de medidas de posición y de tendencia central, aplicando criterios referidos al tipo de datos que se están utilizando.		
AE 08	11	19
Utilizar el cálculo de medidas de tendencia central y de posición para analizar muestras de datos agrupados en intervalos.		
AE 09	12	20 - 23
Resolver problemas referidos a cálculos de probabilidades, aplicando el modelo de Laplace o frecuencias relativas, dependiendo de las características del experimento aleatorio.		

En este programa se utilizaron las tipografías **Helvetica Neue** en su variante **Bold** y **Digna** (tipografía chilena diseñada por Rodrigo Ramírez) en todas sus variantes.

Se imprimió en papel **Magnomatt** (de 130 g para interiores y 250 g para portadas) y se encuadernó en lomo cuadrado, con costura al hilo y hot melt.



Ministerio de
Educación

Gobierno de Chile