Matemática

Programa de Estudio | Actualización 2009

Cuarto año medio

Ministerio de Educación

4

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

ÍNDICE

PRESENTACIÓN	
Nociones básicas	
Aprendizajes como integración de conocimientos, habilidades y actitudes	
Objetivos Fundamentales Transversales	
Mapas de Progreso	
Consideraciones generales para implementar el programa	
Orientaciones para planificar	
Orientaciones para evaluar	
MATEMÁTICA	
Propósitos Habilidades Orientaciones didácticas	
VISIÓN GLOBAL DEL AÑO	
Semestre 1	
Unidad 1. Álgebra	
Unidad 2. Geometría	
Semestre 2	
Unidad 3. Datos y azar I	
Unidad 4. Datos y azar II	
Bibliografía	
Anexos	

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

PRESENTACIÓN

El programa es una propuesta para lograr los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios.

El programa de estudio ofrece una propuesta para organizar y orientar el trabajo pedagógico del año escolar. Esta propuesta pretende promover el logro de los Objetivos Fundamentales (OF) y el desarrollo de los Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO) que define el Marco Curricular[1].

La ley dispone que cada establecimiento puede elaborar e implementar sus propios programas de estudio, una vez que estos hayan sido aprobados por parte del Mineduc. El presente programa constituye una propuesta para aquellos establecimientos que no cuentan con programas propios.

Los principales componentes que conforman la propuesta del programa son:

- Una especificación de los aprendizajes que se deben lograr para alcanzar los OF y los CMO del Marco Curricular, lo que se expresa mediante los *Aprendizajes Esperados*[2].
- Una organización temporal de estos aprendizajes en semestres y unidades.
- Una propuesta de actividades de aprendizaje y de evaluación, a modo de sugerencia.

Además, se presenta un conjunto de elementos para orientar el trabajo pedagógico que se lleva a cabo a partir del programa y para promover el logro de los objetivos que este propone.

Este programa de estudio incluye:

Nociones básicas. Esta sección presenta conceptos fundamentales que están en la base del Marco Curricular y, a la vez, ofrece una visión general acerca de la función de los Mapas de Progreso.

***Consideraciones generales para implementar el programa*.** Consisten en orientaciones relevantes para trabajar con el programa y organizar el trabajo en torno a él.

***Propósitos, habilidades y orientaciones didácticas*.** Esta sección presenta sintéticamente los propósitos y sentidos sobre los que se articulan los aprendizajes del sector y las habilidades a desarrollar. También entrega algunas orientaciones pedagógicas importantes para implementar el programa en el sector.

Visión global del año. Presenta todos los Aprendizajes Esperados que se deben desarrollar durante el año, organizados de acuerdo a unidades.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

[1] Decreto Supremo N° 254 de 2009.

[2] En algunos casos, estos aprendizajes están formulados en los mismos términos que algunos de los OF del Marco Curricular. Esto ocurre cuando esos OF se pueden desarrollar íntegramente en una misma unidad de tiempo, sin que sea necesario su desglose en definiciones más específicas.

Unidades. Junto con explicitar los Aprendizajes Esperados propios de la unidad, incluyen indicadores de evaluación y ejemplos de actividades que apoyan y orientan el trabajo destinado a promover estos aprendizajes[3].
Instrumentos y ejemplos de evaluación. Ilustran formas de apreciar el logro de los Aprendizajes Esperados y presentan diversas estrategias que pueden usarse para este fin.

Material de apoyo sugerido. Se trata de recursos bibliográficos y electrónicos que pueden emplearse para promover los aprendizajes del sector; se distingue entre los que sirven a las y los docentes y los destinados a las y los estudiantes.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

[3]En algunos casos, las actividades contienen r*elaciones interdisciplinarias* debido a que vinculan dos o más sectores y se simbolizan con ®.

NOCIONES BÁSICAS

APRENDIZAJES COMO INTEGRACIÓN DE CONOCIMIENTOS, HABILIDADES Y ACTITUDES

Habilidades, conocimientos y actitudes…

Los aprendizajes que promueven el Marco Curricular y los programas de estudio apuntan a un desarrollo integral de las y los estudiantes. Para tales efectos, esos aprendizajes involucran tanto los conocimientos propios de la disciplina como las habilidades y actitudes.

…movilizados para enfrentar diversas situaciones y desafíos…

Se busca que las y los estudiantes pongan en juego estos conocimientos, habilidades y actitudes para enfrentar diversos desafíos, tanto en el contexto del sector de aprendizaje como al desenvolverse en su entorno. Esto supone orientarlos hacia el logro de competencias, entendidas como la movilización de dichos elementos para realizar de manera efectiva una acción determinada.

…y que se desarrollan de manera integrada.

Se trata de una noción de aprendizaje de acuerdo con la cual los conocimientos, las habilidades y las actitudes se desarrollan de manera integrada y, a la vez, se enriquecen y potencian de forma recíproca.

Deben promoverse de manera sistemática.

Los conocimientos, las habilidades y las actitudes no se adquieren espontáneamente al estudiar las disciplinas. Requieren promoverse de manera metódica y estar explícitas en los propósitos que articulan el trabajo de los docentes.

CONOCIMIENTOS

Son importantes, porque…

Enriquecen la comprensión y la relación con el entorno.

…los conceptos de las disciplinas o sectores de aprendizaje enriquecen la comprensión de las y los estudiantes sobre los fenómenos que les toca enfrentar. Les permiten relacionarse con el entorno, utilizando nociones complejas y profundas que complementan, de manera crucial, el saber que han generado por medio del sentido común y la experiencia cotidiana. Además, estos conceptos son fundamentales para que las y los estudiantes construyan nuevos aprendizajes.

Se deben desarrollar de manera integrada, porque…

Son una base para el desarrollo de habilidades.

…son una condición para el progreso de las habilidades. Ellas no se desarrollan en un vacío, sino sobre la base de ciertos conceptos o conocimientos.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

HABILIDADES

Son importantes, porque…

Son fundamentales en el actual contexto social.

…el aprendizaje involucra no solo el saber, sino también el saber hacer. Por otra parte, la continua expansión y la creciente complejidad del conocimiento demandan cada vez más capacidades de pensamiento que permitan, entre otros aspectos, usar la información de manera apropiada y rigurosa, examinar críticamente las diversas fuentes de información disponibles, adquirir y generar nuevos conocimientos y aplicarlos de manera pertinente.

Esta situación hace relevante la promoción de diferentes habilidades; entre ellas, desarrollar una investigación, comparar y evaluar la confiabilidad de las fuentes de información y realizar interpretaciones a la luz de la evidencia.

Se deben desarrollar de manera integrada, porque…

Permiten poner en juego los conocimientos.

…sin esas habilidades, los conocimientos y conceptos que puedan elaborar los estudiantes resultan elementos inertes; es decir, elementos que no pueden poner en juego para comprender y enfrentar las diversas situaciones a las que se ven expuestos.

ACTITUDES

Son importantes, porque…

Están involucradas en los propósitos formativos de la educación.

…los aprendizajes siempre están asociados con las actitudes y disposiciones de las y los estudiantes. Entre los propósitos establecidos para la educación se contempla el desarrollo en los ámbitos personal, social, ético y ciudadano. Ellos incluyen aspectos de carácter afectivo y, a la vez, ciertas disposiciones.

A modo de ejemplo, los aprendizajes involucran actitudes como el respeto y la valoración hacia personas e ideas distintas, la solidaridad, el interés por el conocimiento, la valoración del trabajo, la responsabilidad, el emprendimiento, la perseverancia, el rigor, el cuidado y la valoración del ambiente.

Se deben enseñar de manera integrada, porque…

Son enriquecidas por los conocimientos y las habilidades.

…requieren de los conocimientos y las habilidades para su desarrollo. Esos conocimientos y habilidades entregan herramientas para elaborar juicios informados, analizar críticamente diversas circunstancias y contrastar criterios y decisiones, entre otros aspectos involucrados en este proceso.

Orientan la forma de usar los conocimientos y las habilidades.

A la vez, las actitudes orientan el sentido y el uso que cada estudiante otorgue a los conocimientos y las habilidades desarrollados. Son, por lo tanto, un antecedente necesario para usar constructivamente estos elementos.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

OBJETIVOS FUNDAMENTALES TRANSVERSALES (OFT)

Son propósitos generales definidos en el currículum…

Son aprendizajes que tienen un carácter comprensivo y general, y apuntan al desarrollo personal, ético, social e intelectual de las y los estudiantes. Forman parte constitutiva del currículum nacional y, por lo tanto, los establecimientos deben asumir la tarea de promover su logro.

…que deben promoverse en toda la experiencia escolar.

Los OFT no se logran por medio de un sector de aprendizaje en particular, conseguirlos depende del conjunto del currículum. Deben promoverse mediante las diversas disciplinas y en las distintas dimensiones del quehacer educativo dentro y fuera del aula (por ejemplo, por medio del proyecto educativo institucional, de los planes de mejoramiento educativo, de la práctica docente, del clima organizacional, de las normas de convivencia escolar o de las ceremonias y actividades escolares).

Integran conocimientos, habilidades y actitudes.

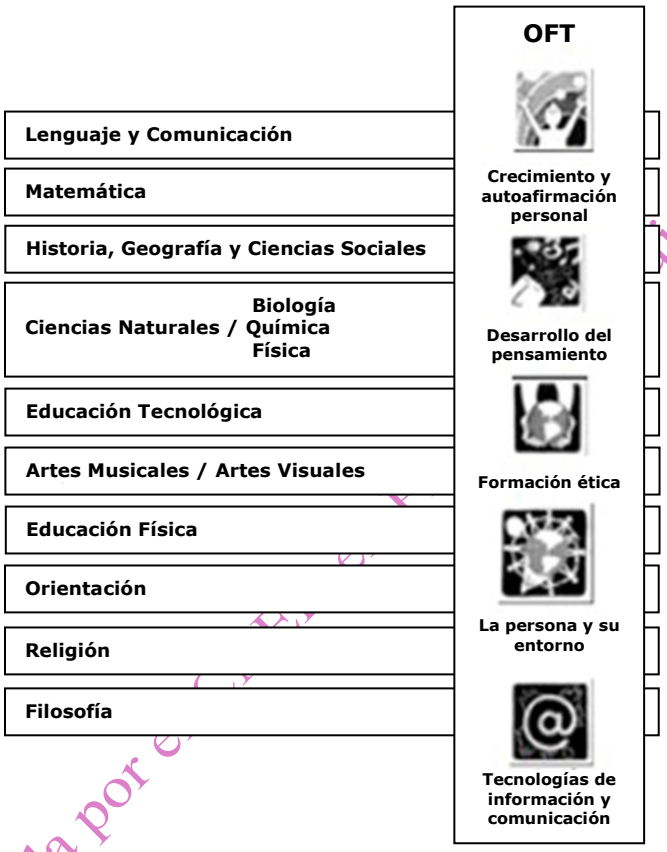
No se trata de objetivos que incluyan únicamente actitudes y valores. Supone integrar esos aspectos con el desarrollo de conocimientos y habilidades.

Dentro de los aspectos más relevantes se encuentran los relacionados con una educación inclusiva. Por un lado, los OFT promueven la formación ciudadana de todos las y los estudiantes. Por otro, incluyen una perspectiva de género orientada a eliminar las desigualdades entre hombres y mujeres, ampliando la mirada hacia la diversidad en el aula, formando niños, niñas y adolescentes responsables de su propio bienestar y del bien común

Versión Aprobada por el CNEB en Proceso de Edición y Diseño

Se organizan en una matriz común para educación básica y media.

A partir de la actualización al Marco Curricular realizada el año 2009, estos objetivos se organizaron bajo un esquema común para la educación básica y la educación media. De acuerdo con este esquema, los Objetivos Fundamentales Transversales se agrupan en cinco ámbitos: crecimiento y autoafirmación personal; desarrollo del pensamiento; formación ética; la persona y su entorno; y, tecnologías de la información y la comunicación.



Versión Aprobada por el Consejo Nacional de Educación y Diseño

MAPAS DE PROGRESO

Describen sintéticamente cómo progresa el aprendizaje…

Son descripciones generales que señalan cómo progresan habitualmente los aprendizajes en las áreas clave de un sector determinado. Se trata de formulaciones sintéticas que se centran en los aspectos esenciales de cada sector. De esta manera, ofrecen una visión panorámica sobre la progresión del aprendizaje en los doce años de escolaridad[4].

…de manera congruente con el Marco Curricular y los programas de estudio.

Los Mapas de Progreso no establecen aprendizajes adicionales a los definidos en el Marco Curricular y los programas de estudio. Su particularidad consiste en que entregan una visión de conjunto sobre la progresión esperada en todo el sector de aprendizaje. Su particularidad consiste en que entregan una visión longitudinal sobre los aprendizajes.

En este marco, los Mapas de Progreso son una herramienta que está al servicio del trabajo pedagógico que realiza el docente, entregándole orientaciones en relación con la trayectoria de los aprendizajes esperados de sus estudiantes. Este dispositivo debe ser asumido como complementario al marco curricular y, por consiguiente, su utilización es totalmente opcional y voluntaria por parte de las escuelas, las que deberán decidir su uso como referencia de la progresión de aprendizajes, de acuerdo a los análisis de pertinencia que cada comunidad realice.

En definitiva, los Mapas de Progreso se constituyen en un recurso de apoyo para la labor formativa del profesor y resguardan la coherencia de los aprendizajes esperados con la estructura curricular vigente que, para el caso de este curso y sector en particular, corresponde a Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media, Actualización 2009.

¿QUÉ UTILIDAD TIENEN LOS MAPAS DE PROGRESO PARA EL TRABAJO DE LOS DOCENTES?

Sirven de apoyo para planificar y evaluar…

Pueden ser un apoyo importante para definir objetivos adecuados, para desarrollar los procesos de enseñanza y para evaluar los respectivos aprendizajes (ver las Orientaciones para planificar y las Orientaciones para evaluar que se presentan en el programa).

…y para atender la diversidad al interior del curso.

Además, son un referente útil para atender a la diversidad de estudiantes dentro del aula:

- Permiten no solamente constatar que existen distintos niveles de aprendizaje dentro de un mismo curso, sino que, además, si se usan para analizar los desempeños de las y los estudiantes, ayudan a caracterizar e identificar con mayor precisión en qué consisten esas diferencias.
- La progresión que describen permite reconocer cómo orientar los aprendizajes de los distintos grupos del mismo curso; es decir, de aquellos

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

[4] Los Mapas de Progreso describen en siete niveles el crecimiento habitual del aprendizaje de los estudiantes en un ámbito o eje del sector. Cada uno de estos niveles presenta una expectativa de aprendizaje correspondiente a dos años de escolaridad. Por ejemplo, el Nivel 1 corresponde al logro que se espera para la mayoría de los niños y niñas al término de 2° básico; el Nivel 2 corresponde al término de 4° básico, y así sucesivamente. El Nivel 7 describe el aprendizaje de una o un estudiante que al egresar de la Educación Media es "sobresaliente", es decir, va más allá de la expectativa para 4° medio que describe el Nivel 6 en cada mapa.

que no han conseguido el nivel esperado y de aquellos que ya lo alcanzaron o lo superaron.

- Expresan el progreso del aprendizaje en un área clave del sector, de manera sintética y alineada con el Marco Curricular.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

Relación entre Mapa de Progreso, Programa de Estudio y Marco Curricular

Marco Curricular

Prescribe los Objetivos Fundamentales y los Contenidos Mínimos Obligatorios que todos las y los estudiantes deben lograr.

Ejemplo:
Objetivo Fundamental para 3° medio:
Comprender que los organismos han desarrollado mecanismos de funcionamiento sistémico y de interacción integrada con el medio exterior, de manera de mantener un ambiente interno estable, óptimo y dinámico, que le confiere cierta independencia de las fluctuaciones del medio exterior.
Contenido Mínimo Obligatorio
Descripción del control hormonal y nervioso en la coordinación e integración de respuestas adaptativas del organismo frente a cambios que modifican su estado de equilibrio, por ejemplo, el estrés, los cambios transitorios o estacionales de la temperatura ambiente.

Programa de Estudio

Orientan la labor pedagógica, estableciendo Aprendizajes Esperados que dan cuenta de los OF y CMO, y los organiza temporalmente por medio de unidades.

Ejemplo:
Aprendizaje Esperado 3° medio:
"Explicar el funcionamiento de circuitos de retroalimentación que permiten la estabilidad del medio interno de los organismos."

Mapa de Progreso

Entrega una visión sintética del progreso del aprendizaje en un área clave del sector y se ajusta a las expectativas del Marco Curricular.

Ejemplo:
"Mapa de Progreso Estructura y función de los seres vivos"

Nivel 7 *Evalúa críticamente las relaciones entre…*

Nivel 6 *…Comprende la contribución de los sistemas nervioso y endocrino en la mantención del medio interno, en términos de comunicación molecular. Comprende los principios generales del funcionamiento del sistema inmune en la defensa de los organismos. Evalúa críticamente hipótesis, conceptos, procedimientos, datos, resultados y conclusiones de investigaciones científicas clásicas y contemporáneas…*

Nivel 5 *Comprende que diferentes órganos y tejidos resultan de…*

Nivel 4 *Comprende la estructura y funcionamiento global de la célula...*

Nivel 3 *Comprende la función global de los sistemas respiratorio, digestivo…*

Nivel 2 *Reconoce que para satisfacer las necesidades vitales…*

Nivel 1 *Describe las diferencias esenciales entre los seres vivos y…*

Versión Aprobada por el Consejo Nacional de Educación y Diseño

CONSIDERACIONES GENERALES PARA IMPLEMENTAR EL PROGRAMA

Las orientaciones que se presentan a continuación destacan elementos relevantes al momento de implementar el programa. Estas orientaciones se vinculan estrechamente con algunos de los OFT contemplados en el currículum.

USO DEL LENGUAJE

La lectura, la escritura y la comunicación oral deben promoverse en los distintos sectores de aprendizaje.

Las y los docentes deben promover el ejercicio de la comunicación oral, la lectura y la escritura como parte constitutiva del trabajo pedagógico correspondiente a cada sector de aprendizaje.

Su importancia se basa en que las habilidades de comunicación son herramientas fundamentales que las y los estudiantes deben emplear para alcanzar los aprendizajes propios de cada sector. Se trata de habilidades que no se desarrollan únicamente en el contexto del sector Lenguaje y Comunicación, sino que se consolidan mediante el ejercicio en diversos espacios y en torno a distintos temas y, por lo tanto, involucran a los otros sectores de aprendizaje del currículum.

Cabe mencionar la presencia en los establecimientos de bibliotecas escolares CRA[5], una herramienta que las y los docentes podrían aprovechar al máximo, pues dispone de una variada oferta de recursos de aprendizaje para todas las edades y, además, es de fácil acceso.

Al momento de recurrir a la lectura, la escritura y la comunicación oral, las y los docentes deben procurar en las y los estudiantes:

Estas habilidades se pueden promover de diversas formas.

Lectura:

- La lectura de distintos tipos de textos relevantes para el sector (textos informativos propios del sector, textos periodísticos y narrativos, tablas y gráficos).
- La lectura de textos de creciente complejidad en los que se utilicen conceptos especializados del sector.
- La lectura de textos que promuevan el análisis crítico del entorno.
- La identificación de las ideas principales y la localización de información relevante.
- La realización de resúmenes y síntesis de las ideas y argumentos presentados en los textos.
- El desarrollo de competencias de información, como la búsqueda de información en fuentes escritas, discriminándola y seleccionándola de acuerdo a su pertinencia.
- La comprensión y el dominio de nuevos conceptos y palabras.
- La construcción de sus propias ideas y opiniones a partir del contenido o argumentos presentados en el texto.
- El uso de su biblioteca escolar CRA para fomentar el disfrute de la lectura y el trabajo de investigación.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

[5] Centro de Recursos para el Aprendizaje.

Escritura:

- La escritura de textos de diversa extensión y complejidad (por ejemplo, reportes, ensayos, descripciones y respuestas breves).
- La organización y presentación de información por medio de esquemas o tablas.
- La presentación de las ideas de una manera coherente y clara.
- El uso apropiado del vocabulario en los textos escritos.
- El uso correcto de la gramática y de la ortografía.
- El conocimiento y uso del lenguaje inclusivo.

Comunicación oral:

- La capacidad de exponer ante otras personas.
- La expresión de ideas y conocimientos de manera organizada.
- El desarrollo de la argumentación al formular ideas y opiniones.
- El uso del lenguaje con niveles crecientes de precisión, incorporando los conceptos propios del sector.
- El planteamiento de preguntas para expresar dudas e inquietudes y para superar dificultades de comprensión.
- La disposición para escuchar información de manera oral, manteniendo la atención durante el tiempo requerido.
- La interacción con otras personas para intercambiar ideas, analizar información y elaborar conexiones en relación con un tema en particular, compartir puntos de vista y lograr acuerdos.

USO DE LAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y LA COMUNICACIÓN (TIC)

Debe impulsarse el uso de las TIC en todos los sectores de aprendizaje.

El desarrollo de las capacidades para utilizar las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) está contemplado de manera explícita como uno de los Objetivos Fundamentales Transversales del Marco Curricular. Esto demanda que el dominio y uso de estas tecnologías se promueva de manera integrada al trabajo que se lleva a cabo al interior de los sectores de aprendizaje. Para esto, se debe procurar que la labor de las y los estudiantes incluya el uso de las TIC para:

Se puede recurrir a diversas formas de uso de estas tecnologías.

- Buscar, acceder y recolectar información en páginas web u otras fuentes, y seleccionar esta información, examinando críticamente su relevancia y calidad.
- Procesar y organizar datos utilizando plantillas de cálculo, y manipular la información sistematizada en ellas para identificar tendencias, regularidades y patrones relativos a los fenómenos estudiados en el sector.
- Desarrollar y presentar información mediante el uso de procesadores de texto, plantillas de presentación y herramientas y aplicaciones de imagen, audio y video.
- Intercambiar información por medio de las herramientas que ofrece internet, como correo electrónico, chat, espacios interactivos en sitios web y/o comunidades virtuales.
- Identificar y resguardarse de los riesgos potenciales del uso de las TIC, mediante el cuidado personal y el respeto por el otro.
- Respetar y asumir consideraciones éticas en el uso de las TIC, como señalar las fuentes de donde se obtiene la información y seguir las normas de uso y de seguridad de los espacios virtuales.

Versión aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

La diversidad entre estudiantes establece desafíos que deben tomarse en consideración.

En el trabajo pedagógico, las y los docentes deben tomar en cuenta la diversidad entre estudiantes en términos culturales, sociales, de sexo, de género, religiosos, étnicos y respecto de estilos y ritmos de aprendizaje y niveles de conocimiento.

Esa diversidad conlleva desafíos que las y los docentes tienen que contemplar. Entre ellos, cabe señalar:

- Reconocer la heterogeneidad de ritmos, estilos y desarrollo cognitivo existente en el aula, adaptando las actividades presentes en este programa al diagnóstico de cada grupo curso.
- Promover el respeto a cada uno de las y los estudiantes, en un contexto de valoración y apertura, considerando las diferencias de género y evitando toda forma de discriminación arbitraria.
- Procurar que los aprendizajes se desarrollen de una manera significativa en relación con el contexto y la realidad de las y los estudiantes.
- Intentar que todos las y los estudiantes logren los objetivos de aprendizaje señalados en el currículum, integrando la diversidad que se manifiesta entre ellos.

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD Y PROMOCIÓN DE APRENDIZAJES

Se debe tener en cuenta que atender a la diversidad de estilos y ritmos de aprendizaje no implica "expectativas más bajas" para algunos estudiantes. Por el contrario, la necesidad de educar en forma diferenciada aparece al constatar que hay que reconocer los requerimientos didácticos personales de las y los estudiantes, para que todos alcancen altas logros. Con esto, se aspira a que todos las y los estudiantes alcancen los aprendizajes dispuestos para su nivel o grado.

Es necesario atender a la diversidad para que todos logren los aprendizajes.

En atención a lo anterior, es conveniente que, al momento de diseñar el trabajo en una unidad, el o la docente considere que precisarán más tiempo o métodos pertinentes para que todos sus estudiantes logren los aprendizajes propuestos. Para esto, debe desarrollar una planificación intencionada que genere las condiciones que le permitan:

Esto demanda conocer qué saben y, sobre esa base, definir con flexibilidad las diversas medidas pertinentes.

- Conocer los diferentes niveles de aprendizaje y conocimientos previos de sus estudiantes.
- Incluir ejemplos y analogías que apelen de manera respetuosa a la diversidad y que incluyan a hombres y mujeres.
- Conocer el contexto y entorno en el cual se desenvuelven sus estudiantes, para desarrollar experiencias de aprendizaje significativas.
- Conocer las motivaciones e intereses de sus estudiantes.
- Conocer las fortalezas y habilidades de sus estudiantes para potenciar sus aprendizajes.
- Evaluar y diagnosticar en forma permanente para reconocer las necesidades de aprendizaje.
- Definir la excelencia, considerando el progreso individual como punto de partida.

Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

- Incluir combinaciones didácticas (agrupamientos, trabajo grupal, rincones) y materiales diversos (visuales, objetos manipulables).
- Evaluar de distintas maneras a sus estudiantes y dar tareas con múltiples opciones.
- Promover la confianza de sus estudiantes en sí mismos y el valor de aprender.
- Promover un trabajo sistemático por parte de sus estudiantes y ejercitación abundante.

ENSEÑAR A CONSTRUIR LA IGUALDAD DE GÉNERO DESDE LA PRÁCTICA

Tal como hombres y mujeres tienden a cumplir roles diferentes en la sociedad, debido entre otras cosas a la socialización, también niños y niñas tienden a cumplir roles diferentes en la sala de clase. El espacio escolar debe proporcionar experiencias de colaboración entre niñas y niños, hombres y mujeres, que les permitan lograr objetivos compartidos desde una posición de igualdad. Se recomienda a las y los docentes que:

- **Propicien la reflexión y discusión sobre temas de género** realizando actividades que incentiven el reconocimiento de los roles, lenguajes y estereotipos con los que se identifican sus estudiantes, y así reflexionen y compartan opiniones sobre ello.
- **Eviten reforzar estereotipos,** enseñando que no existen actividades laborales propias solo de las mujeres o de los hombres, como por ejemplo, las profesiones científicas o las de cuidado de otros.
- **Pongan atención a la forma en que se refieren a las y los estudiantes** visibilizando tanto a hombres como a mujeres, niñas y niños, profesoras y profesores, evitando sesgos en el trato.
- **Erradiquen toda forma de discriminación en sus estudiantes,** no pasando por alto las bromas, apodos, acciones de discriminación o actos humillantes basados en las supuestas diferencias entre hombres y mujeres. Por ejemplo, denostar a un estudiante al que le gusta bailar, atribuyéndole características femeninas con el fin de humillarlo.
- **Eviten la rivalidad entre los géneros,** aplicando metodologías que favorezcan el desarrollo de competencias de forma igualitaria, donde la relación entre los géneros sea de cooperación y autonomía. Por ejemplo, mediante la conformación de grupos mixtos que permitan que las y los estudiantes se reconozcan en función de sus capacidades, talentos e intereses individuales.
- **Promuevan la actividad física y el deporte de manera equitativa entre hombres y mujeres,** ya que son necesarios para llevar una vida saludable, independientemente del sexo.
- **Promuevan espacios o instancias de expresión de emociones y sentimientos,** por ejemplo, conversando con sus estudiantes acerca de la necesidad de expresar sentimientos, y sin coartar la expresión de sus afectos y emociones.
- **Eviten presentar como naturales diferencias entre hombres y mujeres que son culturalmente adquiridas,** por ejemplo, considerar que las mujeres son más aptas para estudiar carreras del ámbito de la salud, debido a la supuesta condición natural que poseen para cuidar u ocuparse de otros, como si fuera la extensión de su maternidad.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

ORIENTACIONES PARA PLANIFICAR

La planificación favorece el logro de los aprendizajes.

La planificación es un elemento central en el esfuerzo por promover, dirigir y garantizar los aprendizajes de las y los estudiantes. Permite maximizar el uso del tiempo y definir los procesos y recursos necesarios para lograr los aprendizajes que se deben alcanzar.

El programa sirve de apoyo a la planificación mediante un conjunto de elementos elaborados para este fin.

Los programas de estudio del Ministerio de Educación constituyen una herramienta de apoyo al proceso de planificación. Para estos efectos han sido elaborados como un material flexible que las y los docentes pueden adaptar a su realidad en los distintos contextos educativos del país.

El principal referente que entrega el programa de estudio para planificar son los Aprendizajes Esperados. De manera adicional, el programa apoya la planificación por medio de la propuesta de unidades, de la estimación del tiempo cronológico requerido en cada una y de la sugerencia de actividades para desarrollar los aprendizajes.

Las actividades que se presentan en este documento tienen un carácter referencial y, si bien pueden ser desarrolladas directamente, se sugiere a la o el docente realizar un diagnóstico de los aprendizaje de sus estudiantes y, a partir de este, adaptarlas de acuerdo al contexto existente en el aula.

CONSIDERACIONES GENERALES PARA REALIZAR LA PLANIFICACIÓN

La planificación es un proceso que se recomienda llevar a cabo considerando los siguientes aspectos:

Se debe planificar tomando en cuenta la diversidad, el tiempo real, las prácticas anteriores y los recursos disponibles.

- La diversidad de ritmos y estilos de aprendizaje de las y los estudiantes del curso, lo que implica planificar considerando desafíos para los distintos grupos de estudiantes.
- El tiempo real con que se cuenta, de manera de optimizar el tiempo disponible.
- Las prácticas pedagógicas que han dado resultados satisfactorios.
- Los recursos para el aprendizaje con que se cuenta: textos escolares, materiales didácticos, recursos elaborados por la escuela o aquellos que es necesario diseñar, laboratorio y materiales disponibles en la biblioteca escolar CRA, entre otros.
- En el caso de una actividad que contemple el uso de la biblioteca escolar CRA, sobre todo en actividades de investigación, se recomienda coordinarse anticipadamente con el encargado o coordinador pedagógico de la biblioteca escolar.

SUGERENCIAS PARA EL PROCESO DE PLANIFICACIÓN

Para que la planificación efectivamente ayude al logro de los aprendizajes, debe estar centrada en torno a ellos y desarrollarse a partir de una visión clara de lo que las y los estudiantes deben y pueden aprender. Para alcanzar este objetivo, se recomienda elaborar la planificación en los siguientes términos:

Lograr una visión lo más clara y concreta posible sobre los desempeños que dan cuenta de los aprendizajes…

- Comenzar por una especificación de los Aprendizajes Esperados que no se limite a listarlos. Una vez identificados, es necesario desarrollar una idea lo

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

más clara posible de las expresiones concretas que puedan tener. Esto implica reconocer qué desempeños de las y los estudiantes demuestran el logro de los aprendizajes. Se deben poder responder preguntas como: ¿Qué deberían ser capaces de demostrar las y los estudiantes que han logrado un determinado Aprendizaje Esperado? o ¿qué habría que observar para saber que un aprendizaje ha sido logrado?

…y, sobre esa base, decidir las evaluaciones, las estrategias de enseñanza y la distribución temporal.

- A partir de las respuestas a esas preguntas, decidir las evaluaciones que se llevarán a cabo y las estrategias de enseñanza. Específicamente, se requiere identificar qué tarea de evaluación es más pertinente para observar el desempeño esperado y qué modalidades de enseñanza facilitarán alcanzar este desempeño. De acuerdo con este proceso, se debe definir las evaluaciones formativas y sumativas, las actividades de enseñanza y las instancias de retroalimentación.

Los docentes pueden complementar los programas con los Mapas de Progreso, que entregan elementos útiles para reconocer el tipo de desempeño asociado a los aprendizajes.
Se sugiere planificar en tres escalas temporales: anual, de unidad y de cada clase.

LA PLANIFICACIÓN ANUAL

En este proceso, las y los docentes deben distribuir los Aprendizajes Esperados a lo largo del año escolar considerando su organización por unidades, estimar el tiempo que se requerirán para cada unidad y priorizar las acciones que conducirán a logros académicos significativos.

Para esto las y los docentes tienen que:

La planificación anual se debe llevar a cabo con una visión realista de los tiempos disponibles durante el año.

- Alcanzar una visión sintética del conjunto de aprendizajes a lograr durante el año, dimensionando el tipo de cambio que se debe observar en las y los estudiantes. Esto debe desarrollarse según los Aprendizajes Esperados especificados en los programas. Los Mapas de Progreso pueden resultar un apoyo importante.
- Identificar, en términos generales, el tipo de evaluación que se requerirá para verificar el logro de los aprendizajes. Esto permitirá desarrollar una idea de las demandas y los requerimientos a considerar para cada unidad.
- Sobre la base de esta visión, asignar los tiempos a destinar a cada unidad. Para que esta distribución resulte lo más realista posible, se recomienda:
  - Listar días del año y horas de clase por semana para estimar el tiempo disponible.
  - Elaborar una calendarización tentativa de los Aprendizajes Esperados para el año completo, considerando los feriados, los días de prueba y de repaso, la realización de evaluaciones formativas y la entrega de retroalimentación.
  - Hacer una planificación gruesa de las actividades de acuerdo con la calendarización.
  - Ajustar permanentemente la calendarización o las actividades planificadas.

Versión Aprobada por el CNEB en Proceso de Edición y Diseño

LA PLANIFICACIÓN DE LA UNIDAD

Es preciso realizar este proceso sin perder de vista la meta de aprendizaje de la unidad.

Implica tomar decisiones más precisas sobre qué enseñar y cómo enseñar, considerando la necesidad de ajustarlas a los tiempos asignados a la unidad.
La planificación de la unidad debiera seguir los siguientes pasos:

- Especificar la meta de la unidad. Al igual que la planificación anual, esta visión debe sustentarse en los Aprendizajes Esperados de la unidad y se recomienda complementarla con los Mapas de Progreso.
- Idear una herramienta de diagnóstico de inicio de la unidad.
- Crear una evaluación sumativa para la unidad.
- Calendarizar los Aprendizajes Esperados por semana.
- Establecer las actividades de enseñanza que se desarrollarán.
- Generar un sistema de seguimiento de los Aprendizajes Esperados, especificando los tiempos y las herramientas para realizar evaluaciones formativas y entregar retroalimentación.
- Ajustar el plan continuamente ante los requerimientos de las y los estudiantes.

LA PLANIFICACIÓN DE CLASE

Es fundamental procurar que los estudiantes sepan qué y por qué van a aprender, qué aprendieron y de qué manera.

Es imprescindible que cada clase sea diseñada considerando que todas sus partes estén alineadas con los Aprendizajes Esperados que se busca promover y con la evaluación que se utilizará. Recuerde que el clima escolar influye directamente en la calidad de los aprendizajes, por lo que es importante crear todas las condiciones propicias para el aprendizaje, con especial énfasis en las relaciones de convivencia entre las y los estudiantes, y entre estos con las y los docentes.
Adicionalmente, se recomienda que cada clase sea diseñada distinguiendo su inicio, desarrollo y cierre, y especificando claramente qué elementos se considerarán en cada una de estas partes. Se requiere tomar en cuenta aspectos como los siguientes:

- Inicio: en esta fase se debe procurar que las y los estudiantes conozcan el propósito de la clase; es decir, qué se espera que aprendan. A la vez, se debe buscar captar su interés y que visualicen cómo se relaciona lo que aprenderán con lo que ya saben y con las clases anteriores.

- Desarrollo: en esta etapa las y los docentes llevan a cabo la actividad contemplada para la clase.

- Cierre: este momento puede ser breve (5 a 10 minutos), pero es central. En él se debe procurar que las y los estudiantes se formen una visión acerca de qué aprendieron y cuál es la utilidad y relación de las estrategias y experiencias desarrolladas con su entorno y realidad cotidiana para promover un aprendizaje significativo.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

ORIENTACIONES PARA EVALUAR

Apoya el proceso de aprendizaje al permitir su monitoreo, retroalimentar a los estudiantes y sustentar la planificación.

La evaluación forma parte constitutiva del proceso de enseñanza. No se debe usar solo como un medio para controlar qué saben las y los estudiantes, sino que, además, cumple un rol central en la promoción y el desarrollo del aprendizaje. Para que cumpla efectivamente con esta función, debe tener como objetivos:

- Ser un recurso para medir el progreso en el logro de los aprendizajes.
- Proporcionar información que permita conocer las fortalezas y debilidades de las y los estudiantes y, sobre esta base, retroalimentar la enseñanza y potenciar los logros esperados dentro del sector.
- Ser una herramienta útil para la planificación.
- Ser una herramienta que permita la autorregulación de las y los estudiantes.

¿CÓMO PROMOVER EL APRENDIZAJE POR MEDIO DE LA EVALUACIÓN?

Las evaluaciones adquieren su mayor potencial para promover el aprendizaje si se llevan a cabo considerando lo siguiente:

Explicitar qué se evaluará.

- Informar a las y los estudiantes sobre los aprendizajes que se evaluarán. Esto facilita que puedan orientar su actividad hacia el logro de los aprendizajes que deben lograr.

Identificar logros y debilidades.

- Elaborar juicios sobre el grado en que se logran los aprendizajes que se busca alcanzar, fundados en el análisis de los desempeños de las y los estudiantes. Las evaluaciones entregan información para conocer sus fortalezas y debilidades. El análisis de esta información permite tomar decisiones para mejorar los resultados alcanzados.
- Promover la autoevaluación entre las y los estudiantes.

Ofrecer retroalimentación.

- Retroalimentar a las y los estudiantes sobre sus fortalezas y debilidades. Compartir esta información con ellas y ellos permite orientarlos acerca de los pasos que deben seguir para avanzar. También les da la posibilidad de desarrollar procesos metacognitivos y reflexivos destinados a favorecer sus propios aprendizajes, lo que, a su vez, facilita que se involucren y comprometan con estos.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

¿CÓMO SE PUEDEN ARTICULAR LOS MAPAS DE PROGRESO DEL APRENDIZAJE CON LA EVALUACIÓN?

Los mapas apoyan diversos aspectos del proceso de evaluación.

Los Mapas de Progreso ponen a disposición de las escuelas de todo el país un mismo referente para observar el desarrollo del aprendizaje de las y los estudiantes y los ubican en un continuo de progreso. Los Mapas de Progreso apoyan el seguimiento de los aprendizajes, pues permiten:

- Reconocer aquellos aspectos y dimensiones esenciales de evaluar.
- Aclarar la expectativa de aprendizaje nacional al conocer la descripción de cada nivel, sus ejemplos de desempeño y el trabajo concreto de estudiantes que ilustran esta expectativa.
- Observar el desarrollo, la progresión o el crecimiento de las competencias de una o un estudiante al constatar cómo sus desempeños se van desplazando en el mapa.
- Contar con modelos de tareas y preguntas que permiten a cada estudiante evidenciar sus aprendizajes.

¿CÓMO DISEÑAR LA EVALUACIÓN?

Es necesario partir estableciendo los Aprendizajes Esperados a evaluar…

La evaluación debe diseñarse a partir de los Aprendizajes Esperados, con el objeto de observar en qué grado se alcanzan. Para lograrlo, se recomienda diseñar la evaluación junto con la planificación y considerar las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son los Aprendizajes Esperados del programa que abarcará la evaluación?
  Si debe priorizar, considere aquellos aprendizajes que serán duraderos y prerrequisitos para desarrollar otros aprendizajes. Para esto, los Mapas de Progreso pueden ser de especial utilidad.

- ¿Qué evidencia necesitarían exhibir sus estudiantes para demostrar que dominan los Aprendizajes Esperados?
  Se recomienda utilizar como apoyo los Indicadores de Evaluación que presenta el programa.

…y luego decidir qué se requiere para su evaluación en términos de evidencias, métodos, preguntas y criterios.

- ¿Qué método empleará para evaluar?
  Es recomendable utilizar instrumentos y estrategias de diverso tipo (pruebas escritas, guías de trabajo, informes, ensayos, entrevistas, debates, mapas conceptuales, informes de laboratorio e investigaciones, entre otros).

Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

En lo posible, se deben presentar situaciones que pueden resolverse de distintas maneras y con diferentes grados de complejidad, para que los diversos estudiantes puedan solucionarlas y así mostrar sus distintos niveles y estilos de aprendizaje.

- ¿Qué preguntas incluirá en la evaluación?
  Se deben formular preguntas rigurosas y alineadas con los Aprendizajes Esperados, que permitan demostrar la real comprensión del contenido evaluado.

- ¿Cuáles son los criterios de éxito? ¿Cuáles son las características de una respuesta de alta calidad?
  Esto se puede responder con distintas estrategias. Por ejemplo:
  - Comparar las respuestas de sus estudiantes con las mejores respuestas de otros estudiantes de edad similar. Se pueden usar los ejemplos presentados en los Mapas de Progreso.
  - Identificar respuestas de evaluaciones previamente realizadas que expresen el nivel de desempeño esperado y utilizarlas como modelo para otras evaluaciones aplicadas en torno al mismo aprendizaje.
  - Desarrollar rúbricas que indiquen los resultados explícitos para un desempeño específico y que muestren los diferentes niveles de calidad para dicho desempeño.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

PROPÓSITOS

El aprendizaje de la matemática ayuda a comprender la realidad y proporciona herramientas para desenvolverse en la vida cotidiana. Entre ellas se encuentran el cálculo, el análisis de la información proveniente de diversas fuentes, y la capacidad de generalizar situaciones, formular conjeturas, evaluar la validez de resultados y seleccionar estrategias para resolver problemas. Todo esto contribuye a desarrollar un pensamiento lógico, ordenado, crítico y autónomo, y a generar actitudes como precisión, rigurosidad, perseverancia y confianza en sí mismo, que se valoran no solo en la ciencia y la tecnología, sino también en la vida cotidiana.

Aprender matemática acrecienta también las habilidades relativas a la comunicación; por una parte, enseña a presentar información con precisión y rigurosidad y, por otra, a demandar exactitud y rigor en las informaciones y argumentos que se recibe.

El conocimiento matemático y la capacidad para usarlo provocan importantes consecuencias en el desarrollo, el desempeño y la vida de las personas. El entorno social valora el conocimiento matemático y lo asocia a logros, beneficios y capacidades de orden superior. Aprender matemática influye en el concepto que niños, jóvenes y adultos construyen sobre sí mismos y sus capacidades; por lo tanto, contribuye a que la persona se sienta un ser autónomo y valioso. En consecuencia, la calidad, la pertinencia y la amplitud de ese conocimiento afectan las posibilidades y la calidad de vida de las personas y el potencial de desarrollo del país.

La matemática ofrece también la posibilidad de trabajar con entes abstractos y sus relaciones, y prepara a los estudiantes para que entiendan el medio y las múltiples relaciones que se dan en un espacio simbólico y físico de complejidad creciente. En este espacio, la cultura, la tecnología y las ciencias se redefinen en forma permanente y se hacen más difíciles, y las finanzas, los sistemas de comunicación y los vínculos entre naciones y culturas se relacionan y se globalizan.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

HABILIDADES

Al estudiar matemática, el estudiante desarrolla el razonamiento lógico, la visualización espacial, el pensamiento analítico, el cálculo, el modelamiento y las destrezas para resolver problemas. La tabla siguiente puede resultar útil para:

- observar transversalmente las habilidades que se desarrollan en el sector;
- focalizarse en un nivel y diseñar actividades y evaluaciones que enfaticen dichas habilidades;
- situarse en el nivel y observar las habilidades que se trabajaron en los años anteriores y las que se desarrollarán más adelante;
- advertir diferencias y similitudes en los énfasis por ciclos de enseñanza.

Habilidades de pensamiento matemático					
7° básico	**8° básico**	**I medio**	**II medio**	**III medio**	**IV medio**
Resolver problemas en contextos diversos y significativos, utilizando los contenidos del nivel.	Resolver problemas en contextos diversos y significativos.	Analizar estrategias de resolución de problemas de acuerdo con criterios definidos.	Aproximar números mediante variados métodos.	Resolver problemas con un campo numérico más amplio.	Resolver problemas utilizando datos estadísticos.
Analizar la validez de los procedimientos utilizados y de los resultados obtenidos.	Evaluar la validez de los resultados obtenidos y el empleo de dichos resultados para fundamentar opiniones y tomar decisiones.	Analizar estrategias de resolución de problemas de acuerdo con criterios definidos.	Argumentar respecto de las variaciones que se producen en la representación gráfica de funciones.	Argumentar la validez de conjeturas y proposiciones.	Argumentar con respecto a la confiabilidad de la información.
				Formular conjeturas generalizando en forma algebraica.	
Ordenar números y ubicarlos en la recta numérica.			Ubicar raíces en la recta numérica.	Ubicar números complejos en el plano complejo.	Ubicar objetos geométricos en el espacio.
Hacer cálculos en forma mental y escrita.	Hacer cálculos en forma mental y escrita.			Hacer cálculos en forma mental, escrita y con calculadora.	
Emplear formas simples de modelamiento matemático.	Emplear formas simples de modelamiento matemático.	Aplicar modelos lineales que representan la relación entre variables	Modelar situaciones diversas a través de funciones.	Modelar situaciones diversas a través de funciones.	Modelar situaciones diversas y fenómenos a través de funciones.
	Verificar proposiciones simples, para casos particulares.	Diferenciar entre verificación y demostración de propiedades.	Demostrar propiedades y teoremas.	Demostrar propiedades y proposiciones.	Utilizar propiedades y proposiciones en el proceso de resolución de problemas.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Se ha concebido este sector como una oportunidad para que los estudiantes construyan aprendizajes de vida. La matemática es un área poderosa de la cultura, pues permite comprender, explicar y predecir situaciones y fenómenos del entorno. Por eso, es importante que los docentes se esfuercen para que todos los alumnos del país aprendan los conocimientos y desarrollen las capacidades propias de esta disciplina. Estos programas entregan algunas orientaciones que ayudarán a los profesores a cumplir con este objetivo por medio de la planificación, en el transcurso de las clases.

Los conceptos matemáticos: profundidad e integración

Los estudiantes deben explorar en las ideas matemáticas y entender que ellas constituyen un todo y no fragmentos aislados del saber. Tienen que enfrentar variadas experiencias para que comprendan en profundidad los conceptos matemáticos, sus conexiones y sus aplicaciones. De esta manera, podrán participar activamente y adquirir mayor confianza para investigar y aplicar las matemáticas. Se recomienda que usen materiales concretos, lleven a cabo trabajos prácticos y se apoyen en la tecnología, en especial en el ciclo básico.

El uso del contexto

Es importante que el docente aclare que esta disciplina está enraizada en la cultura y en la historia; asimismo, que impacta en otras áreas del conocimiento científico, crea consecuencias y permite aplicaciones. Preguntarse cómo se originaron los conceptos y modelos matemáticos, en qué períodos de la historia y cómo se enlazaron con la evolución del pensamiento es un ancla importante para el aprendizaje. Se recomienda usar analogías y representaciones cercanas a los estudiantes, especialmente en las etapas de exploración. También se sugiere aplicar la matemática a otras áreas del saber y en la vida diaria como un modo de apoyar la construcción del conocimiento matemático.

Pensamiento matemático y resolución de problemas

Esta disciplina se construye sobre la base de regularidades que subyacen a situaciones aparentemente diversas, y ayuda a razonar en vez de actuar de modo mecánico. Por eso, es importante invitar a los alumnos a buscar regularidades. También se busca desarrollar y explicar la noción de estrategia, comparar diversas formas de abordar problemas y justificar y demostrar las proposiciones matemáticas. El docente debe procurar, asimismo, que los estudiantes conjeturen y verifiquen cómo se comportan los elementos y las relaciones con que se trabaja. Tienen que analizar los procedimientos para resolver un problema y comprobar resultados, propiedades y relaciones.

Aunque los estudiantes deben ser competentes en diversas habilidades matemáticas, el profesor tiene que evitar que pongan demasiado énfasis en los procedimientos si no comprenden los principios matemáticos correspondientes.

Uso del error

Usar adecuadamente el error ayuda a crear un ambiente de búsqueda y creación. Un educador puede aprovechar la equivocación para inducir aprendizajes especialmente significativos, si lo hace de manera constructiva. Se debe considerar el error como un elemento concreto para trabajar la diversidad en clases y permitir que todos los alumnos alcancen los aprendizajes propuestos.

Aprendizaje matemático y desarrollo personal

La clase de Matemática ofrece abundantes ocasiones para el autoconocimiento y las interacciones sociales. Es una oportunidad para la metacognición[6], la que se puede estimular con preguntas como: ¿Cómo lo hice?, ¿de qué otra manera es posible? Además, la percepción que cada cual tiene de su

[6] Metacognición: conocimiento de la propia actividad y habilidad para para comprender y controlar los procesos cognitivos propios

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

propia capacidad para aprender y hacer matemática surge de la retroalimentación que le ha dado la propia experiencia. En ese sentido, el docente tiene en sus manos un poderoso instrumento: reconocer los esfuerzos y los logros de los alumnos. Otros aspectos que también ayudan a que cada estudiante aumente la confianza en sí mismo son valorar las diferencias, aceptar los éxitos o las acciones de sus pares, crear un clima de confianza y distinguir de qué modo enfrenta cada uno el triunfo o el fracaso, sea propio o de los demás.

Es importante incentivar a las estudiantes a ser parte activa de las distintas instancias de clases e interacciones docente-estudiantes. Las y los docentes deben dar estímulos igualitarios para que las niñas y niños se involucren de la misma manera en los ejercicios prácticos, como en las respuestas y preguntas en clases. Es esperable que estimulen la confianza y la empatía de las estudiantes hacia el aprendizaje de la matemática, trabajando experiencias y situaciones cercanas a sus intereses. Es importante evitar que los estudiantes asuman roles diferenciados por género, por ejemplo que las estudiantes sean las responsables de tomar notas y los estudiantes de exponer las conclusiones del grupo.

Tecnologías digitales y aprendizaje matemático

El presente programa propone usar *software* y ambientes digitales para ampliar las oportunidades de aprendizaje de los estudiantes. Estas tecnologías permiten representar nociones abstractas mediante modelos en los que se puede experimentar con ideas matemáticas; también se puede crear situaciones para que los alumnos exploren las características, los límites y las posibilidades de conceptos, relaciones o procedimientos matemáticos. Los procesadores simbólicos, geométricos y de estadística son laboratorios para investigar relaciones y ponerlas a prueba. Con un procesador simbólico, se puede analizar y entender números grandes o muy pequeños, y es posible estudiar el comportamiento de funciones, incluso las de alta complejidad. Internet ofrece múltiples ambientes con representaciones dinámicas de una gran cantidad de objetos matemáticos. Los procesadores geométricos permiten experimentar con nociones y relaciones de la geometría euclidiana, cartesiana o vectorial. Se trata de un espacio muy atractivo para los estudiantes y que los ayudará mucho a formarse para una vida cada vez más influida por las tecnologías digitales.

Clima y motivación

Se debe propiciar un ambiente creativo para que los alumnos formulen, verifiquen o refuten conjeturas respecto de los problemas que abordan. Ese ambiente debe admitir que el error, la duda y la pregunta son importantes y valiosos para construir conocimiento; asimismo, tiene que valorar los aportes de todos y aprovecharlos para crear una búsqueda y una construcción colectiva. En ese espacio será natural analizar acciones y procedimientos y buscar caminos alternativos.

Uso de la Biblioteca escolar CRA

Se espera que los alumnos visiten la biblioteca escolar CRA y exploren distintos recursos de aprendizaje para satisfacer sus necesidades e intereses mediante el acceso a lecturas de interés y numerosas fuentes, así como para desarrollar competencias de información e investigación. Para ello, es necesario que los docentes trabajen coordinadamente con los encargados y coordinadores de la biblioteca para que las actividades respondan efectivamente a los objetivos fundamentales que se buscan lograr.

Por otra parte, la biblioteca escolar CRA puede ser un importante lugar de encuentro para la cooperación y participación de la comunidad educativa. Esta puede cumplir la función de acopio de la información generada por docentes y estudiantes en el proceso de aprendizaje, de manera de ponerla a disposición de la comunidad educativa. Tanto los documentos de trabajo, como los materiales concretos producidos, pueden conformar una colección especializada dentro del establecimiento.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

VISIÓN GLOBAL DEL AÑO

Aprendizajes Esperados por Semestre y Unidad: cuadro sinóptico

Semestre 1		**Semestre 2**	
Unidad 1 Álgebra	**Unidad 2** Geometría	**Unidad 3** Datos y azar I	**Unidad 4** Datos y azar II
AE 1 Modelar situaciones o fenómenos de las ciencias naturales mediante la función potencia $f(x) = a \cdot x^z$ con $\lvert z \rvert \leq 3$ AE 2 Resolver problemas utilizando inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones lineales. AE 3 Determinar la función inversa de una función dada.	AE 1 Representar e identificar puntos en un sistema tridimensional de coordenadas. AE 2 Representar rectas y planos en el espacio mediante ecuaciones vectoriales y cartesianas. AE 3 Determinar áreas de superficie y volúmenes de cuerpos geométricos generados por traslación de figuras planas en el espacio. AE 4 Determinar áreas de superficie y volúmenes de cuerpos geométricos generados por rotación de figuras planas en el espacio.	AE 1 Evaluar críticamente información estadística extraída de medios de comunicación, tales como periódicos y revistas, o de internet. AE 2 Interpretar el concepto de "variable aleatoria continua". AE 3 Aplicar los conceptos de función de densidad y distribución de probabilidad, en el caso de una variable aleatoria continua.	AE 1 Aproximar a partir de histogramas de distribuciones binomiales el gráfico de la "Campana de Gauss". AE 2 Aplicar distribuciones normales para resolver problemas de la vida diaria. AE 3 Estimar la media poblacional de una distribución normal sobre la base de niveles de confianza dados. AE 4 Verificar mediante ejemplos concretos que la media $\bar{x}$ de muestras aleatorias del tamaño n, extraídas de una población, se distribuye aproximadamente normal, si se aumenta el tamaño de la muestra. AE 5 Modelar situaciones de la vida diaria o de ciencias con distribuciones aleatorias, como la distribución binomial o la distribución normal.
Tiempo estimado 25 horas	Tiempo estimado 32 horas	Tiempo estimado 20horas	Tiempo estimado 37 horas

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Dis

Versión Aprobada por el CNE, en Proceso de Edición y Diseño

SEMESTRE 1

Unidad 1
Álgebra

Propósito

En esta unidad, los estudiantes profundizan en el concepto de función, pues desarrollan sus conocimientos sobre la función potencia y trabajan la función inversa de aquellas tratadas en cursos anteriores.

Además, amplían el conocimiento de los sistemas 2x2 de ecuaciones lineales, tratando adicionalmente sistemas de inecuaciones lineales, los que resuelven de forma algebraica y por medio de representaciones.

El énfasis de esta unidad está en determinar la inversa de funciones dadas y en reconocer situaciones que se modelan mediante la función potencia. Asimismo los alumnos perfeccionan el tratamiento algorítmico en diferentes conjuntos numéricos y amplían su lenguaje matemático, lo cual demuestran en explicaciones y argumentos.

Conocimientos previos

- Función cuadrática.
- Ecuación de segundo grado.
- Función exponencial y representación gráfica.
- Función logarítmica y representación gráfica.
- Función raíz cuadrada y representación gráfica.
- Sistemas 2x2 de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Métodos de resolución de un sistema 2x2 de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Gráfica de un sistema 2x2 de ecuaciones lineales.
- Expresiones algebraicas fraccionarias.
- Operaciones de expresiones algebraicas fraccionarias.

Palabras claves

Potencia - función inversa de una función – inecuaciones lineales – tratamiento algorítmico – lenguaje matemático – explicaciones – argumentos

Conocimientos

- Función potencia.
- Función inversa de una función.
- Sistemas de inecuaciones lineales.

Habilidades

- Representar gráficamente funciones inversas y la función potencia.
- Argumentar sobre la función inversa dada una función.
- Modelar situaciones de cambio potencial.
- Resolver problemas relacionados con la función potencia, utilizando algoritmos.
- Resolver sistemas de inecuaciones lineales.

Actitudes

- Interés por conocer la realidad al trabajar con información cuantitativa de diversos contextos.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

Aprendizajes Esperados	Indicadores de evaluación sugeridos
Se espera que los estudiantes sean capaces de:	*Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:*
AE 1 Modelar situaciones o fenómenos de las ciencias naturales mediante la función potencia $f(x) = a \cdot x^z$ con $\lvert z \rvert \leq 3$.	• Desarrollan ecuaciones funcionales del tipo $f(x) = x^{-1}$, mediante tablas de proporcionalidad inversa. • Elaboran gráficos de la función potencia $f(x) = x^z$ con $\lvert z \rvert \leq 3$. • Determinan simetrías y asíntotas de los gráficos. • Resuelven problemas matemáticos, de ciencias naturales o de economía, mediante funciones potencia.
AE 2 Resolver problemas utilizando inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones lineales.	• Elaboran las inecuaciones lineales que modelan el fenómeno involucrado en un problema. • Representan gráficamente el conjunto solución de un sistema de inecuaciones lineales. • Comprueban en forma gráfica y algebraica si un par (x,y) pertenece o no al conjunto solución de un problema. • Comunican soluciones a problemas relativos a inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones lineales.
AE 3 Determinar la función inversa de una función dada que sea invertible.	• Caracterizan la función inversa de una función invertible dada mediante la metáfora de una máquina que puede revertir su acción inicial. • Argumenta, acerca de las condiciones que debe cumplir una función para que exista su inversa aplicando la definición. • Grafican una función y su inversa en el plano cartesiano • Generan, si existe, la función inversa a partir de la función dada.

Aprendizajes Esperados en relación con los OFT
• Desarrollar el interés por conocer la realidad y utilizar el conocimiento. • Buscar y acceder a información de diversas fuentes virtuales. • Comprender y valorar la perseverancia, el rigor, el cumplimiento, la flexibilidad y la originalidad.

Orientaciones didácticas para la unidad
El docente debe desarrollar progresivamente habilidades que potencien el razonamiento matemático desde una perspectiva de proceso que implica: analizar e interpretar situaciones particulares que permiten abordar y comprender el enunciado del problema; representar de manera pictórica e incorporando software para potenciar la modelación matemática; inferir y explicar regularidades aritméticas, algebraicas y/o geométricas que permiten encontrar la solución del problema; y por último, formular y verificar generalizaciones si el problema a resolver lo permite. Respecto de la función potencia, es favorable que el profesor resuelva problemas contextualizados que implique analizar e interpretar la proporcionalidad inversa como función. El alumnado debe comprender que las funciones potencias permiten modelar situaciones de la vida cotidiana (situaciones de Ciencias Naturales) e interpretar las soluciones de los problemas desde el punto de vista aritmético, algebraico y/o geométrico según corresponda. Por otra parte, el docente tiene la oportunidad que los y las alumnos visualicen en un gráfico que las asíntotas de todo función está relacionado con el concepto de "límite", el cuál es construido de forma intuitiva.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

En relación a los sistemas de inecuaciones lineales, es imprescindible representarlas gráficamente en un sistema de coordenadas, y apoyar dicho análisis e interpretación a partir de un software para facilitar la visualización e inferir posibles generalizaciones. Para modelar situaciones reales mediante sistemas de inecuaciones lineales se recomiendan temas del ámbito de la economía, situaciones de las Ciencias Naturales, como Física, Química y Biología. Se sugiere al profesor que introduzca el concepto de "función inversa" a una función dada, aplicando varios ejemplos en forma pictórica y simbólica. Finalmente, el docente tiene la oportunidad debe realizar un análisis geométrico de cada ecuación de la recta al representar el sistema de ecuación lineal en el plano cartesiano, para que los y las alumnos puedan inferir que una función creciente implica argumentar que: Si $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, y que una función decreciente implica verificar que: Si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Lo anterior, permitirá interpretar las soluciones del sistema de ecuación lineal en función del contexto del problema. Por ejemplo: Si las ecuaciones de la recta representan funciones decrecientes, una interpretación posible podría ser: "a menor cantidad de artículos producidos ($x_1 < x_2$), mayor es el gasto de energía ($f(x_1) > f(x_2)$).

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

Ejemplos de actividades

Los ejemplos de actividades presentados a continuación, son sugerencias que pueden ser seleccionadas y /o adaptadas por la y el docente para su desarrollo, de acuerdo a su contexto escolar.

AE 1
Modelar situaciones o fenómenos de las ciencias naturales mediante la función potencia $f(x) = a \cdot x^z$ con $|z| \leq 3$.

1. Dada la siguiente clase de valores de la función potencia $f(x) = x^z$; ($z = 3, 2, -1, -2, -3$):
   a. Confeccionan tablas x|f(x) para cada una de las funciones, considerando $-3 \leq x \leq 3$.
   b. Dibujan, el mismo sistema de coordenadas, los gráficos de $f(x) = x^2$ y $f(x)= x^{-2}$ utilizando las tablas elaboradas anteriormente.
   c. Dibujan, el mismo sistema de coordenadas, los gráficos de $f(x) = x^1$, $f(x) = x^{-1}$, $f(x)= x^3$ y $f(x)= x^{-3}$ utilizando las tablas elaboradas anteriormente.
   d. Conjeturan acerca de las asíntotas y del tipo de simetrías que se presentan en las gráficas de las funciones con exponente par y para las funciones con exponente impar.
   e. Argumentan las conjeturas anteriores mediante el uso de software con otros exponentes enteros.

Observación al docente:
Para la actividad 1, se sugiere utilizar un software para visualizar y analizar las representaciones en el plano cartesiano de funciones potencia $f(x) = a \cdot x^z$ con $|z| \leq 3$. Por ejemplo:

Gráfico 1

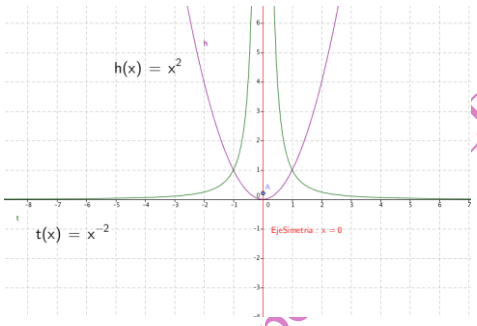
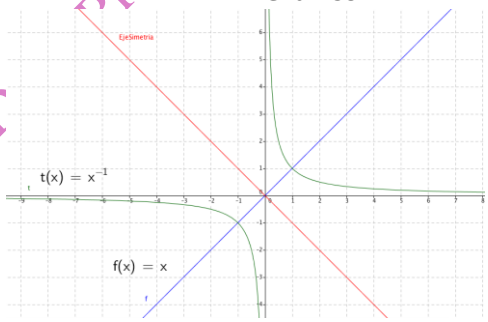
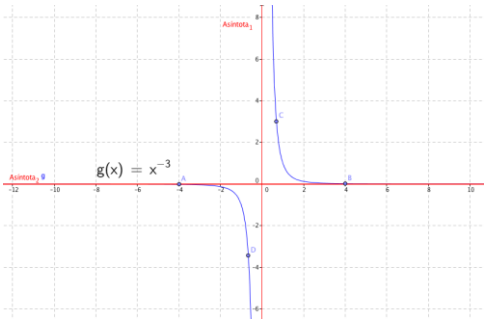


Gráfico 2



La o el docente puede verificar la veracidad o falsedad de las conjeturas planteadas para el tipo de simetría cuando z es par y cuando z es impar (Gráfico 1 y 2), y en particular, orientar a las y los alumnos a inferir y justificar si $x = 0$ e $y = 0$ son asíntotas o no para $f(x) = x^{-3}$ (Gráfico 3). Al mismo tiempo, el docente puede orientar a las y los alumnos a relacionar que el eje de simetría $x= 0$ para $t(x) = x^{-2}$, también es asíntota.

Gráfico 3



Nota: Se realiza control de calidad definitivo de los gráficos e imágenes en el proceso de edición de los Programas.

Versión Aprobada por el Proceso de Edición y Diseño

La o el docente puede promover diferentes niveles de análisis disciplinar relacionados con el desarrollo del razonamiento matemático. Cabe destacar que el proceso de argumentar está presente en todos los momentos de la actividad matemática en los que se afirma algo, o en los que se quiere garantizar la verdad o falsedad de generalizaciones. En este contexto, se sugiere explicar, a las y los alumnos, que el proceso de generar argumentos tiene un carácter social y cobra sentido cuando emerge la necesidad de garantizar la validez de un concepto o propiedad en matemática, ya que la demostración permite el cambio de estatus de una afirmación entendida como una conjetura a una generalización validada que es aceptada. Luego de finalizar la actividad 1, la o el docente puede orientar, a las y los alumnos, a demostrar qué funciones corresponden a una "función par" o "función impar". Por ejemplo:

a) Demostrar que $f(x) = x^2$ / $x \in IR$, es una función par. Las y los alumnos deben considerar que una función es par, si y solo si, $f(x) = f(-x)$.

$f(x) = x^2$
$f(x) = x^2 = (-x)^2$
$f(x) = f(-x)$
Por lo tanto, $f(x) = x^2$ es una función par.

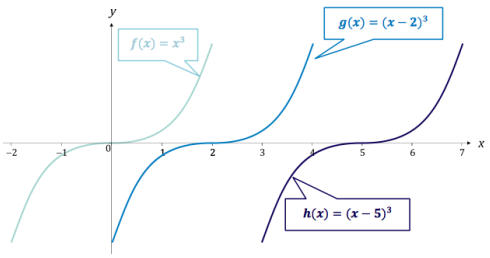
b) Demostrar que $f(x) = x^3$ / $x \in IR$, f es una función impar. Las y los alumnos deben considerar que una función es impar, si y solo si, $g(-x) = -g(x)$.
$g(x) = x^3$
$g(-x) = (-x)^3$
$g(-x) = -(x)^3$
$g(-x) = -g(x)$
Por lo tanto, $g(x) = x^3$ es una función impar.

La o el docente puede orientar, a las y los a alumnos, a justificar la veracidad o falsedad de las siguientes conjeturas:

a) Una función f(x) es par, si y sólo si, la representación gráfica de la función f(x) es simétrica respecto del eje Y.
b) Una función f(x) es impar, si y sólo si, la representación gráfica de la función f(x) es simétrica respecto del origen.

2. Dada las funciones $f(x) = x^3$, $g(x) = (x - 2)^3$ y $h(x) = (x - 5)^3$
   a. Graficar f(x), g(x) y h(x) en el plano cartesiano.
   b. ¿Qué tipo de transformación se visualiza el representar f(x), g(x) y h(x) en el plano cartesiano? Argumenta tu respuesta.
   c. Para las funciones $f(x) = x^5 + 1$, $g(x) = x^5 + 3$ y $h(x) = x^5 + 7$, ¿Es correcto afirmar que se obtiene una traslación vertical? Argumenta tu respuesta.

Observación a la y el docente
En la actividad 2, se sugiere realizar el análisis disciplinar de las funciones f(x), g(x) y h(x), utilizando un software geométrico para que las y los alumnos puedan inferir, y luego justificar, las siguientes afirmaciones:

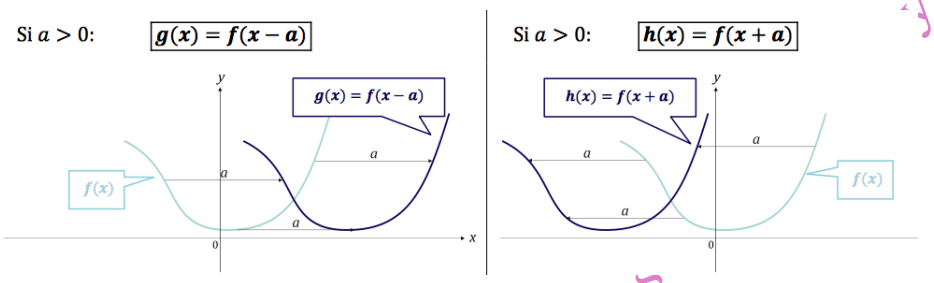


Nota: Se realiza control de calidad definitivo de los gráficos e imágenes en el proceso de edición de los Programas.

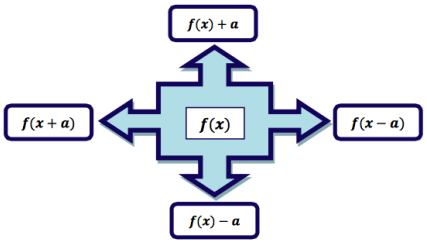
Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

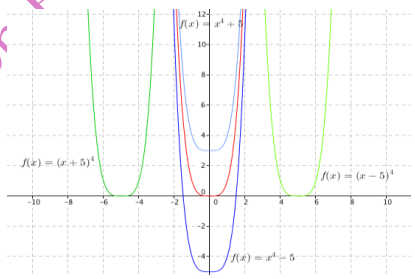
a) Para toda función $f(x) = (x - h)^3$, implica que la representación gráfica de la función $f(x) = (x - h)^3$ se obtiene mediante una traslación horizontal de la función $f(x) = x^3$.
b) Para toda función $f(x) = x^3 + c$, implica que la representación gráfica de la función $f(x) = x^3 + c$ se obtiene mediante una traslación vertical de la función $f(x) = x^3 + c$.

Los análisis anteriores corresponden a casos particulares. Se sugiere que la o el docente promueva aprendizajes disciplinares que implique la construcción y justificación de generalizaciones tales como: a) Si a > 0 y g(x) = f(x - a) , la gráfica de la función g(x) se obtiene desplazando horizontalmente la gráfica f(x) en "a" unidades hacia la derecha en el plano cartesiano. b) Si a > 0 y g(x) = f(x + a) , la gráfica de la función g(x) se obtiene desplazando horizontalmente la gráfica f(x) en "a" unidades hacia la izquierda en el plano cartesiano.



En síntesis, las posibles traslaciones de f(x) cuando a > 0 son:





Nota: Se realiza control de calidad definitivo de los gráficos e imágenes en el proceso de edición de los Programas.

3. La *alometría* trata de cuantificar relaciones entre distintas medidas de un organismo, fundamentalmente con la masa de éste, basándose en ecuaciones del tipo $f(x) = k \cdot x^n$. Por ejemplo, para mamíferos uterinos se han desarrollado modelos que permiten relacionar variables como la tasa de consumo de oxígeno TCO (en mililitros por minuto), la frecuencia respiratoria FR (en ciclos por minuto) y la masa de los pulmones M_{pulm} (en kilogramos) con la masa M (en kilogramos) del animal. En la siguiente tabla se muestran las ecuaciones:

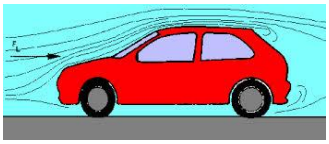
Tasa de consumo de oxigeno	$TCO = 11{,}6\ M^{0{,}76}$
Masa de los pulmones	$M_{pulm} = 0{,}0113\ M^{0{,}99}$
Frecuencia respiratoria	$FR = 53{,}5\ M^{-0{,}26}$

   a. Analizan las representaciones gráficas correspondientes a la Tasa de consumo de oxígeno, peso de los pulmones y frecuencias respiratoria.
   b. ¿Qué significado tiene que el exponente de la función potencia tenga un valor menor que 0?
   c. ¿Es correcto afirmar que la masa de los pulmones de un animal es aproximadamente el 9% de la masa total?

Versión Aprobada por el Consejo de Proceso y Diseño

d. ¿Es correcto afirmar que para determinados valores de M, la frecuencia respiratoria es constante?

4. El rendimiento y del motor de un auto para enfrentar la resistencia del viento depende de la velocidad **x** con la cual el auto está andando. La potencia se expresa en kW según normas internacionales de medición.



a. ¿Cuál de las siguientes tablas pertenece a la función potencia de la forma **y** = a · $\mathbf{x}^z$ (z ≠1) que está modelando la situación? Argumentan y comunican la respuesta.

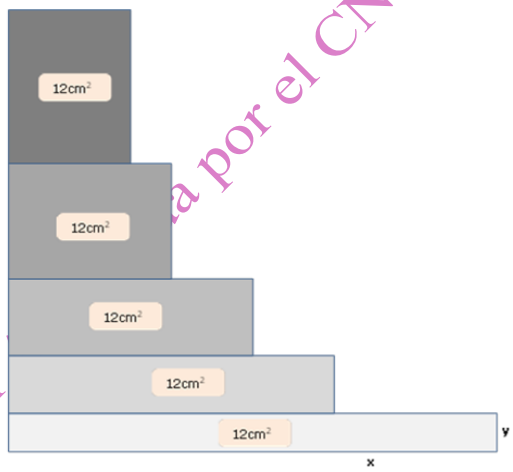
velocidad **x** en km/h	0	30	60	90	120
potencia **y** en kW	0	0,19	0,475	0,7125	0,95

velocidad **x** en km/h	0	30	60	90	120
potencia **y** en kW	0	0,4	1,2	2,0	2,8

velocidad **x** en km/h	0	30	60	90	120
potencia **y** en kW	0	0,27	2,16	7,29	17,28

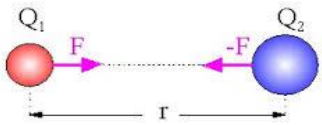
b. Desarrollan la ecuación, en la forma requerida que representa la función del rendimiento **y** en dependencia de la velocidad **x**.
c. Elaboran el gráfico de la función en un sistema cartesiano de coordenadas.

5. En la imagen más adelante se presenta una secuencia de cinco rectángulos de 12 cm^2 de área cada uno. La variable **x** representa el largo del rectángulo, y la variable **y**, el ancho.
a. A partir del gráfico siguiente, que muestra rectángulos de área constante igual a 12 cm^2, elaboran una tabla que muestra los valores posibles de los lados x e y de los rectángulos.



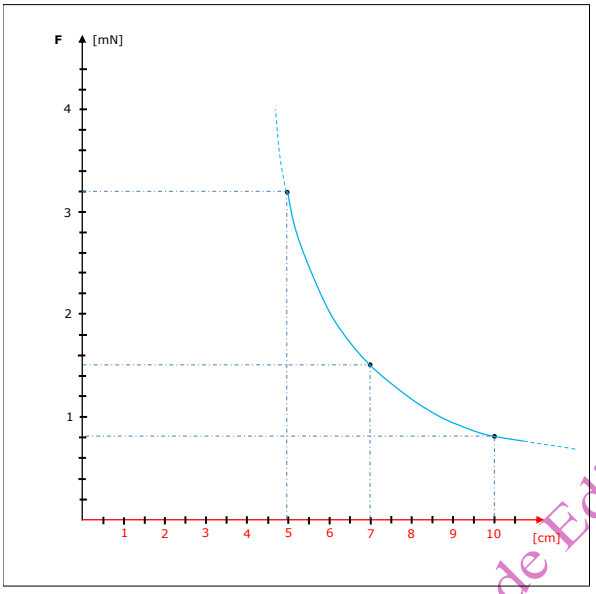
b. Dibujan el gráfico de la función uniendo los vértices superior derecho de cada rectángulo.
c. Determinan la ecuación de la curva que pasa por los vértices antes señalados, expresando la relación mediante una potencia de **x**.

6. En el gráfico se representa el resultado de un experimento físico que consistió en medir la fuerza eléctrica de atracción **F** que actúa sobre dos cargas eléctricas de diferentes signos. En el sistema de coordenadas se representa la fuerza **F** en unidades de mili-Newton (mN), en dependencia de la distancia **r** en unidades de cm entre las



Versión a por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

cargas. La distancia r_0 = 5cm es la distancia entre ambas cargas al inicio de las mediciones.



Nota: Se realiza control de calidad definitivo de los gráficos e imágenes en el proceso de edición de los Programas.

a. Describen la relación entre la fuerza **F** y la distancia **r**.
b. La fuerza F = 1,5 mN, que actúa en la distancia $\sqrt{2}\, r_0$, está aproximada, pues su valor exacto es 1,6 mN. Conjeturan acerca de la función potencia de la forma $F(r) = a \cdot x^z$.
c. Determinan el valor del parámetro **a**.
d. Desarrollan la ecuación que modela la fuerza eléctrica de atracción entre dos cargas.
e. Determinan las fuerzas que actúan en las distancias de r = 2,5 cm y de r = 15 cm.

AE2
Resolver problemas utilizando inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones lineales.

Observación al docente:

La o el docente puede iniciar la resolución de problemas de inecuaciones a partir de las actividades I y II, para orientar a las y los alumnos en la formulación y justificación de conjeturas.

I) La refrigeración industrial de los alimentos permite controlar la velocidad de ciertas actividades químicas y enzimáticas, y el ritmo de crecimiento y metabolismo de ciertos micro-organismos tóxicos. El cuadro siguiente muestra la relación entre la temperatura medida en grados Celsius y el crecimiento microbiano.

Grados C	Proceso
35	
25	
15	de crecimiento rápido
10	
5	
0	
-10	sin crecimiento
-15	
-25	muerte lenta

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

a. Expresan esta información utilizando desigualdades e intervalos. Completan la tabla.

desigualdad	intervalos	proceso
-30°≤ t<-15°		

b. Formulan y justifican conjeturas de lo que sucede para t ≥ 35 ℃ y para t < -25 ℃.
c. Formulan y justifican conjeturas de lo que sucede en el intervalo t = $[0, 5)$ grados Celsius.

II) El cuadro siguiente presenta criterios para clasificar empresas, propuestos por SERCOTEC, SII y CORFO.

Criterios / Categorías	Instituciones y criterios propuestos		
	SERCOTEC	SII	CORFO
	Número de personas ocupadas (x)	**Volumen de venta UF (y)**	**Nivel de inversión UF**
Microempresa	$1 \leq x \leq 4$	$y \leq 2.400$	No superior a 2.000
Pequeña	$5 \leq x \leq 49$	$2.401 \leq y \leq 25.000$	No superior a 15.000
Mediana	$50 \leq x \leq 199$	$25.001 \leq y \leq 100.000$	No superior a 45.000
Grande	$200 \leq x$	$100.001 \leq y$	superior a 45.000

a. Interpretan esta información de modo que permita, por ejemplo, redactar una nota que caracterice a la pequeña y mediana empresa suponiendo, por ejemplo, que esta nota será incluida en una campaña publicitaria relativa a facilidades tributarias para este tipo de empresas.

1. Una camioneta pesa 1950 kg. La diferencia entre el peso de la camioneta vacía y el peso de la carga que lleve no debe ser inferior que 1135 kg. Si hay que cargar cuatro cajas de igual tamaño y peso.

a. ¿Cuánto puede pesar, como máximo, cada uno de las cajas para poder llevarlos en la camioneta?
b. Representa la solución como conjunto, como intervalo y gráficamente en una línea recta.

2. Natalia quiere ir al cine con sus amigas/os y juntaron $22.000 pesos. Al llegar a la boletaría se da cuenta que si compra entradas 2D a $3.000 pesos le sobraría dinero y si compra entradas 3D a $3.500 pesos, en oferta, le faltaría dinero.

a. ¿Cuántos amigos/as van con Natalia?
b. Representan la solución como conjunto, como intervalo y gráficamente en una línea recta.

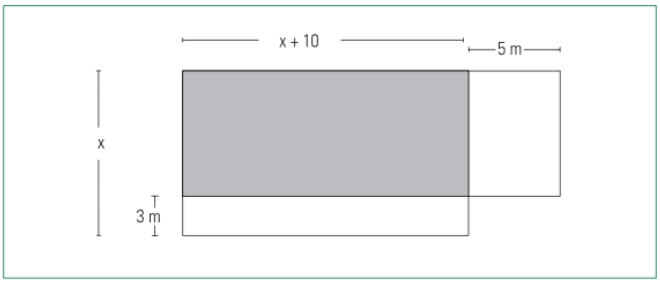
3. En un oficina de correos están preparando los turnos para salir de vacaciones. El jefe de personal concluye que si la cuarta parte del personal toma vacaciones quedarían menor de 18 personas trabajando, y si la tercera parte sale de vacaciones quedarían más de 14 personas.

a. ¿Cuántas personas trabajan en la oficina de correos?

Versión Aprobada por el CNED en ... ón y Diseño

b. Representan la solución como conjunto, como intervalo y gráficamente en una línea recta.

4. Desde el Municipio le explican a la señora Adelina, propietaria de un terreno rectangular, que para la construcción y ampliación de veredas, de acuerdo al plano regulador del sector, su terreno disminuiría en una franja de 3 metros en el frente de su casa. Este terreno se podría compensar con una franja de 5 metros de ancho del terreno colindante al de su casa, que es un terreno municipal. ¿Cuáles son las medidas mínimas del terreno, suponiendo que el largo mide 10 metros más que el ancho, para que esta decisión favorezca a la señora Adelina?

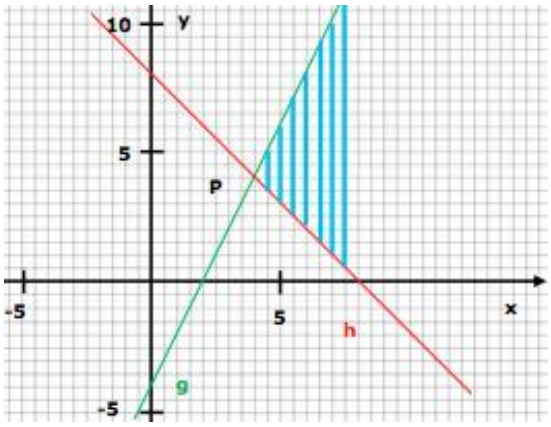


Observación al docente:

Para la actividad 4, inicialmente se puede considerar el caso particular en que el terreno mide 20 m de ancho por 30 m de largo para constatar que el cambio propuesto sería desfavorable para la dueña. Resolviendo el problema con los datos en el recuadro y la variable x, resulta la inecuación x> 22,5 que significa que para un ancho mayor de 22,5m el cambio sería favorable para la dueña. Con el objetivo de obtener una segunda inecuación del tipo x<a, se puede modificar el enunciado original diciendo que la franja adicional tiene un ancho de 4m. Se debe preguntar hasta qué valor de x el cambio sería desfavorable. En este último caso resulta la inecuación x<42.

Posteriormente, la o el docente puede modificar aún más las condiciones del problema para desafiar a las y los alumnos a resolver otros problemas. La o el docente puede complejizar el problema planteando preguntas como las siguientes: ¿Qué hubiera pasado si inicialmente el ancho del terreno hubiera sido el doble del largo?; y, ¿si el terreno hubiese sido cuadrado?; y, ¿Si el terreno hubiese quedado cuadrado después de las modificaciones?

5. En el plano cartesiano representado más adelante, las rectas **g** y **h** se intersectan en el punto **P**(4,4).



Nota: Se realiza control de calidad definitivo de los gráficos e imágenes en el proceso de edición de los Programas.

a. Determinan las ecuaciones de las rectas **g** y **h** y verifican que P es el punto de intersección.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

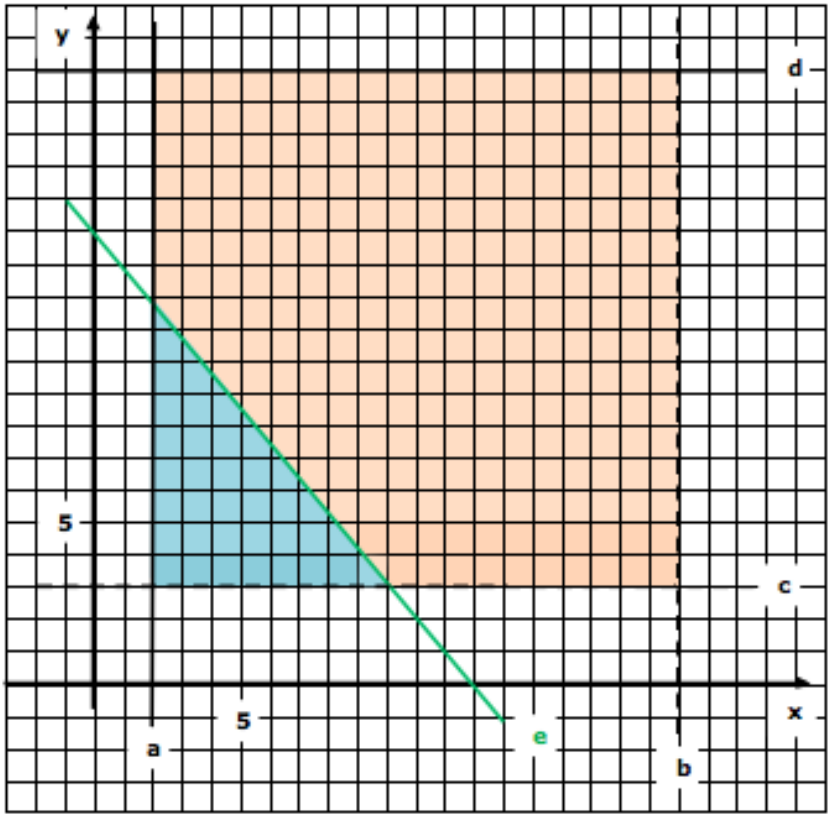
b. Elaboran el sistema de inecuaciones lineales que representa el área entre las rectas **g** y **h** rayada en azul. Representan el sistema de inecuaciones lineales:
[1] $a_1x + b_1y \leq c_1$
[2] $a_2x + b_2y \geq c_2$

c. Las rectas **g** y **h** representan el cambio constante de dos magnitudes **y**, considerando el recorrido del tiempo **x**. Por ejemplo: A las 12:00 horas el tren 1 viaja a una velocidad constante de 2 km/min de la estación A en dirección al puesto de control ubicado en (0,0). A la misma hora, el tren 2 viaja de la estación C en dirección al puesto de control a una velocidad constante de 1 km/min. Si la estación A se encuentra a 8 km del puesto de control y la estación C se encuentra a 4 km del puesto de control, y ambos trenes viajan en carriles paralelos representados por el eje Y en direcciones opuestas acercándose mutuamente:

- Verifican que las coordenadas del punto P representan el instante y el lugar del encuentro entre ambos trenes.
- ¿Qué representa el par ordenado (4,4)?
- ¿Qué magnitud representan los segmentos dibujados en azul entre las rectas g y h?
- ¿Qué significado tiene cada punto en el área achurrada entre las rectas g y h?

6. El área en damasco, presentada en el sistema de coordenadas, está delimitada por las cinco rectas **a**, **b**, c, d y e. Se usa línea punteada para indicar que esos puntos no pertenecen al área que delimitan; la línea sólida indica que sí pertenecen a dicha área.

a. Determinan las ecuaciones de las rectas a, b, c, d y e.
b. Elaboran el sistema de inecuaciones lineales que representan el área en damasco.
c. Verifican algebraicamente si los puntos A(5,6) y B(20,11) son soluciones del sistema de inecuaciones lineales planteado anteriormente.



Nota: Se realiza control de calidad definitivo de los gráficos e imágenes en el proceso de edición de los Programas.

Versión A
n Proceso de Edición y Diseño

Observación al docente:
El gráfico de la actividad 7 "costo de energía (eje y) versus cantidad de artículos producidos (eje x)", describe para ambas máquinas una disminución en el costo de energía si se aumenta la producción. Ambas funciones son funciones afines decrecientes. La paralela negra al eje x significa el tope de gastos de energía en la producción (400 unidades de energía con la ecuación es y = 400). Las paralelas negras al eje y significan el mínimo de artículos producidos (2 000) y el máximo de artículos producidos (5 000). Las ecuaciones son x = 2 000 y x = 5 000.
La o el docente puede realizar un análisis gráfico de cada ecuación de la recta. Esto puede facilitar, en las y los alumnos, inferir que para una función creciente implica justificar que: Si $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, y que una función decreciente implica justificar que: Si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Lo anterior, permitirá interpretar las soluciones del sistema de ecuación lineal en función del contexto del problema (Por ejemplo: Las ecuaciones de la recta representan funciones decrecientes, por ende, "a menor cantidad de artículos producidos ($x_1 < x_2$) mayor es el gasto de energía para cada artículo ($f(x_1) > f(x_2)$)".

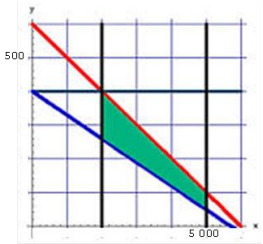
Para promover diferentes niveles de desempeño, la o el docente puede construir, conjuntamente con las y los alumnos, las argumentaciones para determinar si la función lineal es creciente o decreciente. Por ejemplo:
Sea una función f: A → B, f(x) = mx + n

Si $x_1 > x_2$ / multiplicaremos por m > 0
$mx_1 > mx_2$ / sumaremos n a la igualdad, con $n \in IR$
$mx_1 + n > mx_2 + n$
$f(x_1) > f(x_2)$
Por lo tanto, una función lineal es creciente cuando m > 0, es decir, cuando la representación gráfica de la función en el plano cartesiano implica una línea recta con pendiente positiva.

Si $x_1 < x_2$ / multiplicaremos por m < 0
$mx_1 > mx_2$ / sumaremos n a la igualdad, con $n \in IR$
$mx_1 + n > mx_2 + n$
$f(x_1) > f(x_2)$

Por lo tanto, una función lineal es decreciente cuando m < 0, es decir, cuando la representación gráfica de la función en el plano cartesiano implica una línea recta con pendiente negativa.

7. En el sistema de coordenadas a continuación, la variable **x** representa la cantidad de artículos producidos, y la variable **y**, los gastos de energía en la fabricación para cada artículo. En la producción se puede trabajar con dos máquinas: la primera está representada por la recta en color rojo, y la segunda, por la recta azul.



Nota: Se realiza control de calidad definitivo de los gráficos e imágenes en el proceso de edición de los Programas.

a. ¿Qué tipo de función representan la recta de color rojo y de color azul?

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

b. ¿Las funciones son crecientes o decrecientes? Argumentan la respuesta y la interpreta en función del contexto del problema.
c. Determinan la ecuación de la recta en el color rojo y de la recta en el color azul.
d. ¿Cómo se desarrolla la diferencia del gasto de energía entre ambas máquinas?
e. Determinan las ecuaciones de las tres rectas marcadas en negro que son paralelas a los ejes del sistema de coordenadas X e Y.
f. Describen, mediante un sistema de inecuaciones lineales, el área en verde entre la recta en rojo, la recta en azul y los límites determinados por las paralelas negras al eje **y**.
g. Si la producción es de 3 000 unidades, ¿cuál es la diferencia aproximada en el gasto de energía entre ambas máquinas?

AE3
Determinar la función inversa de una función dada.

1. Argumentan la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:
   a. Si f es una función afín con f(x)= mx + c, f es siempre inyectiva.
   b. Dada las funciones f(x) = mx + n y g(x) =(x - n)/m con $m \neq 0$, la composición de funciones f o g (x) y g o f(x), resulta siempre la función identidad (h(x) = x)

Observación al docente:

En una primera etapa se sugiere que las y los alumnos justifiquen la veracidad de las afirmaciones usando casos particulares, teniendo en cuenta las limitaciones de este enfoque. Posteriormente, se puede promover aprendizajes que impliquen demostrar generalizaciones para desarrollar razonamiento matemático en las y los alumnos. Dependiendo del nivel alcanzado por sus estudiantes, se puede desarrollar demostraciones formales, manteniendo el principio de que éstas deben ser significativas y comprensibles para las y los alumnos. A continuación se incluyen ejemplos de demostraciones que pueden ser construidas conjuntamente con las y los alumnos:

Por ejemplo: *"Sea f una función afín f(x) = mx +c , f es siempre inyectiva".*

$f(x_1) = mx_1 + n$ y $f(x_2) = mx_2 + n$ / $m \neq 0$

Si $f(x_1) = f(x_2)$

$mx_1 + n = mx_2 + n$ / -n

$mx_1 = mx_2$ / (1/m)

$x_1 = x_2$

La o el docente puede promover el análisis para $g(x) = ax^2 + bx + c$ y justificar, si cumple o no, que $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Otro ejemplo: "Dada las funciones f(x) = mx + n y g(x) =(x - n)/m con $m \neq 0$, la composición de funciones f o g (x) y g o f(x) resulta siempre la función identidad (h(x) = x)", se recomienda construir con las y los alumnos la siguiente argumentación:

Sea f(x) = mx + n y la función $g(x)= \frac{x-n}{m}$

$g(x) = \frac{x-n}{m}$

g o f(x) = g (f(x))

$g \circ f(x) = \frac{(mx+n)-n}{m}$

$g \circ f(x) = \frac{mx+n-n}{m}$

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

g o f(x) = $\frac{mx+0}{m}$

g o f(x) = $\frac{mx}{m}$

g o f(x) = x , para $x \in A$

La o el docente puede promover otro aprendizaje en las y los alumnos, justificando que la composición de funciones es "no conmutativa" y si es "asociativa". Se sugiere comenzar comprobando con funciones tales como: f(x) = 2x + 3 y g(x) = $-\frac{x}{2} - 5$

a) f o g(x) = 2 ($-\frac{x}{2} - 5$) + 3

f o g(x) = - x – 10 + 3

f o g(x) = - x – 7

b) g o f(x) = $-\frac{(2x+3)}{2} - 5$

g o f(x) = $\frac{-2x-3}{2} - 5$

g o f(x) = - $x - \frac{3}{2} - 5$

g o f(x) = - $x - \frac{13}{2}$ Por lo tanto, f o g(x) ≠ g o f(x), excepto que f o g(x) = x = g o f(x), es decir, f(x) es la función inversa de g(x) o viceversa.

También se podría analizar el caso f(x) = x^2 (con x≥0) y g(x) = $\sqrt{x}$ (con x≥0)

g[f(x)] = $\sqrt{x^2}$ = x

f[g(x)] = $(\sqrt{x})^2$ = x

Observación al docente

La siguiente actividad permite recordar las condiciones para la existencia de la función inversa de una función dada. Por ejemplo, los y las alumnas pueden analizar gráficamente la función f(x) = x^2 e inferir que sin la restricción de dominio x ε R_0^+, da origen a una relación que no es función, es decir, que $f(x)^{-1}$ no es función ya que al trazar la gráfica de la relación inversa se visualiza una simetría respecto al eje X. Lo anterior se comprueba al trazar una recta paralela al eje Y que intersecta a la gráfica en dos puntos.

Por otra parte, los y las alumnos pueden verificar que cualquier función par tiene relaciones inversas que no son funciones.

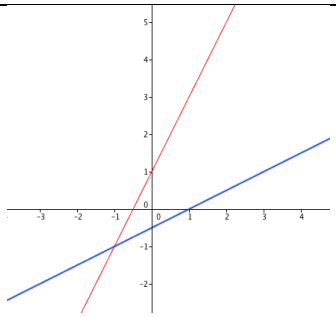
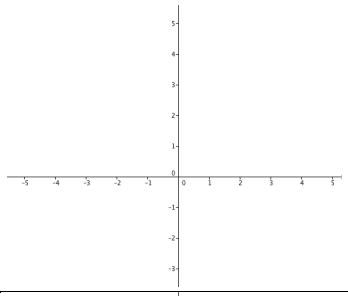
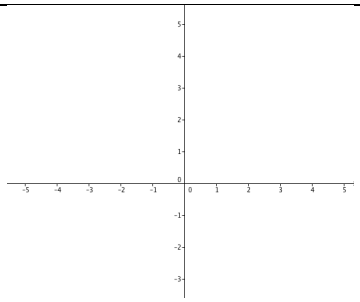
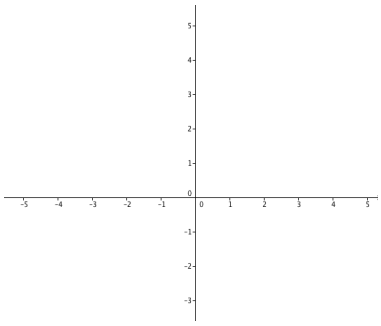
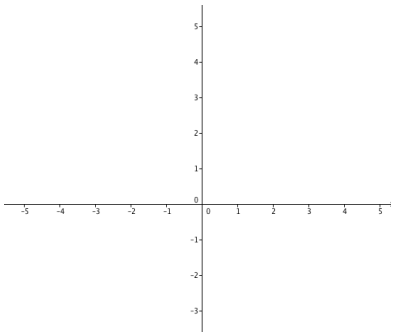
f(x) = x^2 = $(-x)^2$ = f(-x) Por lo tanto, f(x) = x^2 es una función par.

2. Desarrollan, a partir de la ecuación de una función **f** dada, la ecuación de la correspondiente relación inversa $\mathbf{f^{-1}}$ y elaboran los gráficos respectivos.

a) Completan la tabla.

ecuación de la función **f**	ecuación de la relación inversa $\mathbf{f^{-1}}$	despejar la ecuación de la relación inversa $\mathbf{f^{-1}}$ a **y**	gráficos de las funciones **f** y la relación inversa

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

ejemplo: $y = 2x + 1$	$x = 2y + 1$	$x = 2y + 1$ $x-1 = 2y$ $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ $f(x)^{-1} = \frac{(x-1)}{2}$	
$y = \frac{1}{2}x - 3$			
$y = -x^2$			
$y = x^2$ $(x \in R_0^+)$			
$y = 2^x$			

b) ¿Con qué transformación geométrica se obtiene el gráfico de la relación inversa $\mathbf{f^{-1}}$ a partir del gráfico de la función **f**?

c) Conjeturan acerca de la repetición del proceso de inversión aplicado iterativamente a una función y sus relaciones inversas resultantes.

- $\mathbf{[f^{-1}]^{-1}}$ = ?
- ¿Qué relación resulta si se aplica a una función un número par de procesos de inversión? Conjeturan posibles respuestas y argumentan la veracidad o falsedad de éstas a partir de la representación geométrica de otras funciones.
- ¿Qué relación resulta si se aplica a una función un número impar de procesos de inversión? Conjeturan posibles respuestas y argumentan la veracidad o falsedad de éstas a partir de la representación geométrica de otras funciones.

3. Un tren del Metro inicia su desplazamiento, que puede ser representado aproximadamente por la ecuación cuadrática $y = 0{,}5\ x^2$, en la cual la variable **x** representa el tiempo en segundos, y la variable **y,** el recorrido.

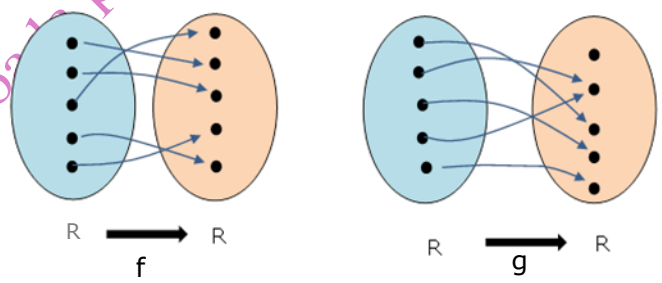
a. Completan la tabla de valores funcionales.

Tiempo x [s]	0	1	2	3	4	5	6
Recorrido y [m]							

b. Elaboran el gráfico de f con la ecuación $y = 0{,}5\ x^2$. Eligen adecuadamente las unidades en los ejes.
c. Elaboran el gráfico de la relación inversa f^{-1}.
d. Responden: ¿Qué cantidad física representa la variable independiente de la relación inversa?
e. Determinan la ecuación de la relación inversa f^{-1}.

4. Determinan en cada uno de los casos siguientes, si existe la función inversa. Argumentan la respuesta.

a. Las funciones **f** y **g** representadas por diagramas de Venn.



b. Sea f: $y = x^2$ con el dominio $D_f = \mathrm{R}_0^+$.
c. Sea g: $y = x^2$ con el dominio $D_f = R$.
d. Sea h: $y = \sqrt{x}$ con el dominio $D_f = \mathrm{R}_0^+$.
e. Sea k: $y = 10^x$ con el dominio $D_f = R$.
f. Demuestran que la función g no es una función inyectiva.
g. Argumentan si la función f es una función creciente y/o decreciente.
h. En cada uno de los casos anteriores, determinan, si es posible, las ecuaciones de las relaciones inversas $\mathbf{f^{-1}}$, $\mathbf{g^{-1}}$, $\mathbf{h^{-1}}$ **y** $\mathbf{k^{-1}}$

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

5. Elaboran el gráfico de la función potencia f: $y = x^{-2}$.

a. Demuestran que la función f no es una función inyectiva.
b. Delimitan el domino para que la relación inversa sea función.
c. Desarrollan bajo las condiciones del ejercicio a. la ecuación de la función inversa.
d. Argumentan si la función f es una función creciente y/o decreciente según las condiciones dadas en a.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

Ejemplo de evaluación

Aprendizaje Esperado

Resolver problemas utilizando inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones lineales. (AE 2)

Indicadores de evaluación sugeridos

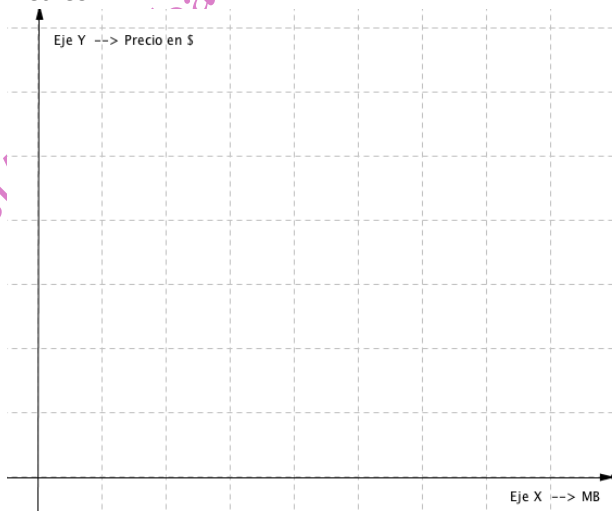
- Elaboran las inecuaciones lineales que modelan el fenómeno involucrado en el problema.
- Representan una resolución gráfica del conjunto solución del problema.
- Comprueban en forma gráfica y algebraica si un par (x,y) pertenece o no al conjunto solución del problema.

Actividad propuesta

Dos empresas telefónicas ofrecen acceso a internet para celulares. Los cobros del servicio tienen dos componentes: cargo fijo para 1 GB (1 000 MB) y cobro por cada MB adicional. Las condiciones son las siguientes: la empresa A ofrece un plan con un cargo fijo de $20 000 más $20 por MB, y la empresa B dispone de un plan con un cargo fijo de $18 000 más $30 por MB. ¿Hasta cuántas horas de conexión a internet el servicio de la empresa B es más económico que el servicio de la empresa A?

a. Elaboran un sistema de inecuaciones lineales que resuelve el problema.
b. Representan la resolución gráfica del problema en un sistema cartesiano de coordenadas.
c. Se sabe de clientes de otras empresas que pagaron por un total de megabytes adicionales lo siguiente:
   Empresa C: $28 300 por 350 MB adicionales.
   Empresa D: $30 000 por 300 MB adicionales.
   Resuelven mediante el gráfico del sistema de inecuaciones si para los clientes de C y D las condiciones son más favorables o no.

d. Resuelven simbólicamente el sistema de inecuaciones lineales.



Criterios de evaluación

Al momento de evaluar se sugiere considerar los siguientes aspectos:

- Elaboran las ecuaciones de las funciones.
- Eligen en los ejes del sistema cartesiano de coordenadas las unidades de precio y megabyte
- Grafican correctamente las rectas y marcan los semiplanos que corresponden a las inecuaciones.
- Determinan las coordenadas del punto de intersección de ambas rectas.
- Marcan los puntos que representan los datos de los clientes de las empresas C y D.
- Resuelven el problema de la actividad *c* mediante la ubicación de los puntos en el plano.
- Resuelven el sistema 2x2 de inecuaciones mediante un método favorable.

Versión validada por el CIIED en Proceso de Edición y Diseño

Unidad 2
Geometría

Propósito

En esta unidad los estudiantes representan objetos en el espacio, utilizando como referente el sistema tridimensional de coordenadas. El conocimiento de otros años lo amplían y profundizan, como en el caso de describir rectas por medio de ecuaciones vectoriales y cartesianas, que antes lo realizaban en dos dimensiones, en esta unidad lo harán en tres dimensiones. Además, se introduce el concepto de plano vectorial y de cuerpos geométricos generados por traslación y rotación.

Asimismo, los estudiantes determinan áreas y volúmenes de cuerpos geométricos sencillos, los cuales han sido generados por traslación o rotación de figuras 2D en el espacio.

Conocimientos previos

- Geometría cartesiana.
- Homotecia.
- Vector.
- Producto por un vector por un escalar.
- Sistemas lineales 2x2.

Palabras clave

Espacio – sistema tridimensional – ecuaciones vectoriales – plano vectorial

Conocimientos

- Puntos en el espacio.
- Ecuación vectorial de la recta en el espacio.
- Ecuación cartesiana de la recta en el espacio.
- Ecuación vectorial del plano en el espacio.
- Generación de cuerpos por traslación de figuras 2D en el espacio.
- Generación de cuerpos por rotación de figuras 2D en el espacio.

Habilidades

- Representar puntos, rectas y planos en el sistema de coordenadas tridimensional.
- Establecer la ecuación vectorial del plano que pasa por tres puntos.
- Identificar un vector de traslación.
- Determinar volúmenes de figuras 3D generadas por rotación o traslación.

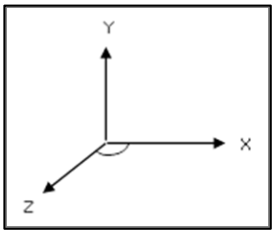
Actitudes

- Desarrollar el interés por conocer la realidad y utilizar el conocimiento.

Aprendizajes Esperados	Indicadores de evaluación sugeridos
Se espera que los estudiantes sean capaces de:	*Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:*
AE 1 Representar e identificar puntos en un sistema tridimensional de coordenadas.	• Construyen una representación del cubo unitario. • Elaboran representaciones de otros cubos, prismas y pirámides en un sistema 3D de coordenadas. • Dibujan vectores $\overrightarrow{AB}$ entre dos puntos A y B, y determinan sus componentes según los ejes de coordenadas. • Determinan las coordenadas de un punto P' que resulta si se traslada el punto P mediante un vector $\vec{a}$.
AE 2 Representar rectas y planos en el espacio mediante ecuaciones vectoriales y cartesianas.	• Determinan la ecuación vectorial de una recta que pasa por dos puntos en el espacio. • Transforman la ecuación vectorial de una recta del espacio en la forma cartesiana y viceversa. • Elaboran la ecuación vectorial de un plano en el espacio.
AE 3 Determinar áreas de superficie y volúmenes de cuerpos geométricos generados por traslación de figuras planas en el espacio.	• Dibujan y describen los cuerpos generados si se trasladan figuras 2D del plano x/y en dirección del eje z a un plano paralelo. • Identifican en cuerpos geométricos dados la figura 2D trasladada y el vector de traslación correspondiente. • Determinan el volumen y el área de la superficie de algunos cuerpos generados por traslación.
AE 4 Determinar áreas de superficie y volúmenes de cuerpos geométricos generados por rotación de figuras planas en el espacio.	• Realizan y describen rotaciones axiales concretas de modelos de rectángulos, triángulos y círculos. • Elaboran en un sistema 3D representaciones gráficas de cuerpos generados por rotación. • Determinan el volumen y el área de superficie de algunos cuerpos generados por rotación de rectángulos y triángulos.

Aprendizajes Esperados en relación con los OFT
• Desarrollar el interés por conocer la realidad y utilizar el conocimiento.

Orientaciones didácticas para la unidad



Se sugiere comenzar la construcción del sistema cartesiano 3D de coordenadas, completando y analizando las características de las coordenadas de los puntos pertenecientes al plano **Y/Z** y **X/Z,** los cuales se construyen a partir de un eje perpendicular al plano cartesiano **X/Y**. Para lograr un efecto 3D, se debe dibujar un ángulo de 135° entre el eje X y el eje Z. Al mismo tiempo, el docente debe desafiar a los y las alumnos/as a construir -utilizando diferentes estrategias- las representaciones gráficas de cuerpos en el sistema cartesiano 3D, y así, fomentar la capacidad espacial pproponiendo problemas que permitan a los y las alumnos/as desarrollar la percepción, representación, construcción y descripción disciplinar de los diferentes cuerpos.

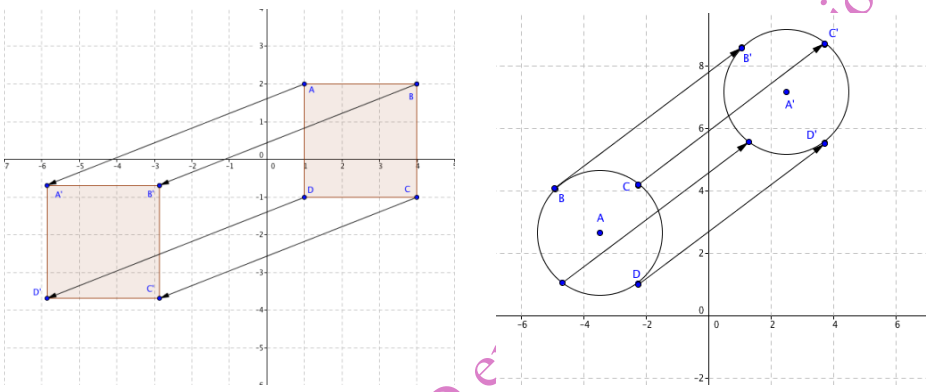
En relación a la ecuación vectorial de la recta, el docente debe, de manera intencionada, analizar la relación entre el vector asociado y el vector director al construir una ecuación vectorial de la recta, de tal manera que las y los alumnos logren inferir e interpretar la representación geométrica y algebraica

Versión Aprobada CNED en Proceso de Edición y Diseño

de la ecuación vectorial de la recta en el plano cartesiano 3D de coordenadas. Cabe recordar, que la ecuación vectorial de una recta considera dos puntos en el espacio, por los cuales pasará la recta y permitirá determinar los vectores asociados a los puntos. Luego se determina el vector director, obteniendo de esta manera la ecuación vectorial de una recta como la suma de un vector asociado y de múltiplos del vector director.

Respecto de la unidad de área y volúmenes de cuerpos generados por traslación y rotación, se recomienda realizar transformaciones isométricas de triángulos, cuadrados, circunferencias y rectángulos, de tal manera de visualizar la transformación isométrica de figuras geométricas en el plano cartesiano 2D de coordenadas. Posteriormente, se sugiere que las y los alumnos formulen y verifiquen conjeturas acerca del cambio que se genera al modificar la dirección de la traslación o variar el eje de rotación al generar un cuerpo 3D.

Transformaciones isométricas en el plano cartesiano 2D de coordenadas



Nota: Se realiza control de calidad definitivo de los gráficos e imágenes en el proceso de edición de los Programas.

Para desarrollar progresivamente el razonamiento matemático en esta unidad, el docente debe promover diálogos que permitan la formulación y justificación de conjeturas, y verificar generalizaciones a través de software tales como GeoGebra. Específicamente, las y los alumnos deben vislumbrar más allá de lo que visualizan geométricamente, inferir regularidades y plantear conjeturas, ya que "hacer matemática" implica descubrir lo implícito en una representación, fórmula o un problema, y la conjetura es el principal camino para dicho descubrimiento y/o razonamiento. Lo anterior, permitirá a las y los alumnos anticipar posibles soluciones del problema, relacionar conocimientos algebraicos y/o geométricos, y construir argumentos disciplinares al verificar las conjeturas y generalizaciones utilizando tecnología.

Versión Aprobada por el CNED en ... ión y Diseño

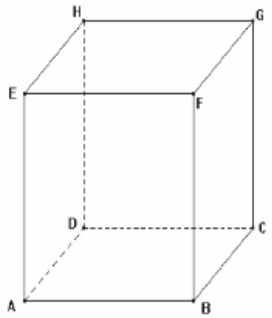
Ejemplos de Actividades

Los ejemplos de actividades presentados a continuación, son sugerencias que pueden ser seleccionadas y /o adaptadas por la y el docente para su desarrollo, de acuerdo a su contexto escolar.

AE 1
Representar e identificar puntos en un sistema tridimensional de coordenadas.

1. El dibujo muestra un cubo unitario. El origen del sistema tridimensional de coordenadas tiene el vértice D como origen.

A	
B	
C	
D	**(0,0,0) origen**
E	
F	
G	
H	



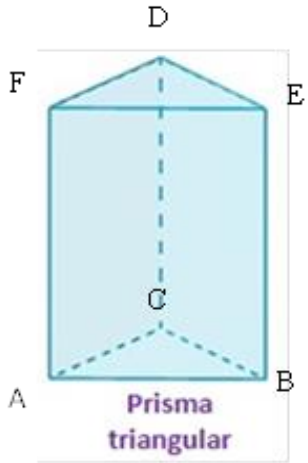
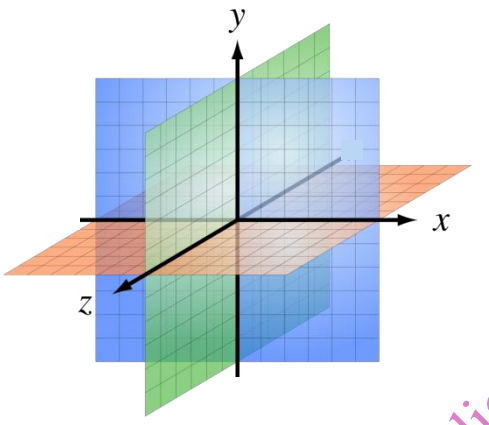
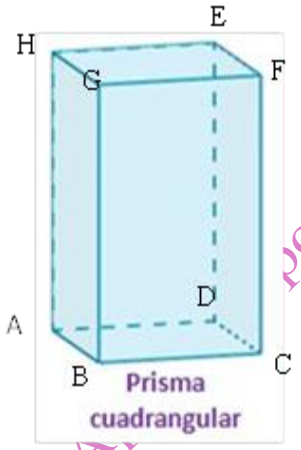
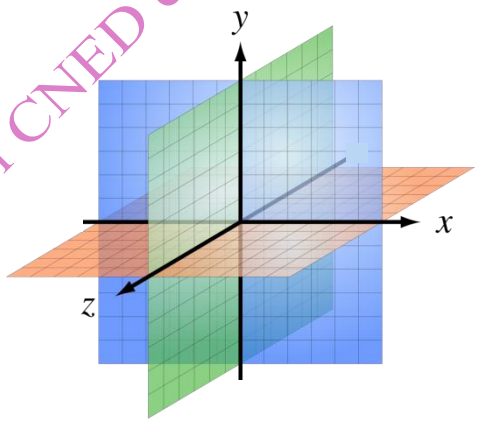
a. Dado que el origen es el punto D(0,0,0), ¿Cuál es el signo de las coordenadas de los vértices?
b. Determinan las coordenadas de los vértices del cubo.
c. ¿Qué tienen las coordenadas de D,H,E y A en común? Razonan la respuesta
d. ¿Cuáles son los vértices que tienen la coordenada y=0?
e. ¿Qué tienen en común los vértices de la cara D,C,G y H?
f. Conjeturan acerca de las características de las coordenadas de todos los puntos de una cara.
g. Verifican las conjeturas anteriores con el uso de un software.

Observación al docente:

En la actividad 2 se menciona el origen del sistema tridimensional de coordenadas que coincide con uno de los vértices del cuerpo representado. En cuanto a las coordenadas de los demás vértices se entrega información sobre el largo de segmentos. Ejemplo: En el caso del prisma triangular se dice que el largo de la altura es el doble de los catetos del triángulo rectángulo isósceles ABC. Si se elige B(0,1,0) la coordenada del vértice C es (0,1,2) o si se elige B(0,3,0) la coordenada de C sería (0,3,6). Por lo tanto hay más de una solución. La misma situación se representa para el prisma cuadrangular del cual se da la razón de los segmentos $\overline{AB} : \overline{AD} : \overline{AH}$ = 1 : 3 : 5. Para promover diferentes niveles de desempeño por parte de las y los alumnos, el enunciado del problema del prisma de base cuadrangular, solamente da a conocer las coordenadas del vértice A, para que las y los alumnos logren formular y argumentar las posibles soluciones al problema planteado.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

2. Elaboran representaciones de los siguientes prismas en un sistema tridimensional:

 La altura del prisma es el doble de los catetos del triángulo rectángulo isósceles ABC.		A B C(0,0,0) D E F
 Las razones entre los segmentos son las siguientes $\overline{AB} : \overline{AD} : \overline{AH} = 1 : 3 : 5$		A(1,0,0) B C D E F G H

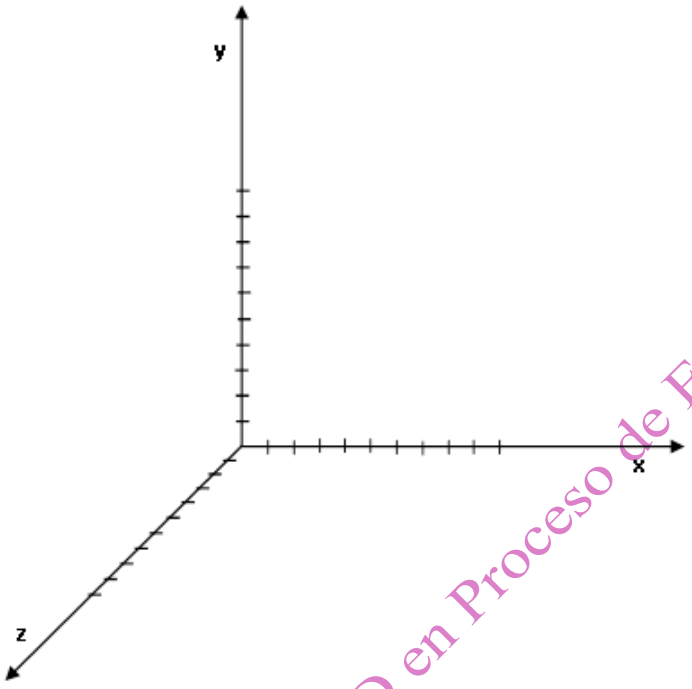
Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

3. Dado los puntos A (2, 0, 2) y B (4, 5, 8)

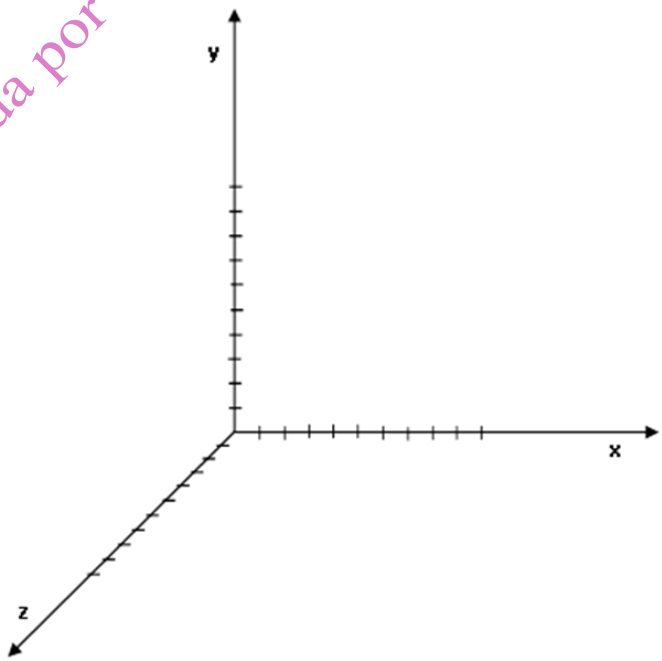
   ~~a.~~ Dibujan el vector $\overrightarrow{AB}$ en el sistema tridimensional de coordenadas.
   b. Consideran otros dos puntos C y D a libre elección y dibujan el vector correspondiente.
   c. Suman $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ y representan el resultado en el plano tridimensional.

d. Conjeturan respecto de $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ y verifican representando el resultado en el plano tridimensional.

e. ¿En qué cuadrante estaría el vector $\overrightarrow{AB}$ si la coordenada x cambia de signo? ¿y si cambia de signo solamente la coordinada z? Argumentan su respuesta graficando en el plano tridimensional los vectores.

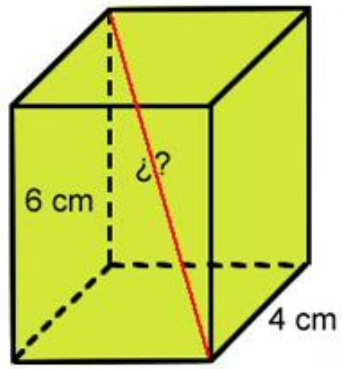


4. Determinan las coordenadas al trasladar el punto P(1, 2, 0) por el vector $\vec{v} = (0, 3, 5)$ y dibujan la transformación en el sistema tridimensional de coordenadas 3D.



Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

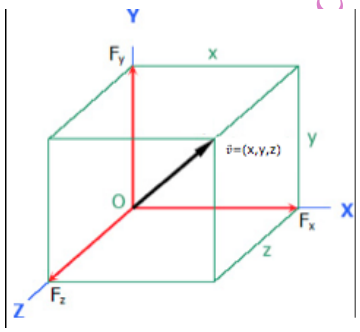
5. Observa la siguiente imagen que muestra un prisma de base cuadrada:



a. ¿Cuál es el valor de la diagonal?
b. Demuestra que la distancia entre dos puntos A = (a_1, a_2, a_3) y B = (b_1, b_2, b_3), en el plano 3D, se calcula mediante la fórmula: $d_{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

Observación al docente:

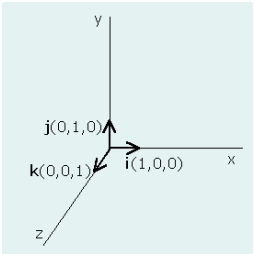
Para la actividad 5, la o el docente debe promover en las y los alumnos la deducción de la fórmula que permite calcular la distancia entre dos puntos en el plano 3D. Se sugiere realizar el siguiente análisis:



Nota: Se realiza control de calidad definitivo de los gráficos e imágenes en el proceso de edición de los Programas.

Por lo tanto, $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Por otra parte, la o el docente puede profundizar el análisis planteando a las y los alumnos a deducir que todo vector en el plano 3D se puede escribir como combinación lineal de los tres vectores unitarios: $\hat{\imath}$ = (1, 0, 0) ; $\hat{\jmath}$ = (0, 1, 0) ; $\hat{k}$ = (0, 0, 1).



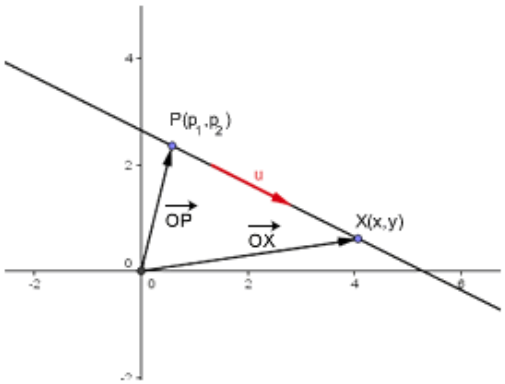
Nota: Se realiza control de calidad definitivo de los gráficos e imágenes en el proceso de edición de los Programas.

Por lo tanto, (a, b, c) = a $\hat{\imath}$ + b $\hat{\jmath}$ + c $\hat{k}$

Versión Aprobada por ceso de Edición y Diseño

AE 2
Representar rectas y planos en el espacio mediante ecuaciones vectoriales y cartesianas.

Observación al docente:
En la actividad 1, se sugiere que la o el docente pueda deducir, conjuntamente con las y los alumnos, la ecuación vectorial de la recta y analizar la relación con la ecuación cartesiana, promoviendo de esta manera el desarrollo del razonamiento matemático. Para ello se sugiere realizar el siguiente análisis: La ecuación vectorial de la recta corresponde al conjunto de puntos colineales en plano a un punto P y cuya dirección es esta dada por el vector de posición $\vec{u}$.



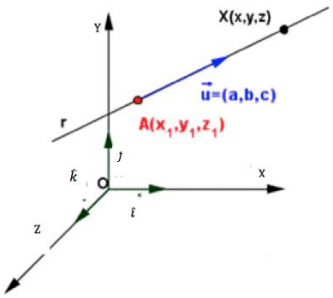
Nota: Se realiza control de calidad definitivo de los gráficos e imágenes en el proceso de edición de los Programas.

De la representación gráfica se infiere que $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda\,\vec{u}$

Si $\overrightarrow{OX} = (x, y)$, $\overrightarrow{OP} = (p_1\,, p_2)$ y $\vec{u} = (u_1\,,\ u_2)$

La ecuación vectorial está dada por: $(x, y) = (p_1\,, p_2) + \lambda(u_1\,, u_2)$

Para deducir la ecuación vectorial en el plano 3D, se sugiere realizar el siguiente análisis:



Nota: Se realiza control de calidad definitivo de los gráficos e imágenes en el proceso de edición de los Programas.

De la representación gráfica se infiere que $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\,\vec{u}$
Si $\overrightarrow{OX} = (x, y, z)$, $\overrightarrow{OA} = (a_1\,, a_2,\ a_3)$ y $\vec{u} = (u_1\,,\ u_2,\ u_3)$
La ecuación vectorial está dada por: $(x, y, z) = (a_1\,, a_2,\ a_3) + \lambda(u_1\,,\ u_2,\ u_3)$

Versión Aprobada por el CNED en su Edición y Diseño

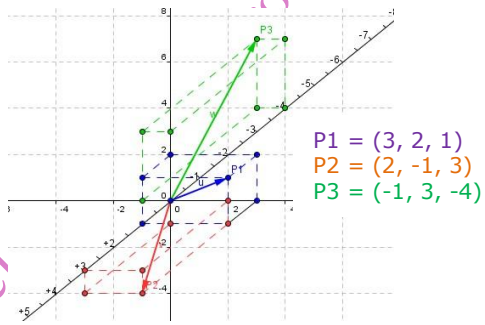
1. Completan la siguiente tabla:

Puntos	**Ecuación vectorial** de la recta que pasa por los puntos A y B	**Otros puntos que pertenecen a la recta** (identificar por lo menos dos)
A(1, 2, -1) y B(2 , 3 , 6)		
A(1, 0 , 1) y B(2 , 4, 3)		
A(10,4, -2) y B(5, -1, 2)		

   a. ¿Cuál es el vector asociado y el vector director para cada una de las ecuaciones vectoriales?
   b. Remplazan el vector director de una recta por otro vector que permita representar la misma recta.

2. Transforman la ecuación vectorial de la recta $\vec{x} = \binom{1}{2} + t\binom{3}{1}$ a su forma cartesiana. Dada la ecuación cartesiana de la recta 2x + y = 1, consideran dos puntos que la satisfacen y obtienen la ecuación vectorial de la recta.

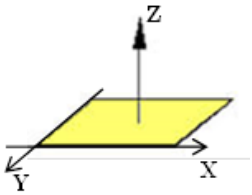
3. Dada la siguiente representación de los puntos P1, P2 y P3, elaboran la ecuación vectorial del plano que pasa por los tres puntos.



Nota: Se realiza control de calidad definitivo de los gráficos e imágenes en el proceso de edición de los Programas.

AE 3
Determinar áreas de superficie y volúmenes de cuerpos geométricos generados por traslación de figuras planas en el espacio.

1. Describen el cuerpo que se obtiene al trasladar la siguiente figura 2D (un cuadrado de lado a cm) en dirección del eje **z**:



Nota: Se realiza control de calidad definitivo de los gráficos e imágenes en el proceso de edición de los Programas.

   a. ¿Cuál es la traslación que permite generar un cubo? Argumenta su respuesta.
   b. ¿Cuál es la traslación que permite generar un prisma de base cuadrada? Argumenta su respuesta.

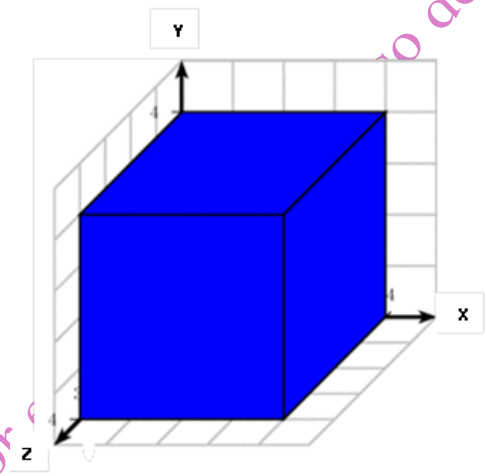
Versión Aprobada por el proceso de Edición y Diseño

Observación al docente
Para lograr diferentes niveles de desempeño, la o el docente puede modificar la actividad 1 y 2 estableciendo coordenadas a la región cuadrada y región triangular respectivamente, y solicitar a las o los alumnos, justificar la respuesta al problema utilizando vectores y la fórmula de distancia entre dos puntos en el plano 3D. Con lo anterior, la o el docente promueve la resolución de problemas a partir de la aplicación de conceptos y procedimientos aprendidos en el AE1 de esta unidad.

2. Elaboran una representación gráfica en tres dimensiones del cuerpo que se obtiene al trasladar en una distancia dada, un triángulo equilátero considerando las siguientes condiciones:

    a. Trasladar el triángulo equilátero perpendicularmente al plano XZ. Entonces, ¿Qué coordenadas pueden tener los vértices de las caras triangulares del cuerpo geométrico generado por la traslación?
    b. Dado un triángulo equilátero en el plano YZ, ¿Qué coordenadas tienen los vértices de las caras triangulares del cuerpo geométrico generado al realizar una traslación paralela al eje X?

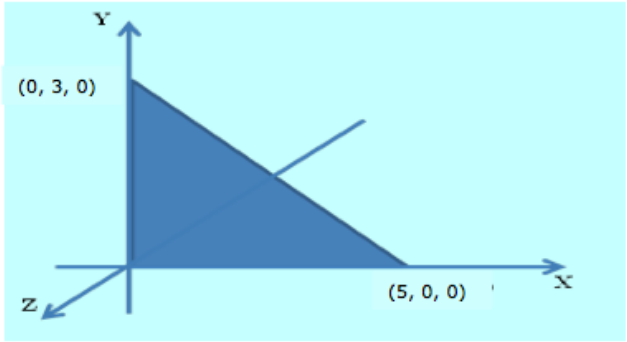
3. Dado el cubo azul representado en el plano tridimensional.



    a. Identifican una figura geométrica y un vector de traslación que permita generar el cubo azul.
    b. ¿Es correcto afirmar que existen al menos tres soluciones para generar el cubo azul mediante la traslación de una figura geométrica 2D? Argumentan su respuesta.

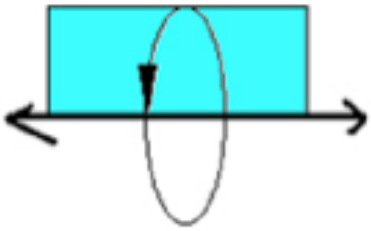
4. En la figura, el eje **z** está orientado verticalmente al plano **x/y**. Determinan el área de superficie y el volumen del cuerpo generado al trasladar en siete unidades, y de forma paralela al eje **z**, la siguiente imagen:

Versión Aprobada por el Centro de Edición y Diseño



AE 4
Determinar áreas de superficie y volúmenes de cuerpos geométricos generados por rotación de figuras planas en el espacio.

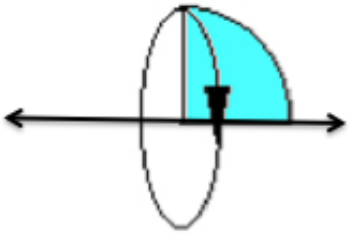
1. Describen el cuerpo que se obtiene al girar la siguiente figura 2D de forma rectangular:



   a. ¿Es correcto afirmar que siempre que se gira una región rectangular respecto de un eje se obtiene un cilindro? Argumentan su respuesta.
   b. Si la figura 2D es un cuadrado, ¿Es correcto afirmar que al girar la región cuadrada respecto de un eje también se obtiene un cilindro? Argumentan su respuesta.

Observación al docente
Para la actividad 1, la o el docente puede modificar la actividad estableciendo coordenadas a la región rectangular, y solicitar a las o los alumnos, justificar la respuesta al problema utilizando vectores y la fórmula de distancia entre dos puntos en el plano 3D. Con lo anterior, la o el docente promueve la resolución de problemas a partir de la aplicación de conceptos y procedimientos aprendidos en el AE1 de esta unidad.

2. Elaboran una representación gráfica en 3D del cuerpo que se obtiene al girar la siguiente figura:



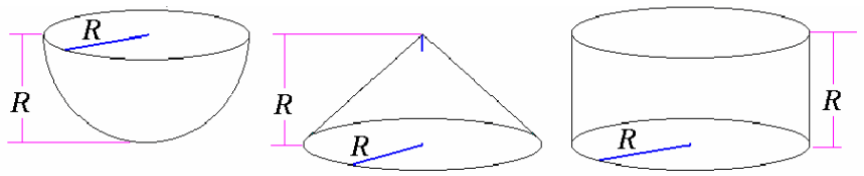
   a. ¿Es correcto afirmar que se obtiene una esfera? Argumentan su respuesta.
   b. Argumentan qué forma debe tener la figura original para obtener una esfera por rotación.

Observación al docente
Para la actividad 2, la o el docente puede modificar la actividad solicitando a las y los alumnos

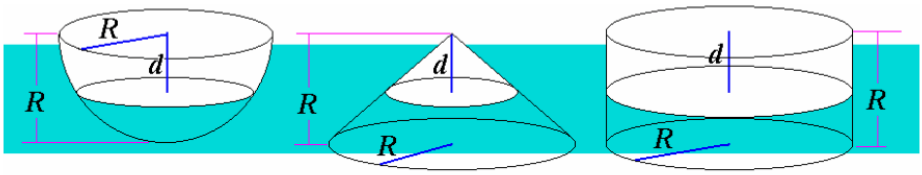
Versión Aprobada por el CNEB en ... de Edición y Diseño

justificar disciplinarmente la fórmula del volumen de una esfera a partir del razonamiento utilizado por Arquímides.

Dada una semiesfera, un cono y un cilindro juntos. Supuso que la esfera tenía radio R y tanto el cono como el cilindro con el mismo radio basal R. También supuso que las alturas del cono y el cilindro medían R como muestra la siguiente figura:



Luego cortó las tres figuras con un plano paralelo a la base del cilindro y del cono y a una distancia d de la parte superior de las figuras. Luego se preguntó cómo serían las secciones determinados por este plano en la semiesfera, el cono y el cilindro:

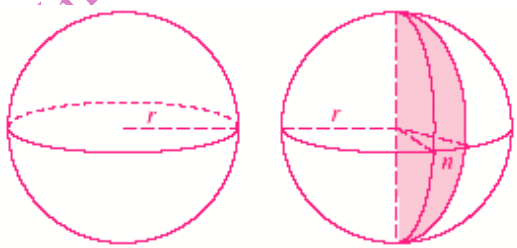


$$\begin{aligned}\text{Área del sección del cilindro} &= \pi \cdot R^2 \\ &= \pi \cdot \left(r^2 + d^2\right) \\ &= \pi \cdot r^2 + \pi \cdot d^2 \\ &= \text{Área de la sección de la semiesfera} + \text{Área de la sección del cono}\end{aligned}$$

Es decir, la suma de las áreas de las secciones del cono y la semiesfera es igual al área de la sección del cilindro. Esto ocurre para cualquier valor de d. De la relación se infiere que: Volumen del cilindro = Volumen de la semiesfera + Volumen del cono. Ahora, si reemplazamos en esta relación las fórmulas conocidas del volumen del cono y el cilindro, entonces es posible determinar el volumen de la esfera:

$$\text{Volumen de la ESFERA} = \frac{4\pi \cdot R^3}{3}$$

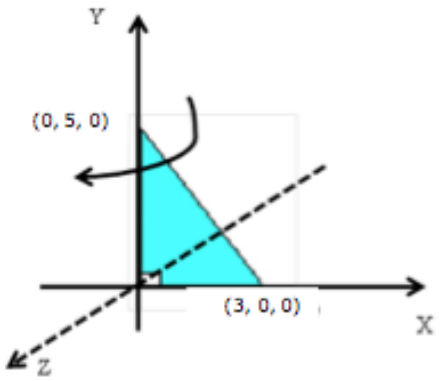
Por último, la o el docente puede modificar la actividad anterior solicitando, a las y los alumnos, la justificación del volumen de una sección de la esfera. Por ejemplo:



$$Volumen\ sección\ esfera = \frac{\pi r^3 n^{\circ}}{270^{\circ}}$$

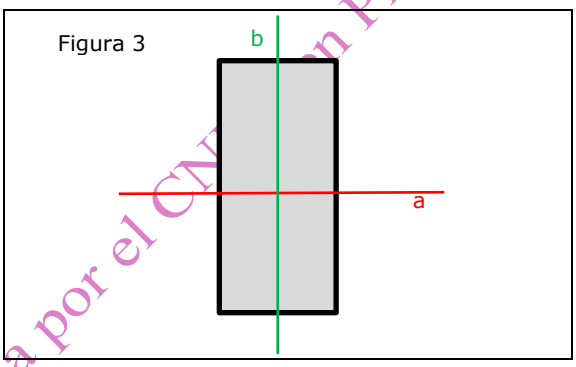
3. Dibujan el cuerpo generado por rotación de un triángulo y determinan el área de superficie y su volumen. Utilizan la información de la siguiente figura:

Edición y Diseño
Versión Aprobada por el



a. Determinan el volumen y el área de la superficie del cuerpo generado. (Utilizan las coordenadas del triángulo y calculan con π=3,14)
b. Conjeturan si se cambiaría el volumen del cuerpo y el área de la superficie si se intercambiaría el eje de rotación Y por el eje X.

4. Conjeturan acerca del cuerpo que se genera si se gira el rectángulo respecto del el eje **a** y por el eje **b** (figura 3). Además, responden:
   - ¿Ambos cuerpos generados por rotación tendrán el mismo volumen?
   - ¿En qué caso los volúmenes serían iguales?



a. Explican que los cuerpos generados por rotación son cilindros.
b. Desarrollan una expresión algebraica para calcular ambos volúmenes.
c. Comparan ambas expresiones algebraicas y explican si son equivalentes.
d. Argumentan el caso en el cual los volúmenes serían iguales.

Versión Aprobada por el CNE en Proceso de Edición y Diseño

Ejemplo de evaluación

Aprendizaje Esperado

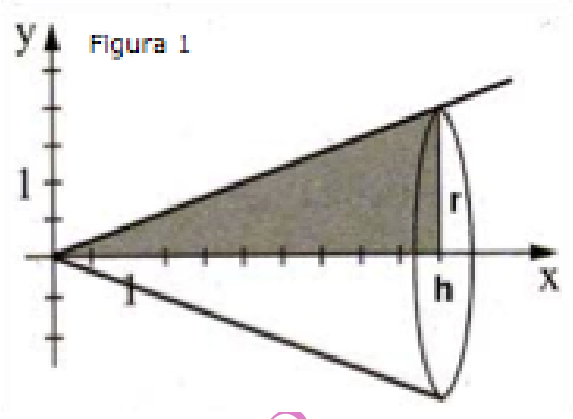
Determinar áreas de superficie y volúmenes de cuerpos geométricos generados por rotación de figuras planas en el espacio. (AE 4)

Indicadores de evaluación sugeridos

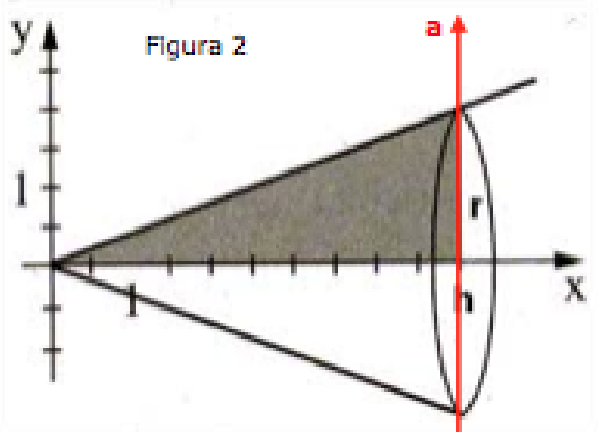
- Determinan el volumen y la superficie de algunos cuerpos generados por rotación de rectángulos y triángulos.

Actividad propuesta

En la figura 1 se representa un cono generado por la rotación del triángulo de color gris alrededor del eje **x**.



a. Determinan los vértices del triángulo.
b. Calculan el volumen del cono de rotación.
c. Calculan el área de la superficie del cono de rotación.
d. Conjeturan acerca de la forma del cuerpo geométrico que se genera por rotación del triángulo alrededor del eje **a** (figura 2).
e. Elaboran un dibujo del cono de rotación completando la figura 2.



f. Determinan la razón entre el volumen del primer cono de rotación y el del segundo, expresan la relación entre esos dos volúmenes en porcentaje.

Versión Aprobada por el CNED
Edición y Diseño

Criterios de evaluación

Al momento de evaluar se sugiere considerar los siguientes criterios:

- Determinan, a base de las coordenadas de los vértices, el volumen y la superficie del cono.
- Reconocen que con el recambio de los ejes de rotación se recambian el radio y la altura del cono.
- Elaboran un dibujo 3D del cono rotado por el eje **a**.
- Verifican que el volumen depende cuadráticamente del radio y solamente linealmente de la altura, y explican que los volúmenes no son iguales.
- Determinan la razón entre ambos volúmenes y la expresan correctamente con porcentaje.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

SEMESTRE 2

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

Unidad 3
Datos y azar I

Propósito

En esta unidad los estudiantes evalúan críticamente la información del medio que los rodea. Se introduce el concepto de "variable aleatoria continua", para determinar la probabilidad de tomar valores de mediciones relacionados con intervalos; en particular, analizan distribuciones aleatorias de magnitudes como peso, temperatura, estaturas u otras características de la población.

Además, los estudiantes trabajan con diferentes representaciones y conceptos estadísticos, para describir situaciones relativas a su entorno o al futuro laboral. También, como antesala de la siguiente unidad, se desarrolla y se aplica la función de densidad, para caracterizar el comportamiento de una variable aleatoria continua.

Conocimientos previos

- Probabilidad condicional.
- Variable aleatoria discreta.
- Función de probabilidad.
- Distribuciones de probabilidad.
- Distribución binomial.
- Valor esperado.
- Varianza.
- Desviación estándar.

Palabras clave

Variable aleatoria continua – probabilidad de ocurrencia – eventos puntuales – intervalos – función de densidad

Conocimientos

Variable aleatoria continua.
Distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua.
Función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua.

Habilidades

- Hacer inferencias sobre la población considerando el espacio muestral.
- Argumentar sobre presentaciones gráficas publicadas en medios de comunicación.
- Analizar si ciertos datos estadísticos pertenecen a variables aleatorias discretas o continuas.
- Responder preguntas estadísticas y probabilísticas relacionadas con la función de densidad de probabilidad.

Actitudes

- Desarrollar interés por conocer la realidad y utilizar el conocimiento.
- Demuestra una actitud crítica al analizar fuentes de información.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

Aprendizajes Esperados	Indicadores de evaluación sugeridos
Se espera que los estudiantes sean capaces de:	*Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:*
AE 1 Evaluar críticamente información estadística extraída de medios de comunicación, tales como periódicos y revistas, o de internet.	• Determinan posibles desproporciones en la presentación de gráficos de líneas, por ejemplo la falta del origen en el sistema. • Conjeturan si el espacio muestral tiene el tamaño suficiente para hacer inferencias sobre la población. • Analizan en resultados de encuestas si la medida citada, por ejemplo la media o la mediana representa adecuadamente la información.
AE 2 Interpretar el concepto de "variable aleatoria continua".	• Analizan en gráficos o tablas empíricas las distribuciones de frecuencias relativas de datos estadísticos, como peso, estatura, presión, etc. • Determinan en ejemplos concretos si una variable aleatoria es discreta o continua.
AE 3 Aplicar los conceptos de función de densidad y distribución de probabilidad, en el caso de una variable aleatoria continua.	• Modifican histogramas de distribuciones de probabilidad mediante el cambio de la amplitud de los intervalos y el número de observaciones, registrando los efectos que se generan en la forma del histograma. • Aproximan - de manera intuitiva - el gráfico de líneas por una curva como mejor representación. • Relacionan áreas de rectángulos de un intervalo con el cálculo de la probabilidad. • Aplican la función de densidad de probabilidad para responder preguntas estadísticas y probabilísticas.

Aprendizajes Esperados en relación con los OFT
• Desarrollar el interés por conocer la realidad y utilizar el conocimiento. • Buscar y acceder a información de diversas fuentes virtuales.

Orientaciones didácticas para la unidad
Respecto de la evaluación crítica de la información publicada en medios de comunicación conviene que el docente trabaje en profundidad el análisis, interpretación, síntesis de información y conocimiento publicados en periódicos, revistas o internet, de tal manera que las y los alumnos logren establecer relaciones pertinentes y útiles para resolver el problema a partir de información explícita e implícita en el enunciado, y producir nueva información a partir de la construcción y/o interpretación de tablas y/o gráficos. De esta manera, se puede vincular el aprendizaje de un eje temático como Datos y Azar con el desarrollo de habilidades tales como: evaluar resultados sobre una población considerando el tamaño de ésta y la distribución de la variable, etc.; inferir conclusiones a partir de la media, la varianza y la desviación estándar; y tomar decisiones fundamentadas en información estadísticamente significativa. En cuanto al aprendizaje del concepto de variable aleatoria continua, se recomienda iniciar dicho proceso con ejemplos concretos y contextualizados estableciendo la diferencia entre una variable aleatoria discreta y continua. En específico, las y los alumnos deben comprender que toda variable

Versión Aprobada CNED en Proceso de Edición y Diseño

continua puede tomar cualquier valor en el conjunto de los números reales. Además, a base de ejemplos, los alumnos pueden conjeturar que la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor específico, es cero. Se sugiere que el concepto de densidad de probabilidad, se desarrolle a partir de frecuencias relativas de observaciones relacionadas con intervalos. Se realiza un proceso graduado de aproximación que incluye un aumento del número de observaciones junto con una disminución de la amplitud de los intervalos considerados, logrando que las frecuencias relativas casi no varían. En las representaciones gráficas se visualiza un cambio de los gráficos de barras y gráficos de segmentos hacia la representación de una curva. Se define una variable aleatoria continua X que representa las frecuencias relativas de las observaciones y se considera un aumento infinito de las observaciones junto con una disminución infinita de las amplitudes de los intervalos. Este proceso lleva a una curva límite de los gráficos anteriores y representa una función de densidad de probabilidad. Al mismo tiempo, se sugiere explicar, para una mayor comprensión del concepto, que la función densidad de probabilidad no representa la probabilidad para un caso particular ($X = x$), sino que ésta permite calcular la probabilidad de la variable X en un intervalo específico ($x_1 \leq X \leq x_2$). Lo anterior, permite comprender que las probabilidades se relacionan con intervalos $[x_1,x_2]$ y el valor de la probabilidad de un suceso para dicho intervalo se determinan como el área bajo la curva de la función de densidad de probabilidad, entre el eje X y las rectas $X=x_1$ $X=x_2$. Para facilitar el calculo, se sugiere la incorporación de tecnología (Excel, GeoGebra, calculadoras, etc.), y así, permitir que las y los alumnos puedan interpretar los cálculos a partir de las representaciones gráficas e inferir conclusiones respecto de los contextos cotidianos o matemáticos involucrados en la resolución de problemas de función de densidad de probabilidad.

Respecto de la evaluación, se aconseja ir monitoreando el logro de los aprendizajes a medida que avanza la unidad y no solamente al final de ella. De este modo, el docente sabrá si las y los alumnos comprenden y aplican los conceptos y procedimientos al resolver problemas de variables aleatorias continuas y de densidad de probabilidad. Dado el contexto anterior, el docente podrá obtener evidencia de aprendizaje de los distintos niveles de desempeño y diseñar procesos de retroalimentación para las diferentes dificultades o errores conceptuales/procedimentales propios de los contenidos a trabajar en esta unidad.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

Ejemplos de actividades

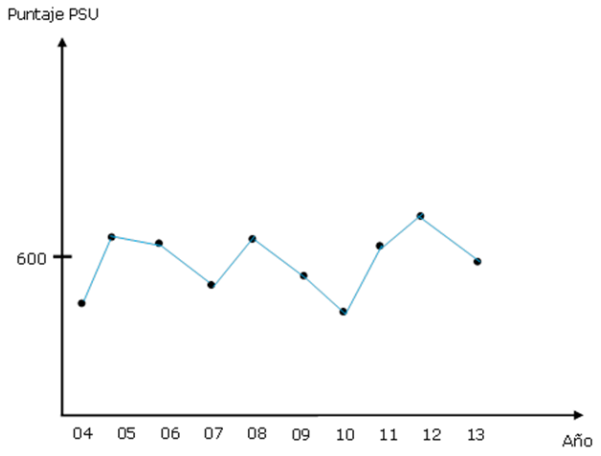
Los ejemplos de actividades presentados a continuación, son sugerencias que pueden ser seleccionadas y /o adaptadas por la y el docente para su desarrollo, de acuerdo a su contexto escolar.

AE 1
Evaluar críticamente información estadística extraída de medios de comunicación, tales como periódicos y revistas, o de internet.

Observación al docente:
La actividad 1 muestra que la elaboración de un gráfico sin el origen del sistema de coordenadas podría representar variaciones desproporcionadas y generar conclusiones erróneas. No obstante, al considerar la media y la desviación estándar, las y los alumnos pueden inferir y verificar que los puntajes no se desplazan más allá de dos desviaciones estándar de la media. Además, la o el docente puede orientar a las y los alumnos a determinar coeficiente de variación en porcentaje (coeficiente de variación corresponde a la relación entre la desviación estándar y la media: $C_V = \frac{\sigma}{|\bar{x}|}$, con $\bar{x} > 0$) Lo anterior permitirá a las y los alumnos constatar que el valor del coeficiente de variación en porcentaje es aproximadamente 1%. Con este resultado, las y los alumnos, pueden cuestionar la representación gráfica de la actividad 1. Para lograr diferentes niveles de desempeño por parte de las y los alumnos, la o el docente puede solicitar construir un gráfico considerando la escala en puntaje cero, y así, las y los alumnos podrán justificar lo planteado anteriormente. Por último, la o el docente debe promover aprendizajes contextualizados en las y los alumnos para desarrollar progresivamente una alfabetización estadística, entregando herramientas para la toma de decisiones fundamentadas disciplinarmente.

1. La tabla muestra los puntajes promedios obtenidos en la PSU por un colegio desde el año 2004 hasta 2013. Mediante el gráfico de líneas, el colegio quiere representar el desarrollo de los puntajes.

Año	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Puntaje	591	605	604	595	605	600	589	602	608	601



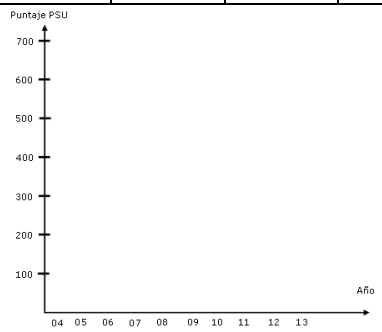
a. Considerando la información que muestra el gráfico ¿Se puede concluir que se muestran "variaciones considerables" en los puntajes? Razonan y comunican la respuesta.

CNED en Proceso de Edición y Diseño

b. Considerando la media y la desviación estándar de la distribución de los puntajes. ¿Se puede concluir que los puntajes muestran variaciones importantes? Comparan con las interpretaciones dadas en a). Razonan y comunican la respuesta.

c. Elaboran, con los datos de la misma tabla, el gráfico de líneas que tiene el origen en cero puntos.

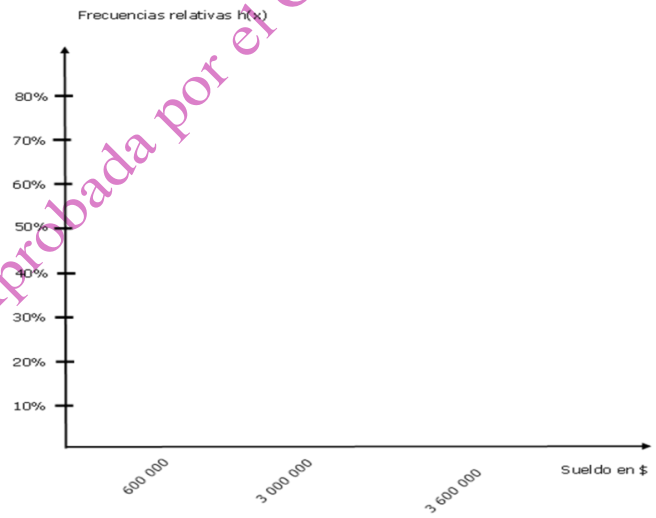
Año	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Puntaje	591	605	604	595	605	600	589	602	608	601



d. Comparan el gráfico dado con el gráfico construido en c. Conjeturan acerca de la interpretación de los datos por parte del colegio.

2. Un banco particular hace propaganda del pago de un sueldo promedio $ 1 250 000 que reciben sus integrantes. La estructura de los sueldos es la siguiente: $ 600 000 para 18 personas de un cargo inferior, $ 3 000 000 para los 4 jefes de departamentos, y $ 3 600 000 para los 2 directores.

a. Verifican si el sueldo promedio enunciado es correcto.
b. Elaboran un gráfico de frecuencia relativa porcentual que representa los sueldos.



c. Describen y comentan el gráfico de barras que representa la distribución de las frecuencias relativas de los sueldos pagados.
d. Determinan e interpretan la varianza y la desviación estándar de la distribución de las frecuencias relativas de los sueldos pagados.
e. Discuten acerca de lo que dice y lo que oculta la afirmación: "el sueldo promedio del banco es de $ 1 250 000". Argumentan su respuesta.

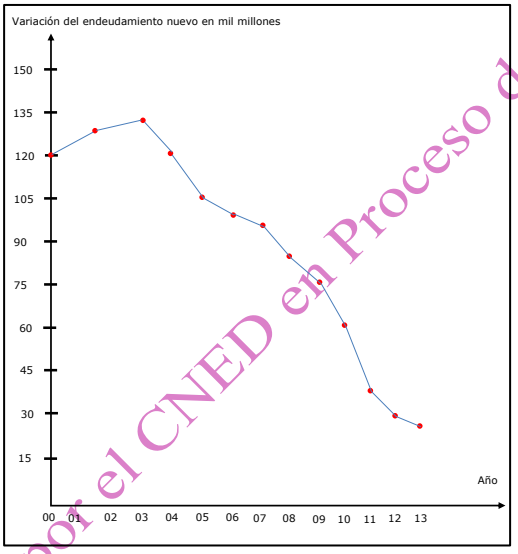
Versión Aprobada por el CNED en Proceso de

Observación al docente:

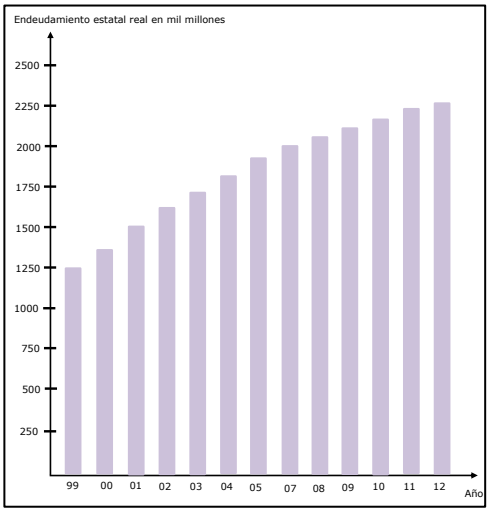
La actividad 3 muestra una representación arbitraria de información estadística que a veces se practica en los medios de comunicación. Si se representa solamente el endeudamiento nuevo, el gráfico muestra una baja y se puede inferir erróneamente que el endeudamiento se está disminuyendo aunque el endeudamiento real sigue subiendo como se lo muestra en el segundo gráfico. Hay que destacar la diferencia entre el desarrollo global de una magnitud y su variación de un intervalo al otro. En la actividad 4, las y los alumnos deben ser críticos de la información que entregan los medios de comunicación, y deben analizar e interpretar si la información entregada en ambos gráficos considera todas las variables del fenómeno de interés.

3. El gobierno de un país publicó la variación del endeudamiento nuevo, que se refiere al endeudamiento estatal real del año anterior.

   a. ¿Se puede concluir que el endeudamiento estatal se reduce? Razonan y comunican la respuesta.



   b. Comparan el gráfico de líneas con el histograma del endeudamiento estatal real y afirman o modifican la respuesta anterior. Razonan y comunican la respuesta.



Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

4. Dos candidatos a alcalde de una comuna muestran las cifras de hogares victimas de algún delito en los últimos 7 años.

   a. En función del gráfico que muestra el candidato A, ¿Se puede afirmar que los delitos han disminuido? Argumentan su respuesta.

Candidato A

   b. Al comparar el gráfico del candidato A con el gráfico que muestra el candidato B. Discuten si afirmar o cambiar la respuesta dada en a). Argumentan su respuesta.

Candidato B

Versión A
NED en
seño

AE 2
Interpretar el concepto de una variable aleatoria continua.

1. Una empresa de transportes quiere estudiar el tiempo de espera de sus clientes en la estación de buses.

a. Determinan posibles resultados de la variable tiempo de espera. Argumentan su respuesta.

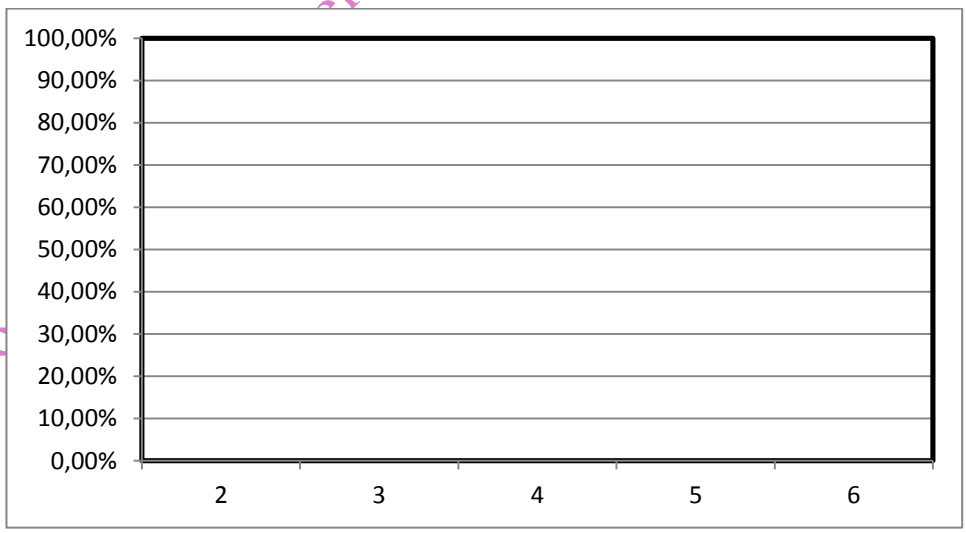
b. Conjeturan que entre dos tiempos de espera de dos personas, siempre puede haber un tiempo de espera de alguna otra persona que esta entre ellos. Argumentan su respuesta.

Observación a la o el docente: Para la actividad 2**,** las y los alumnos deben comprender que una variable aleatoria continua puede obtener cualquier valor en un intervalo predeterminado. Además, deben comprender que los posibles valores de una variable aleatoria continua están limitados por los instrumentos de medición y por la exactitud de ellos.

2. En un hospital se registran los pesos de los bebes en kilogramos. Los siguientes datos muestran los datos registrados.

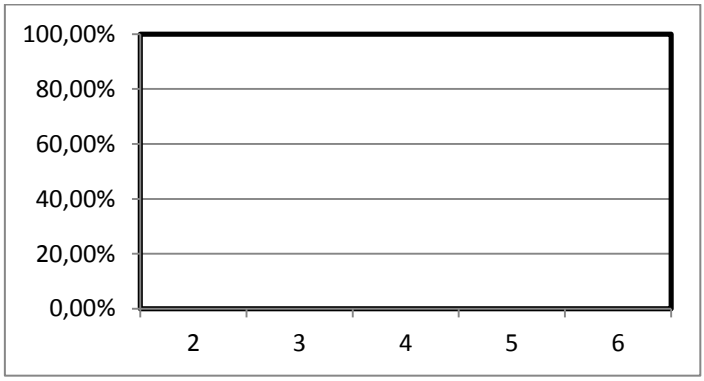
3,3455	3,6526	4,9876	5,0871	5,3425	3,5345
3,0182	4,0238	5,5704	3,9758	3,8374	3,0234
3,0923	5,0385	5,6461	3,0239	3,0645	4,9823
4,4329	5,5421	3,4572	5,4533	5,4534	5,4123
3,8578	3,0129	5,5634	3,6456	5,7453	4,0945
4,0454	5,0935	5,0237	4,9238	5,9238	4,0239

a. Construyen un gráfico de barra para el peso, considerando un redondeo de los pesos al entero más cercano.



b. Construyen un gráfico de barra para el peso, considerando un redondeo de los pesos al decimal más cercano.

Versión del CNED en Proceso de Edición y Diseño



c. Comparan y conjeturan sobre las diferencias entre los gráficos de barra en relación al redondeo y a la exactitud del valor de la variable peso. Argumentan su respuesta.

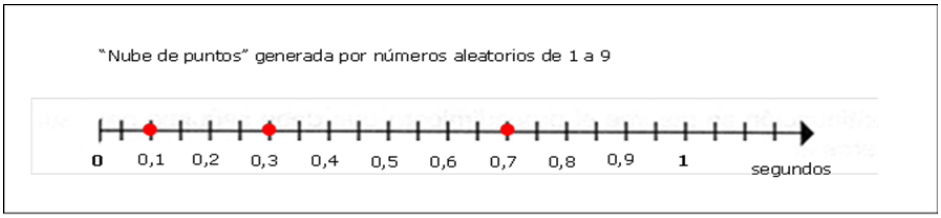
Observación al docente:
Decimos que una variable aleatoria es continua, si el conjunto de todos los valores de la variable abarca un intervalo de números reales. Por ejemplo, la variable que asigna la estatura a una persona de una población determinada, es una variable continua. Los números reales son densos, esto significa que entre dos números reales dados, existe un conjunto infinito, no numerable, de números reales. Esto hace que en la teoría de probabilidades, se establezca que la probabilidad de que una variable aleatoria continua tome un valor determinado, es cero.

El siguiente ejemplo muestra un **proceso aleatorio** que está presente en toda la naturaleza: la **descomposición radioactiva**. Aunque la descomposición de una cantidad radioactiva se describa mediante una función exponencial, la desintegración de un solo átomo es aleatoria, es decir que no se puede predecir el momento preciso en el cual el próximo átomo se descomponga. Con un generador sencillo de números aleatorios se puede simular un proceso aleatorio. En este caso se delimita al conjunto de los números racionales que también es denso.

Consideramos como ejemplo ficticio una fuente radioactiva que se descomponga con la intensidad de 1 Becquerel (1Bq), que significa la descomposición de 1 átomo por segundo. Al momento ficticio de t=0s "ocurra" la descomposición de un átomo. Simulamos la descomposición aleatoria del próximo átomo de la siguiente manera: en un primer paso generamos números aleatorios del ámbito numérico de 1 a 9. Por ejemplo, si resulta 8, la próxima desintegración ficticia sería en el instante t=0,8s. Si aumentamos el ámbito numérico de 1 a 99 generamos instantes ficticios de descomposición con una precisión de centésimas de segundos, por ejemplo, si resulta 43 el instante ficticio de la próxima descomposición radioactiva sería 0,43s. Al aumentar el ámbito numérico del generador de números aleatorios, los instantes ficticios se generan con más y más cifras decimales. En las siguientes representaciones se muestran los instantes ficticios en una línea de tiempo generando una "nube de puntos" que se hace más y más denso.
Generadores de números aleatorios están gratuitamente disponibles en el internet. Por ejemplo en los sitios www.augeweb.com/azar/ o www.echaloasuerte.com. Además se pueden generar números aleatorios por funciones del programa EXCEL o funciones de azar en calculadoras.

Ejemplificación para la generación de números aleatorios del 1 al 9

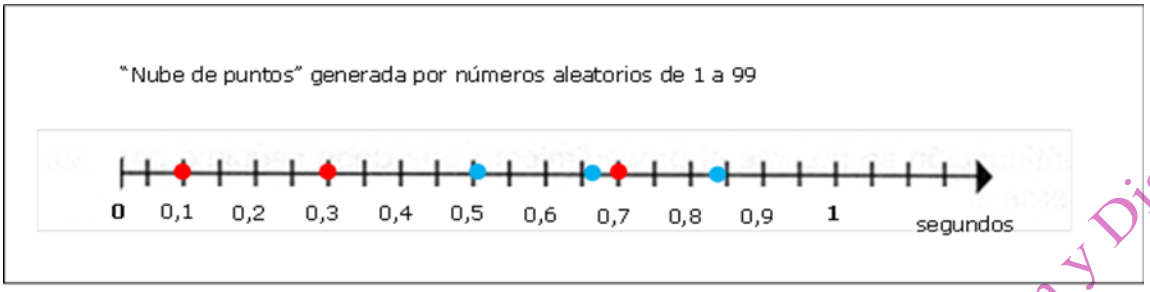
número 3	instante 0,3s	número 1	instante 0,1s	número 7	instante 0,7s



Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

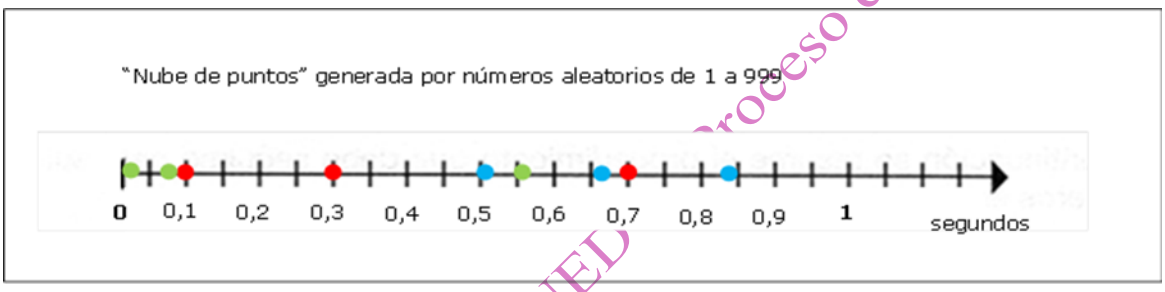
Ejemplificación para la generación de números aleatorios del 1 al 99

número 84	instante 0,84s	número 51	instante 0,51s	número 67	instante 0,67s



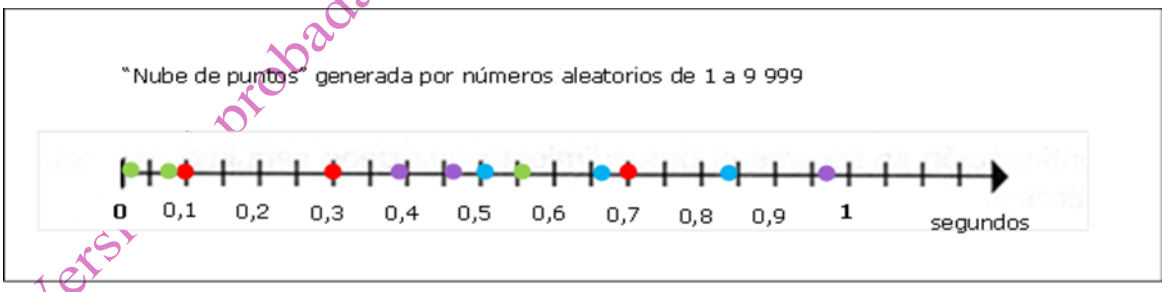
Ejemplificación para la generación de números aleatorios del 1 al 999

número 557	instante 0,557s	número 82	instante 0,082s	número 9	instante 0,009s



Ejemplificación para la generación de números aleatorios del 1 al 9 999

número 4 672	instante 0,4672 s	número 3912	instante 0,3912s	número 9 735	instante 0,9735s



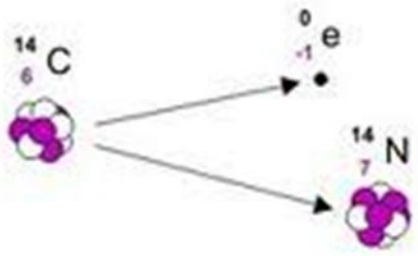
Versión aprobada por el CNED Proceso de Edición y Diseño

En la siguiente tabla se muestra el desarrollo de las probabilidades en dependencia del ámbito numérico de los números aleatorios.

Ámbito de números aleatorios naturales generables por un generador de números aleatorios	Probabilidad de obtener un número específico en el ámbito de los números aleatorios	Probabilidad de obtener un instante específico de tiempo en la línea de tiempo entre 0s y 1s
[1, 9]	$0,\overline{1}$	$0,\overline{1}$
[1, 99]	$0,\overline{01}$	$0,\overline{01}$
[1, 999]	$0,\overline{001}$	$0,\overline{001}$
[1, 9 999]	$0,\overline{0001}$	$0,\overline{0001}$
. . . . .	. . . . .	. . . . .
Si se podrían generar números [1, ∞[infinitamente grande	se acercaría a 0	se acercaría a 0

Se sugiere además un trabajo grupal para obtener, debido a la generación de números aleatorios, una variedad de nubes de puntos que simula el problema de desintegración de un átomo. Cabe señalar que las nubes se distinguirán en detalles, pero todas las nubes mostrarán el desarrollo común de hacerse más y más densas.

3. Para la datación de la edad de objetos fósiles se utiliza el método de desintegración radioactiva mediante el isótopo radioactivo de carbono $^{14}C_6$ que se convierte en nitrógeno $^{14}N_7$. (ver esquema 1) Aunque la desintegración de una cantidad de materia radioactiva se pueda describir mediante una función exponencial, la desintegración de un solo átomo pertenece a un proceso aleatorio y no se puede predecir el instante preciso en el cual el próximo átomo se descompone.



Esquema 1

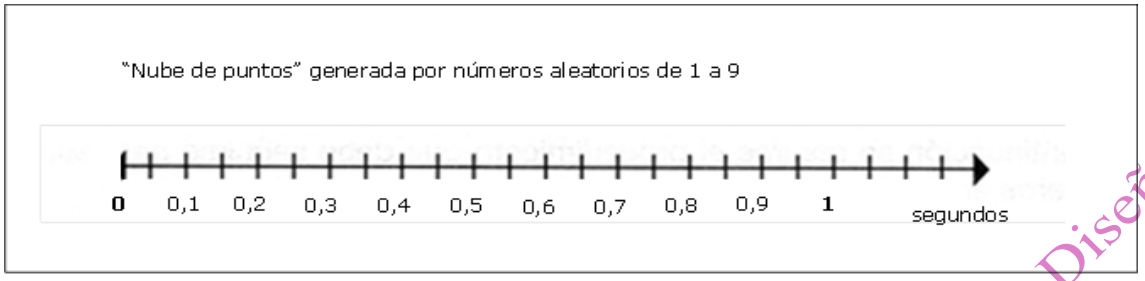
Consideramos la siguiente situación: Se registran las descomposiciones radioactivas de una cantidad de carbono $^{14}C_6$ con la intensidad aproximada de 1 Becquerel (1 Bq que equivale 1 descomposición por segundo). Al momento t=0s ocurrió la desintegración de un átomo. Con un "generador de números aleatorios" se quiere modelar el momento en el cual podría ocurrir la próxima desintegración aleatoria de un átomo de $^{14}C_6$. Los números generados al azar se transforman en instantes de tiempo como se muestra en la tabla 1.

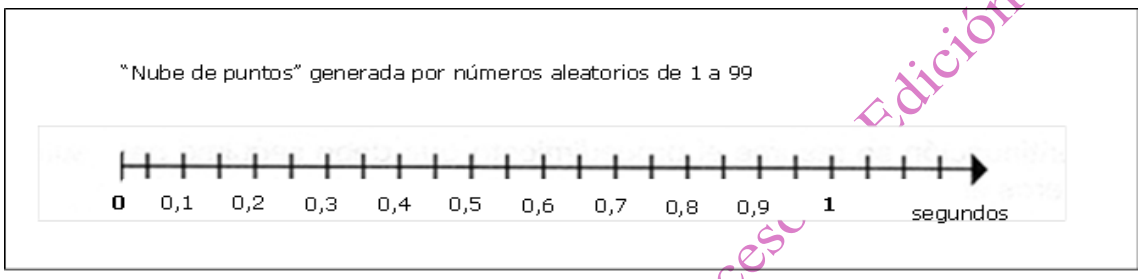
Tabla 1

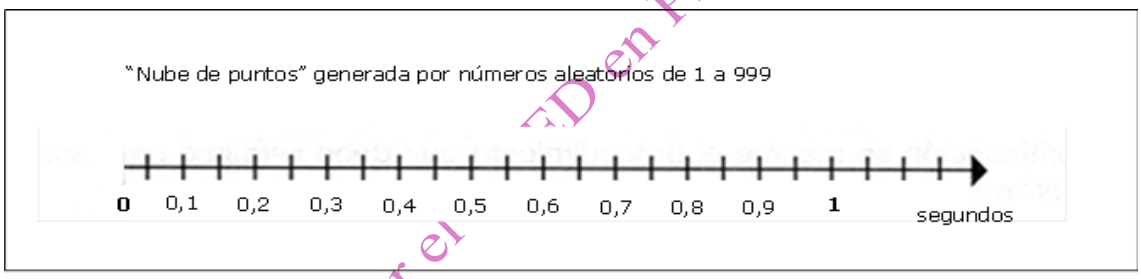
Número aleatorio generado en [1,9]	Próxima desintegración aleatoria
3	0,3s
Número aleatorio generado en [1,99]	Próxima desintegración aleatoria
74	0,74s
Número aleatorio generado en [1, 999]	Próxima desintegración aleatoria
29	0,029s
Número aleatorio generado en [1, 9 999]	Próxima desintegración aleatoria
8 537	0,8537s

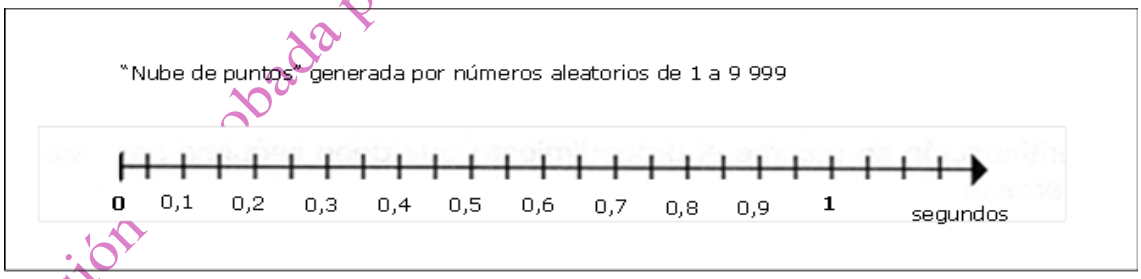
Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

a. Generan cinco números aleatorios naturales en cada uno de los intervalos [1 , 9], [1 , 99], [1 , 999], [1 , 9 999] u otros intervalos. Transforman los números aleatorios obtenidos en momentos de tiempo y ponen sus marcas en las líneas de tiempo que se muestran a continuación.









b. Describen y comentan el desarrollo de la nube de puntos en dependencia del ámbito de los números aleatorios.

c. Determinan las probabilidades de obtener un momento específico de tiempo en el cual el próximo átomo se podría descomponer. Completan la tabla e interpretan los dados en función del contexto del problema.

Versión aprobada por el GDen Proceso Edición y Diseño

Intervalo de números aleatorios naturales generables por un generador de números aleatorios	Probabilidad de obtener un número específico en el ámbito de los números aleatorios	Probabilidad de obtener un instante específico de tiempo en la línea de tiempo entre 0s y 1s
[1, 9]	$0,\overline{1}$	$0,\overline{1}$
[1, 99]		
[1, 999]		
[1, 9 999]		
. . . . .	. . . . .	. . . . .

d. ¿A qué valor se acerca la probabilidad de generar un determinado número, si se generan números aleatorios naturales con infinitos dígitos? Razonan y explican la respuesta.
e. Conjeturan para el caso del ejercicio d) acerca de la probabilidad de momentos discretos en las cuales se podría efectuar una descomposición radioactiva. Argumentan la conjetura.

Observación al docente: Para la actividad 3 y 4 se sugiere explicar que la obtención de la nube de puntos está relacionada a diferentes operaciones. En particular, en la generación de la nube de puntos de la actividad 3 se divide por 10, 100, 1000 y así sucesivamente según el intervalo seleccionado; y en la generación de la nube de puntos de la actividad 4 se debe multiplicar por 10 los valores aleatorios obtenidos para el intervalos [0, 9], multiplicar por 100 los valores aleatorios obtenidos para el intervalo [0, 90], y multiplicar por 1000 los valores aleatorios obtenidos para el intervalo [0, 900].

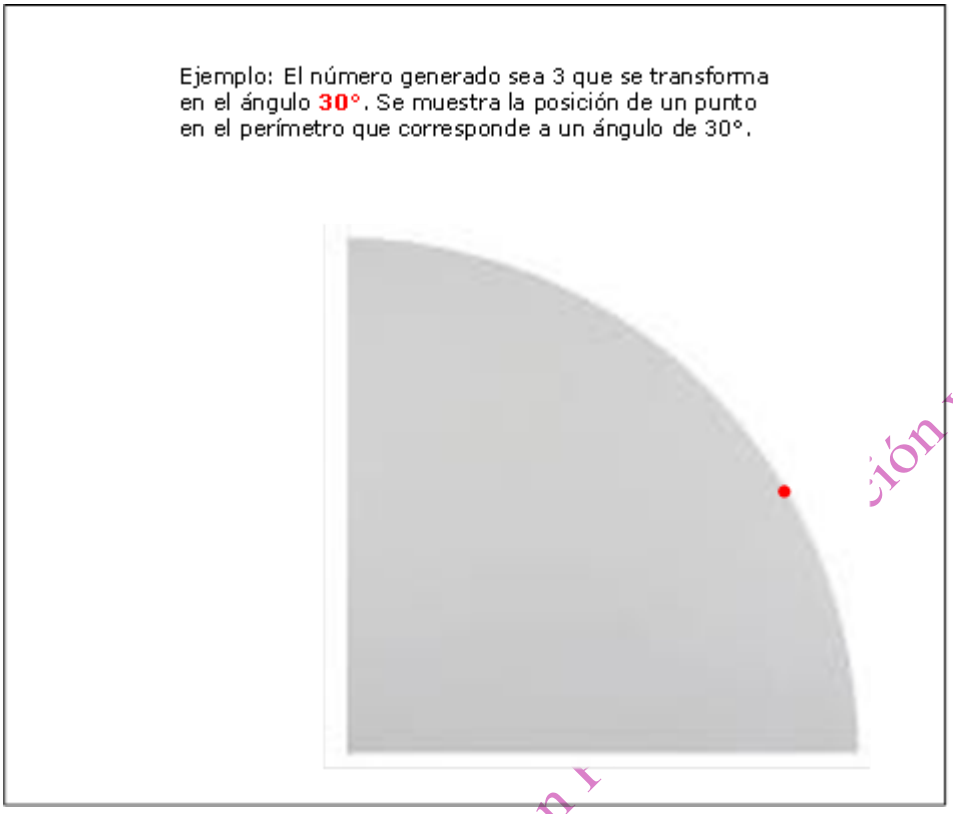
4. El primer paso de esta actividad experimental consiste en generar números aleatorios de 0 a 9, luego del 0 al 90 y finalmente del 0 al 900, los cuales se transforman en ángulos centrales de la cuarta parte de un círculo. Con un transportador se ponen las marcas de los ángulos en el perímetro del sector circular como muestra la figura 1. Los números aleatorios obtenidos por un simulador (generador aleatorio de números naturales) se convierten en ángulos centrales según la siguiente tabla.

Tabla 1

Números aleatorios generados en [0, 9]	Ángulos centrales
1 | 7 | 5	10° | 70° | 50°
Números aleatorios generados en [0, 90]	Ángulos centrales
56 | 14 | 8	56° | 14° | 8°
Números aleatorios generados en [0, 900]	Ángulos centrales
485 | 9 | 64	48,5° | 0,9° | 6,4°

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

Figura 1



a) Generan cinco números aleatorios naturales en cada uno de los intervalos [0, 9], [0, 90], [0, 900]. Transforman los números en ángulos centrales y ponen sus marcas en el perímetro del sector circular como muestra la figura 1.
b) Describen y comentan el desarrollo de la nube de puntos en dependencia del ámbito de los números aleatorios generados
c) Determinan las probabilidades de obtener un ángulo en el perímetro del sector circular. Completan la tabla.

Intervalo de números aleatorios	Probabilidad de obtener un ángulo central	Diferencia entre dos ángulos centrales
[0, 9]	$\frac{1}{10} = 0{,}1$	1
[0, 90]		
[0, 900]		
[0, 9 000]		
. . . . .	. . . . .	. . . . .

Versión Aprobada por el CNED en ... ción y Diseño

d) ¿A qué valor se acerca la probabilidad de generar un determinado número, si se generan números aleatorios naturales con infinitos dígitos? Razonan y explican la respuesta.
e) Conjeturan para el caso del ejercicio d) acerca de la probabilidad de momentos específicos en las cuales se podría efectuar una descomposición radioactiva. Razonan y explican la conjetura.

5. ¿Cuáles de las siguientes variables aleatorias X son discretas o continuas? Razonan y explican sus respuestas.

   a. La duración de vida de un átomo radioactivo hasta su descomposición.
   b. La suma de los números de un lanzamientos simultáneo de 100 dados.
   c. El peso de recién nacidos en Chile.
   d. La apariencia de la letra "ñ" en textos escolares chilenos.
   e. La temperatura media mensual en la zona costera de una región en Chile.
   f. La cantidad de autos que pasa diariamente por una plaza de peaje.
   g. Ser portador de un cierto grupo sanguíneo.
   h. La estatura de las mujeres chilenas.
   i. La cantidad de lluvia caída anualmente en la región de "Los Ríos".

AE 3
Aplicar los conceptos de función de densidad y distribución de probabilidad, en el caso de una variable aleatoria continua.

Observación al docente: Para lograr el entendimiento del concepto de función de densidad de probabilidad se deben desarrollar registros de eventos aleatorios que están sometidos a dos cambios simultáneos: el aumento del número de las observaciones de los eventos, junto con la disminución de la amplitud de los intervalos en los cuales se observan los eventos. De esta manera las frecuencias relativas por amplitud del intervalo casi no se varían en sus intervalos y los gráficos se aproximan a una curva. Se remplazan las observaciones de eventos o mediciones por una variable aleatoria continua **X**, que implica que la frecuencia relativa por amplitud del intervalo se convierte en probabilidad por amplitud de intervalo que se denomina con el término "densidad de probabilidad". Por lo tanto la curva límite que resulta del proceso de aproximación, anteriormente descrito, representa una función de densidad de probabilidad. Es importante destacar que las ordenadas de los puntos de esta curva límite no representan probabilidades si no densidades de probabilidades. Con las densidades de probabilidad se pueden obtener probabilidades relacionadas con un intervalo $[x_1, x_2]$. En este caso se debe calcular el área bajo la curva entre las rectas $X=x_1$ y $X=x_2$. En ejercicios a nivel escolar, sin conocimientos de la integral definida de una función, es suficiente de aproximar el área bajo la curva.

1. Para eventos de gran convocatoria se utilizan lugares como el Estadio Nacional de Chile. Por ejemplo, para conciertos de música pop o partidos de futbol, las personas no llegan al mismo tiempo. Horas antes del inicio del evento no hay gran aglomeración de personas, y en un lapso de tiempo cercano al inicio del evento, se reúne una multitud de personas frente a las diferentes entradas del recinto, lo que implica el ingreso de muchas más personas en breves intervalos de tiempo. Supongamos que algunas horas antes del inicio entren 100 personas dentro un lapso de 10 minutos y se registre el tiempo entre dos llegadas consecutivas en 10 intervalos de 1 minuto. Un tiempo más tarde lleguen 1 000 personas en 10 minutos y se registra el tiempo entre dos llegadas consecutivas, pero ahora en 20 intervalos de medio minuto. En las tablas de abajo se representan posibles registraciones de llegadas de personas.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

a. Calculan las frecuencias relativas por amplitud del intervalo (amplitud 1) . Completan la tabla 1.

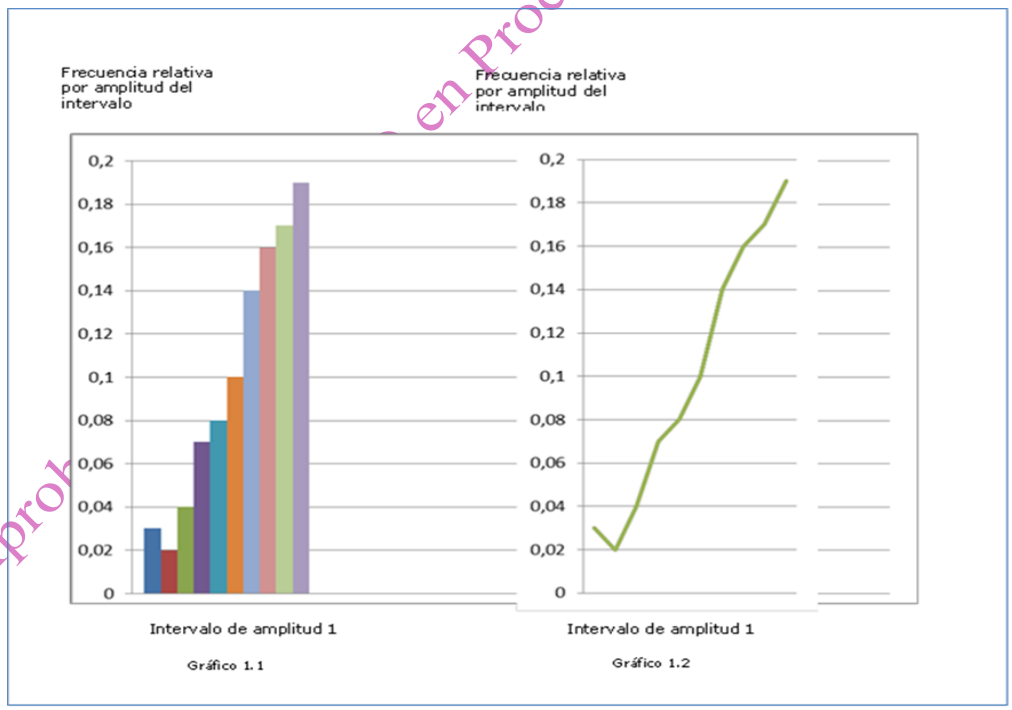
Tabla 1

Intervalo de amplitud 1min	Número de llegadas de un total de 100 personas	Frecuencia relativa por intervalo de amplitud 1
]0,1]	3	0,03
]1,2]	2	
]2,3]	4	
]3,4]	7	
]4,5]	8	
]5,6]	10	
]6,7]	14	
]7,8]	16	
]8,9]	17	
]9,10]	19	

b. El gráfico 1.1 muestra las frecuencias relativas de la llegada de 100 personas al estadio por un lapso de 10 minutos subdividido en intervalos de 1 minuto. Se representan los datos de la tabla 1. Calculan el área de las barras.

c. Conjeturan acerca la suma obtenida en el ejercicio b y verifican el resultado a partir de los resultados de b .

d. ¿Qué relación puedes observar entre el gráfico 1.1 y el gráfico 1.2?



e. En la tabla 2 se representa la entrada de 1 000 personas al estadio registrada en un lapso de 10 minutos, pero subdivididos en intervalos de amplitud de $\frac{1}{2}$ min. Calculan las frecuencias relativas por amplitud del intervalo (amplitud $\frac{1}{2}$). Completan la tabla 2

Versión Aprobada en Proceso de Edición y Diseño

Intervalo de amplitud $\frac{1}{2}$ min	Número de llegadas de un total de 1 000 personas	Frecuencia relativa por intervalo de amplitud $\frac{1}{2}$
$]0,\frac{1}{2}]$	18	0,036
$]\frac{1}{2},1]$	12	
$]1,1\frac{1}{2}]$	9	
$]1\frac{1}{2},2]$	11	
$]2,2\frac{1}{2}]$	19	
$]2\frac{1}{2},3]$	21	
$]3,3\frac{1}{2}]$	37	
$]3\frac{1}{2},4]$	33	
$]4,4\frac{1}{2}]$	38	
$]4\frac{1}{2},5]$	42	
$]5,5\frac{1}{2}]$	45	
$]5\frac{1}{2},6]$	55	
$]6,6\frac{1}{2}]$	63	
$]6\frac{1}{2},7]$	77	
$]7,7\frac{1}{2}]$	79	
$]7\frac{1}{2},8]$	81	
$]8,8\frac{1}{2}]$	83	
$]8\frac{1}{2},9]$	87	
$]9,9\frac{1}{2}]$	92	
$]9\frac{1}{2},10]$	98	

f. En los gráficos 2.1 y 2.2 de abajo se representan los datos de la tabla 2. Comparan los gráficos 2.1 y 2.1 con los gráficos 1.1 y 1.2. ¿En qué se diferencian los gráficos 2.1 y 2.1 de los gráficos 1.1 y 1.2? ¿y qué tienen en común? Explican y comunican la respuesta.

g. Conjeturan acerca de la suma de todas las áreas de las barras del gráfico 2.1.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

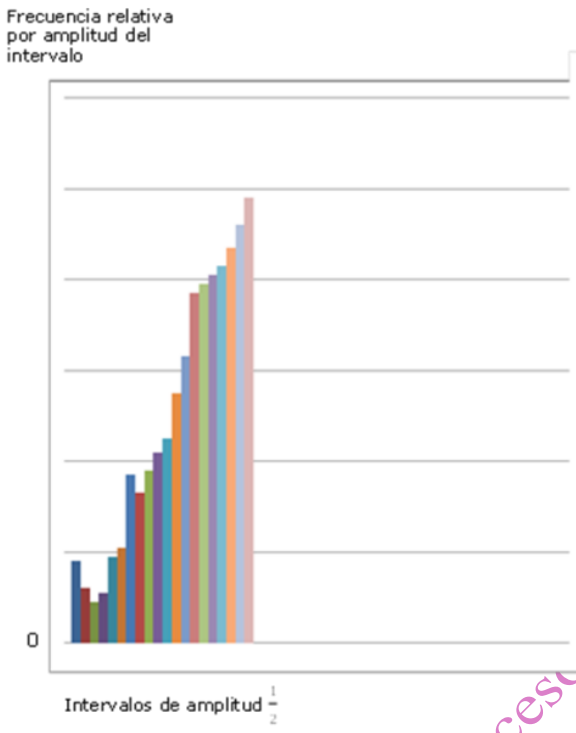


Gráfico 2.1

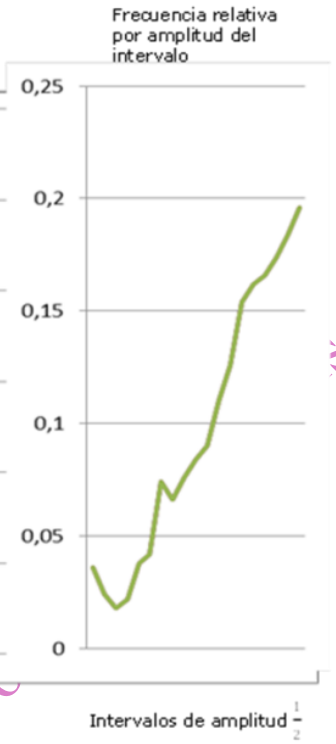


Gráfico 2.2

Observación al docente: Antes de comenzar con la actividad 2, la o el docente debe destacar que se cambian las frecuencias relativas por amplitud de intervalo, las cuales corresponden a una variable aleatoria cuyas probabilidades también se determinan en función de la amplitud de intervalo. En esta actividad en particular, el foco no está en realizar cálculos, si no en potenciar el razonamiento matemático en función de lo desarrollado en la actividad 1. Se recomienda el trabajo en grupo para argumentar y comunicar las conjeturas y las respuestas en el plenario.

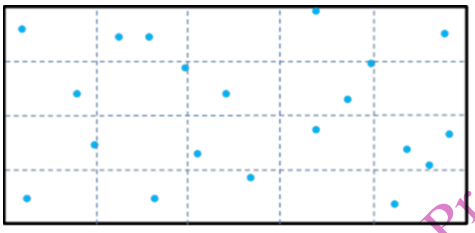
2. Aunque la llegada de una gran cantidad de personas a un evento de masiva afluencia siga una cierta tendencia, la llegada individual de las personas se puede interpretar como un proceso aleatorio. Se define una variable aleatoria continua X que represente la llegada de personas a un evento y se considera la siguiente situación, A 30 minutos del inicio del evento y con más puertas abiertas, se registra la llegada 10 000 personas en 40 intervalos de $\frac{1}{4}$ minuto.

   a. Conjeturan acerca de los cambios que se generarían en los gráficos 2.1 y 2.2 representados en la actividad anterior.
   b. Se sigue aumentando el número de la llegada de las personas y a la vez disminuyendo las amplitudes de los intervalos, ¿porque la frecuencia relativa por amplitud del intervalo no experimentará grandes cambios? Razonan y explican la respuesta con los resultados de la actividad.
   c. En vez de registrar las personas que lleguen al evento, se considera una variable aleatoria X que represente la llegada de personas. ¿En qué término se convierte la frecuencia relativa por amplitud del intervalo (altura de las barras en el gráfico)? Razonan la respuesta.
   d. ¿Qué representan las áreas de las barras del gráfico? Explican la respuesta.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Diseño

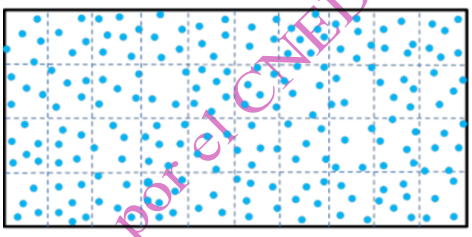
e. Si se considera un aumento infinito de llegadas y una disminución infinita de las amplitudes de los intervalos,
   - ¿en qué gráfico se convierte el gráfico de líneas (del tipo 1.2 y 2.2)?
   - ¿cómo se puede interpretar el área "bajo la curva" en el gráfico entre las dos rectas $X=x_1$ y $X=x_2$ y el eje X?

3. En Rancagua comienza a llover de forma dispersa, pero con constante intensidad como muestra la figura 1. Específicamente, la figura 1 muestra el techo acrílico de un invernadero con 20 gotas de lluvia repartida al azar en 20 cuadrículas de igual tamaño. Momentos más tarde, han caído al techo 200 gotas de lluvia y se las registran en 40 cuadriculas como muestra la figura 2 (cada cuadrícula de la figura 2 tiene la mitad del área que las cuadrículas de la figura 1). Las 20 cuadrículas de la figura 1 están marcadas de 1 a 20 según el siguiente esquema: la última fila se enumera del 1 a 5 de izquierda a derecha, la penúltima fila de 6 a 10 de izquierda a derecha, y así sucesivamente hasta enumerar la cuadrícula numero 20. En la figura 2 se enumeran las 40 cuadrículas de la misma manera que las cuadrículas de la figura 1.



20 gotas de lluvia registradas en un techo de 20 cuadrículas

Figura 1



200 gotas de lluvia registradas en el techo de 40 cuadrículas de la mitad del tamaño anterior

Figura 2

a. Se consideran las primeras 20 gotas que han caído en el techo representado en la figura1. Determinan las frecuencias relativas por unidad del área de las cuadrículas (unidad 1). Completan la tabla 1

Tabla 1

Cuadrícula	1	2	3	4	5
Frecuencia relativa por unidad 1 del área	$\frac{1}{20}:1=0{,}05$				
Cuadrícula	6	7	8	9	10
Frecuencia relativa por unidad 1 del área					
Cuadrícula	11	12	12	14	15
Frecuencia relativa por unidad 1 del área					
Cuadrícula	16	17	18	19	20
Frecuencia relativa por unidad 1 del área					

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

b. Ahora se consideran las primeras 200 gotas que han caído en el techo registradas en cuadrículas cuyo tamaño es la mitad de la unidad anterior. Determinan las frecuencias relativas por unidad del área de las cuadrículas (unidad $\frac{1}{2}$). Completan la siguiente tabla 2.

Tabla 2

Cuadrícula	1	2	3	4	5
Frecuencia relativa por unidad $\frac{1}{2}$ del área	$\frac{4}{200} : \frac{1}{2}$ =0,04	0,05			
Cuadrícula	6	7	8	9	10
Frecuencia relativa por unidad $\frac{1}{2}$ del área					
Cuadrícula	11	12	13	14	15
Frecuencia relativa por unidad $\frac{1}{2}$ del área					
Cuadrícula	16	17	18	19	20
Frecuencia relativa por unidad $\frac{1}{2}$ del área					
Cuadrícula	21	22	23	24	25
Frecuencia relativa por unidad $\frac{1}{2}$ del área					
Cuadrícula	26	27	28	29	30
Frecuencia relativa por unidad $\frac{1}{2}$ del área					
Cuadrícula	31	32	33	34	35
Frecuencia relativa por unidad $\frac{1}{2}$ del área					
Cuadrícula	36	37	38	39	40
Frecuencia relativa por unidad $\frac{1}{2}$ del área					

c. El gráfico 1 permite analizar los datos de las frecuencias relativas de las primeras 20 gotas de lluvia, que en este caso particular, corresponde a la probabilidad por unidad del área de las cuadrículas. Interpretan el gráfico.

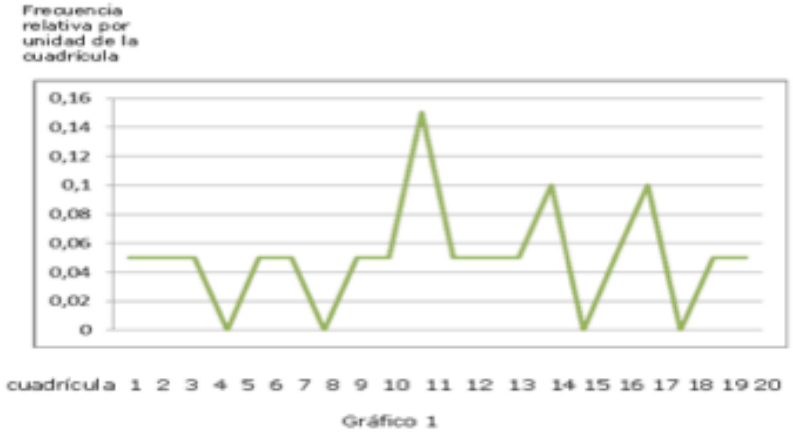


Gráfico 1

d. Comparan la figura 1 con el gráfico 1 e interpretan los valores 0. y 0,14 según el contexto del problema.

e. ¿Qué cambio experimentará el gráfico 1 si es elaborado en base de la figura 2 y con los datos de la tabla 2? Razonan y explican la respuesta.

Versión en Proceso de Edición y Diseño por el CNED

f. Elaboran mediante el software EXCEL el gráfico de líneas que representa la figura 2 y la tabla 2. Verifican la respuesta de la actividad e).
g. En vez de registrar las frecuencias relativas, se considera una variable aleatoria X que represente la caída de las gotas en el techo ¿En qué término se convierte la frecuencia relativa por unidad de la cuadrícula? Razonan y explican la respuesta. Observación al docente
h. Si se aumentaría infinitamente la cantidad de las gotas y a la vez disminuyendo infinitamente el área en la cual se registrarían las gotas de lluvia, ¿qué forma tomaría el gráfico de líneas? Explican la respuesta.

4. En un paradero pasan buses cada 20 minutos. Se registra el tiempo de espera de una persona que llega al paradero y aguarda el siguiente bus.

a. Conjeturan que la probabilidad del tiempo de espera en un intervalo es igual a:

$$P(a < X < b) = (b - a) \cdot \frac{1}{20}$$

b. Relacionan la determinación del área de un rectángulo de lados (b-a) y 1/20, con el cálculo de la probabilidad del tiempo de espera en el intervalo [a, b].

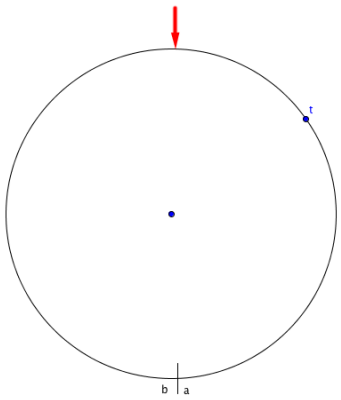
c. Grafican y conjeturan que la probabilidad de la variable tiempo de espera corresponde al área bajo la curva y=1/20.

Observación a la o el docente: Los estudiantes deben llegar a comprender que el área bajo la función de densidad de una variable aleatoria continua corresponde a la probabilidad de la variable. Para esto es necesario que los estudiantes identifiquen la función de distribución de probabilidad, determinen la función de densidad media en el intervalo [a,b]:

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a},$$

y la relacionen con la función de densidad.

5. Actividad 3. Sea un disco graduado entre dos valores a y b, tal que a<b, que se hace girar en presencia de una pestaña que permanece inmóvil.



a. Conjeturan que la probabilidad de que al parar el disco, la pestaña marque un valor entre a y un valor t es igual a

$$P(x \leq t) = \frac{t - a}{b - a}$$

b. Comparan la probabilidad dada en a. con la Función de Distribución de la probabilidad

$$F(x \leq t) = \frac{t - a}{b - a}, \forall\, a \leq t \leq b.$$

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

c. Calculan la función de densidad media y conjeturan que la función de densidad es igual a

$$f(t) = \frac{1}{b-a}, \forall\, a \leq t \leq b.$$

Ejemplo de evaluación

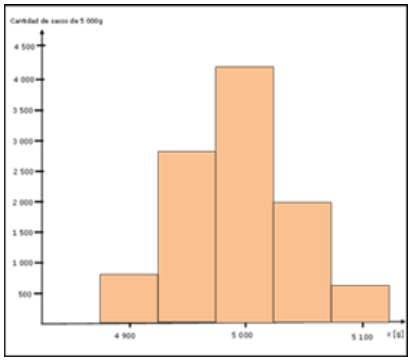
Aprendizaje Esperado
AE 2 Interpretar el concepto de una variable aleatoria continua.

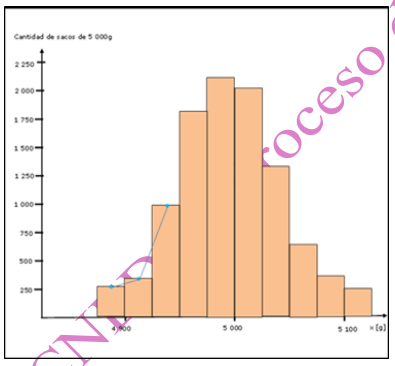
Indicadores de Evaluación Sugeridos

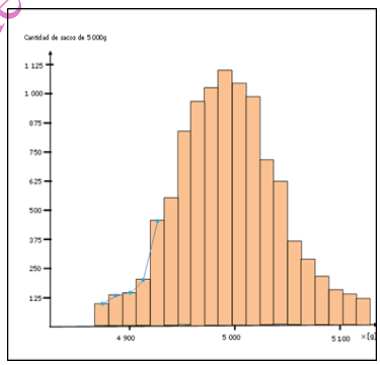
- Determinan en ejemplos concretos si una variable aleatoria es discreta o continua.
- Analizan en gráficos o tablas empíricas las distribuciones de frecuencias relativas de datos estadísticos como peso, estatura, edad, presión sanguínea, etc.

Actividad propuesta

4. En una fábrica de alimentos de perros, una máquina de empaque está programada para llenar sacos de 5 000g. Los gráficos muestran la cantidad de sacos según el contenido que varía alrededor de 5 000g.







a. Estiman mediante los datos del primer gráfico las frecuencias relativas de los contenidos para los intervalos de la amplitud 1 (correspondiente a 50g).]4 875, 4 925],]4 925, 4 975],]4 975, 5 025],]5 025, 5075] y]5 075; 5 125].

b. En el segundo gráfico se reduce la amplitud de los intervalos a $\frac{1}{2}$. y la escala en el eje vertical se reduce también a la mitad. Describen y explican los cambios que se generan en el gráfico.

c. En el tercer gráfico se reduce la amplitud de los intervalos a $\frac{1}{4}$ de la amplitud del primer gráfico y la escala del eje vertical también se reduce a un cuarto. Describen y explican los cambios que se generan en el gráfico.

d. Marcan en los tres gráficos los puntos medios de los anchos superiores de las barras y completan el gráfico de segmentos juntando los puntos medios.

e. Describen el desarrollo de los gráficos de segmentos.

f. En vez de registrar las frecuencias relativas, se considera una variable aleatoria X que representa el contenido de un saco sorteado al azar. La variable X puede tomar cualquier valor alrededor de 5 000g. ¿Qué representan las ordenadas de los puntos del gráfico que se desarrolla?

g. ¿Qué representa el área debajo el gráfico entre dos rectas X=a y X=b?

Criterios de evaluación

Se sugiere considerar los siguientes aspectos:

Versión Aprobada por el CNP Proceso de Edición y Diseño

- Leen los datos y calculan frecuencias relativas relacionadas con los intervalos del primer gráfico.
- Explican que las frecuencias relativas por amplitud del intervalo se mantienen casi estable.
- Elaboran el gráfico de segmentos según las indicaciones del ejercicio.
- Explican que con los cambios realizados los gráficos de segmentos se aproximan más y más a una curva más lisa.
- Explican que las ordenadas de los puntos del gráfico que se desarrolla representan la densidad de probabilidad con la cual se puede determinar las probabilidades relacionadas con intervalos.
- Mencionan que el área debajo de la curva entre las rectas X=a y X=b representa la probabilidad relacionada con el intervalo respectivo.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

Unidad 4
Datos y Azar II

Propósito

En esta unidad los estudiantes verifican gráficamente el proceso del desarrollo de una distribución binomial a una distribución normal. Este desarrollo incluye la comprensión de la aproximación de un área bajo la curva, entre el eje **x** y dos segmentos paralelos al eje **y**, que significa un procedimiento preliminar al desarrollo de "la integral definida" de una función que es parte de estudios de la enseñanza superior.

Aplican la distribución normal para modelar situaciones de la vida diaria o de ciencias. Reconocen en forma intuitiva la validez del "teorema central del límite" y emplean estimaciones de medias poblacionales mediante la construcción de intervalos de confianza aumentando el tamaño de las muestras extraídas. Deciden a nivel escolar entre modelos probabilísticos para resolver problemas estadísticos que significa un procedimiento de alta importancia en los estudios superiores y en la vida profesional.

Conocimientos previos

- Distribución binomial
- Valor esperado
- Varianza
- Desviación estándar
- Variable aleatoria continua
- Distribución de probabilidad de una variable aleatoria
- Función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria

Palabras claves

"Campana de Gauss" – distribución normal – valor esperado – desviación estándar - función Φ de distribución acumulada - media poblacional – media muestral – intervalos de confianza

Conocimientos

Distribución normal
Función Φ de distribución acumulada
Estimación de medias poblacionales
Construcción de intervalos de confianza

Habilidades

- Analizar distribuciones de medias muestrales.
- Modelar situaciones estadísticas mediante la distribución normal.
- Conjeturar acerca de universalidad de la distribución normal.
- Resolver problemas de la vida diaria mediante herramientas estadísticas.

Actitudes

- Desarrollar el interés por conocer la realidad y utilizar el conocimiento
- Comprender y valorar la perseverancia, el rigor, el cumplimiento, la flexibilidad y la originalidad al resolver problemas matemáticos.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

Aprendizajes Esperados	Indicadores de Evaluación Sugeridos
Se espera que los estudiantes sean capaces de:	*Cuando los estudiantes han logrado este aprendizaje:*
AE 1 Aproximar a partir de histogramas de distribuciones binomiales el gráfico de la "Campana de Gauss".	• Elaboran con herramientas tecnológicas una secuencia de histogramas de distribuciones binomiales con la probabilidad **p** constante aumentando el valor **n** de las repeticiones. • Describen el efecto que tiene el aumento de **n** de las repeticiones en la forma y en la posición de los histogramas. • Estandarizan los histogramas con $\bar{\mu} = 0$; $\bar{x} = \frac{1}{\sigma} \cdot x$; $\bar{y} = \sigma \cdot y$ • Aproximan de forma intuitiva, la curva que une las cimas, resultando una campana que se llama "Campana de Gauss" estandarizada. • Reconocen la "Campana de Gauss" como gráfico de función de densidad de una variable aleatoria continua. • Determinan aproximadamente mediante la "Campana de Gauss" probabilidades sobre intervalos.
AE 2 Aplicar distribuciones normales para resolver problemas de la vida diaria.	• Verifican mediante varios ejemplos, utilizando herramientas técnicas de simulación o de cálculo, que una distribución normal se define por el valor esperado μ y la desviación estándar σ . • Reconocen el significado de la función Φ estandarizada de distribución acumulada. • Utilizan tablas de la función Φ de distribución acumulada y calculadora con funciones estadísticas para determinar probabilidades relacionadas con intervalos. • Determinan para cantidades de una muestra aleatoria de población normal su ubicación dentro de los intervalos que desvían del valor esperado μ por 1σ, 2σ y 3σ.
AE 3 Estimar la media poblacional de una distribución normal a base de niveles de confianza dados.	• Verifican en ejemplos concretos que la distribución de las medias $\bar{X}$ de una distribución normal con el valor esperado μ y la desviación estándar σ tiene los siguientes parámetros: $\bar{\mu} = \mu$ y $\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ • Sacan una muestra del tamaño **n**, determinan la media $\bar{X}$ y construyen un intervalo de confianza con un nivel de confianza dado utilizando la desviación estándar $\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. • Resuelven problemas de la vida diaria que involucran la estimación de la media $\bar{X}$ de una población.

VED en Proceso de Edición y Diseño

AE 4 Verificar mediante ejemplos concretos que la media $\bar{X}$ de muestras aleatorias del tamaño n, extraídas de una población, se distribuye aproximadamente normal, si se aumenta el tamaño de la muestra.	• Conjeturan a base de histogramas de ejemplos concretos y de forma intuitiva la validez del teorema del límite central. • Determinan para muestras aleatorias no binomiales ni normales - la media poblacional **μ** - la desviación estándar poblacional **σ** - la media de la distribución de medias aritméticas $\bar{\mu}$ - la desviación estándar de la distribución de medias aritméticas $\bar{\sigma}$ • Elaboran histogramas de la distribución de la media aritmética $\bar{X}$ de una variable aleatoria **X** aumentando el tamaño **n**. • Reconocen que los histogramas la distribución de las medias $\bar{X}$ se aproximan a una "Campana de Gauss". • Determinan a partir de **μ** y **σ** de la distribución poblacional junto con el tamaño **n** de la muestra de las medias $\bar{X}$ los parámetros de la distribución normal con la cual se aproxima la distribución poblacional.
AE 5 Modelar situaciones de la vida diaria o de ciencias con distribuciones aleatorias como la distribución binomial o la distribución normal.	• Utilizan la distribución normal como modelo para distribuciones que se componen en forma aditiva de numerosos eventos aleatorios. • Conjeturan a base de la naturaleza de una situación de la vida diaria o de ciencias cuál sería el modelo adecuado. • Consideran las condiciones y las restricciones para aplicar un modelo probabilístico.

Aprendizajes Esperados en relación con los OFT
• El interés por conocer la realidad y utilizar el conocimiento • Comprender y valorar la perseverancia, el rigor y el cumplimiento, la flexibilidad y la originalidad

Orientaciones didácticas para la unidad
La distribución normal es un tipo de modelamiento que permite representar, en forma aproximada, algunas distribuciones de variables aleatorias continuas. Al considerar en una población una variable continua o con un número grande de valores, ocurre a veces que la distribución es simétrica respecto a su valor medio, la mayor parte de valores se concentra alrededor de la media, y los valores tienen menor probabilidad cuanto más se alejen de la media. A partir del valor central, la distribución de valores decrece hacia los extremos hasta que la gráfica se aproxima al eje horizontal. Al mismo tiempo, las y los alumnos deben comprender que la variable aleatoria continua cuya función de densidad es la función de densidad normal se conoce como distribución normal. Reconociendo que la distribución normal permite resolver problemas estadísticos de la vida diaria o de ciencias, se sugiere contextualizar con problemas reales en distintos campos, como por ejemplo: problemas biológicos de distribución de la tallas, pesos y otras medidas físicas de un conjunto

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

numeroso de personas de una determinada edad; datos psicológicos de tiempo de reacción, puntuaciones en un examen o test, amplitud de percepción; problemas físicos de distribución de los errores de observación o medida que aparecen en los estudios acerca de fenómenos meteorológicos, físicos, astronómicos, etc. ; datos económicos de fluctuaciones de precios; y problemas técnicos de distribución de las medidas de piezas manufacturadas, etc.

En el caso de distribuciones normales o no normales, es necesario mostrar concretamente que se pueden estimar parámetros de distribuciones como la media y la desviación estándar, construyendo intervalos de confianza según los niveles de confianza requeridos. Aparte de aplicar modelos binomiales o normales dados, se sugiere que los alumnos elijan entre los modelos propuestos, que conjeturen acerca de la validez o de las restricciones de ellos para resolver un problema dado. Al mismo tiempo, se sugiere que las y los alumnos puedan analizar o inferir las propiedades de la distribución normal estándar: el área total bajo la curva normal es igual a 1; la distribución tiene forma de campana y es simétrica; la distribución tiene una media igual a 0 y una desviación estándar igual a 1, entre otras.

Al igual que en la unidad 3, se aconseja ir monitoreando el logro de los aprendizajes a medida que avanza la unidad 4 y no solamente al final de ella. De este modo, el docente sabrá si las y los alumnos comprenden y aplican los conceptos y procedimientos al resolver problemas de distribución normal, medias poblacionales e intervalos de confianza. Dado el contexto anterior, el docente podrá obtener evidencia de aprendizaje de los distintos niveles de desempeño y diseñar procesos de retroalimentación para las diferentes dificultades o errores conceptuales/procedimentales propios de los contenidos a trabajar en esta unidad.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

Ejemplos de Actividades

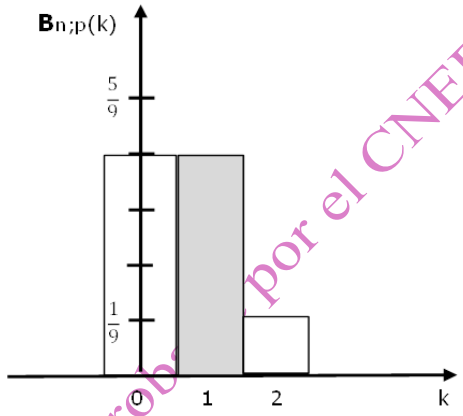
Los ejemplos de actividades presentados a continuación, son sugerencias que pueden ser seleccionadas y /o adaptadas por la y el docente para su desarrollo, de acuerdo a su contexto escolar.

AE 1
Aproximar a partir de histogramas de distribuciones binomiales el gráfico de la "Campana de Gauss".

Observación a la o el docente: En las siguientes actividades se pueden utilizar herramientas tecnológicas de cálculo para determinar las probabilidades **B**n;p(k) = $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ de distribuciones binomiales con **n**, **k** y **p** dado. En el símbolo **B**n;k la **B** representa el término Binomial, la **n** las repeticiones del experimento Bernoulli y la **k** la probabilidad de éxito. Con cualquier buscador en el internet se pueden encontrar sitios que ofrecen gratuitamente la utilización de calculadores o simuladores, como por ejemplo: www.ugr.es/~jsalinas/herramar.htm , www.virtual.uptc.edu.co , www.es.easycalculation.com/statistics/binomial-distribution.php , www.edumat.net , www.matematicasvisuales.com/html/probabilidad/varaleat/binomial.html , etc. También se puede aplicar los programas EXCEL, WINSTATS o GEOGEBRA con los "macros" estadísticos.

En continuación se muestra el **proceso de la estandarización** de una distribución binomial **B**n;p(k) = $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ con los valores de **n** = 2, **p** = $\frac{1}{3}$ y **k** = 0, 1, 2 representada por la tabla y el histograma respectivo.

k	0	1	2
Bn;p(k)	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$



Valor esperado: $\mu = n \cdot p = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Desviación estándar: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$

Con el número **n** creciente los histogramas de una distribución binomial se desplazan hacia la derecha y las alturas de la cimas se reducen. Para revertir estos cambios se realizan las siguientes transformaciones:

- Traslación del histograma por el valor esperado **μ** hacia el origen del sistema de coordenadas.
- Reducción de los anchos de las barras por el factor $\frac{1}{\sigma}$.
- Estrechamiento de las alturas de las barras por el factor **σ**.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

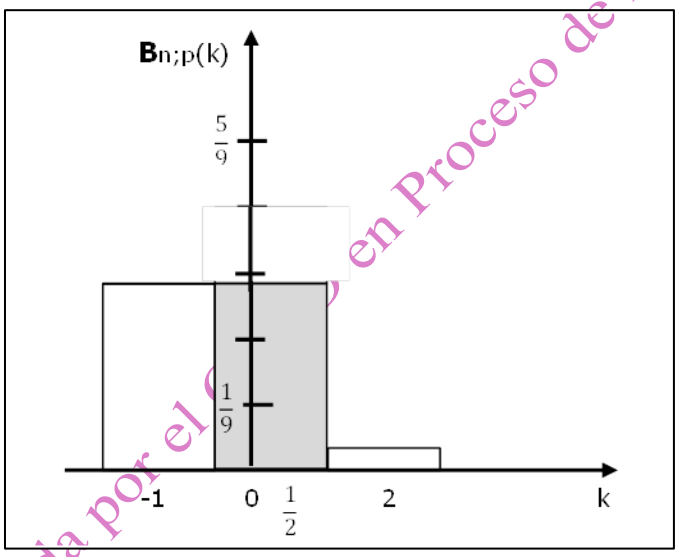
Con estos cambios resulta una variable aleatoria estandarizada **T** = $\frac{x-\mu}{\sigma}$.

Tabla de valores de la variable aleatoria estandarizada:

x	T
0	-1
1	$\frac{1}{2}$
2	2

Ancho	Ancho nuevo	Altura	Altura nueva d
1	$1:\frac{2}{3} = 1{,}5$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{27}$
1	$1:\frac{2}{3} = 1{,}5$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{27}$
1	$1:\frac{2}{3} = 1{,}5$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{27}$

Histograma estandarizado:



1. En un experimento del tipo "Bernoulli" la probabilidad de éxito es de p = $\frac{1}{3}$. Se lo repite **n** veces.

   a. Calculan para **n** = 8 los valores de **B**n;k = $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, utilizando una tabla de distribución binomial o la calculadora. Completan la tabla de abajo y elaboran en un sistema de coordenadas el histograma de la distribución binomial.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Bn;p(k)	0,0390								

   b. Determinan el valor esperado μ y la desviación estándarσ.

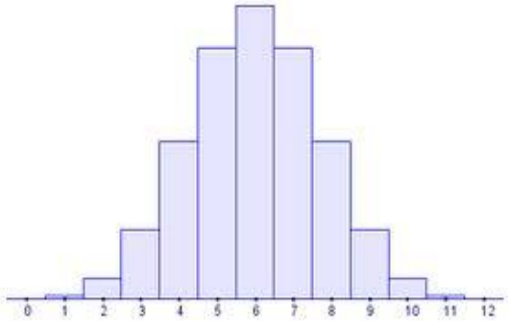
Versión Aprobada por el Comité en Proceso de Edición y Diseño

c. Estandarizan el histograma mediante las siguientes transformaciones.
   - Traslación del histograma por el valor esperado μ hacia el origen del sistema de coordenadas.
   - Reducción de los anchos de las barras por el factor $\frac{1}{\sigma}$.
   - Estrechar las alturas de las barras por el factor σ.

d. Determinan mediante el histograma las probabilidades representadas por las tres barras centrales.

2. Elaboran una secuencia de histogramas de distribuciones binomiales con herramientas tecnológicas de cálculo EXCEL, GEOGEBRA, WINSTATS o un simulador disponible gratuitamente en el siguiente link: www.matematicasvisuales.com/html/probabilidad/varaleat/binomial.html

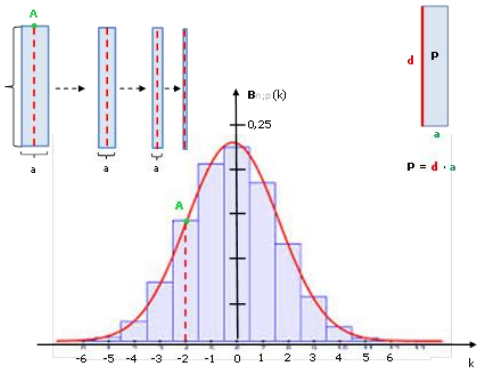
   a. Realizan simulaciones de histogramas del valor p = 0,5 y aumentan el número de repeticiones de n = 5, 10, 15 y 20.
   b. Describen el cambio que se genera en los histogramas si se aumenta el número **n**.
   c. Imprimen los histogramas estandarizados y dibujan en forma intuitiva la curva que representa la función de densidad de probabilidad.
   d. Realizan mediante el simulador la aproximación de los histogramas y la comparan con el dibujo intuitivo.



Observación a la o el docente: Para un mejor entendimiento del concepto de densidad de probabilidad se puede utilizar la metáfora de la densidad de masa: Si en un cuerpo la densidad de masa es alta, tiene en un volumen de referencia una cantidad grande de masa. Sabiendo la densidad **d**, la masa **m** se puede calcular mediante el producto con el volumen **V**. Este producto es representable por el área de un rectángulo.

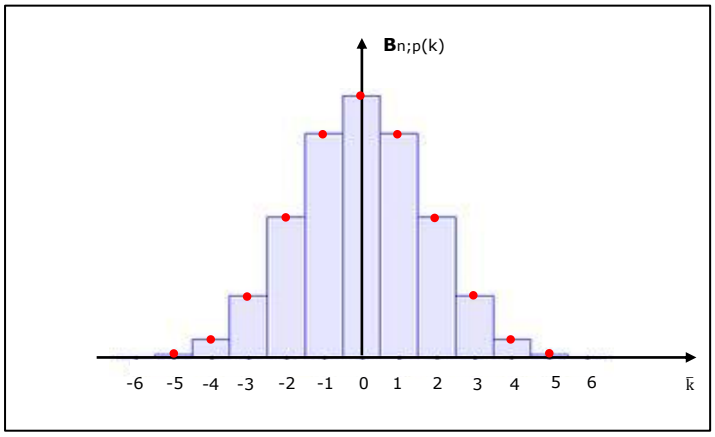
m = **d** · **V**

En histogramas de distribuciones de probabilidad como de la distribución binomial, la probabilidad relacionada con intervalos también se representa mediante un área que es el área de la barra sobre el intervalo respectivo. La altura de la barra representa densidad de la probabilidad **d** en referencia al ancho **a** del intervalo. Como en la metáfora de la densidad de una masa, se calcula la probabilidad sobre el intervalo mediante el producto de **P** = **d** · **a**. En el proceso de aproximación del histograma por una curva se disminuye el ancho de las barras y la altura de la barra se convierte en la ordenada del punto A que pertenece a la curva de aproximación "Campana de Gauss"



Versión Aprobada por el CNED en Pro y Diseño

3. El dibujo de abajo representa el histograma estandarizado de una distribución binomial con **n** = 10 y **p**= 0,5.



a. Determinan el valor esperado **μ** y la desviación estándar **σ** de la distribución binomial.
b. Transforman los valores estandarizados de $\bar{k}$ = -5; -4; … ; 4; 5 en los valores de **k**. antes de la estandarización. Completan la tabla.

$\bar{k}$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
k											

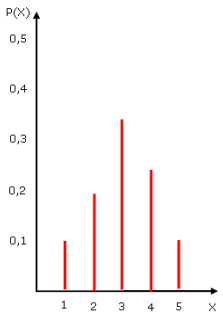
c. Determinan mediante una tabla o mediante una calculadora los valores de **B**n; k. Completan la tabla.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Bn;k											

d. Los anchos de los intervalos tienen el valor a = 1. Calculan la suma de todas las probabilidades representadas por las barras del histograma.
e. Dibujan en forma intuitiva la curva que une los puntos rojos marcados en el histograma.
f. Conjeturan acerca del contenido del área debajo la curva de aproximación. Explican y comunican la conjetura.

Observación a la o el docente: Para representar distribuciones de variables aleatorias se recomienda un "gráfico con barras delgadas" que es parecido a histogramas, en el cual la barra se reduce a un segmento paralelo al eje de P(X). Ejemplo**:**

X	1	2	3	4	5
P(X)	0,1	0,2	0,35	0,25	0,1



Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

AE2
Aplicar distribuciones normales para resolver problemas de la vida diaria.

1. Utilizan un programa gratuito de simulación de distribuciones normales disponible en el internet, como por ejemplo http://tube.geogebra.org/student/mdggPNtOL para verificar los cambios que se generan si se varían los parámetros de μ y σ.
   a. Representan la distribución normal de referencia con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.
   b. Manteniendo la desviación estándar varían el valor esperado en el intervalo [-2; 2]. Describen y comentan el cambio del gráfico.
   c. Manteniendo el valor esperado de $\mu = 0$ varían la desviación estándar σ. Describen y comentan el cambio del gráfico.
   d. Manteniendo el valor esperado de $\mu = 0$ y la desviación estándar $\sigma = 1$ determinan las probabilidades $P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma)$; $P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma)$; $P(\mu-3\sigma \leq X \leq \mu+3\sigma)$ y las expresan en porcentajes.
   e. Repiten la actividad d con el mismo valor esperado de $\mu = 0$ y otra desviación estándar, por ejemplo $\sigma = 0{,}5$. Comparan y comentan el resultado en comparación con el resultado anterior.

2. En una granja avícola se producen huevos de calidad con el sello de "producto biológico". El peso de los huevos se distribuye según una distribución normal con el valor esperado de $\mu = 56$g y la desviación estándar de $\sigma = 8$. Se calcula la ganancia por huevo según las siguientes clases de peso.

Peso en g	<40	[40;45[	[45;50[	[50;55[	[55;60[	≥60
Ganancia en $	-10	20	30	50	70	80

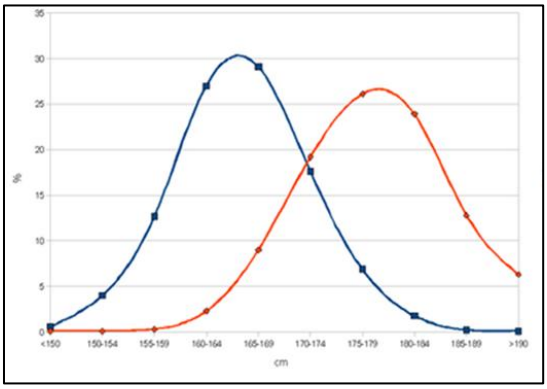
   a. Determinan mediante la tabla de la función Φ de distribución acumulada o con herramientas tecnológicas las probabilidades que corresponden a las clases de peso.
   b. Calculan la ganancia esperada por huevo.

3. Se quiere modelar una prueba SIMCE mediante una distribución normal con el valor esperado de $\mu = 250$ puntos y la desviación estándar $\sigma = 50$ puntos. Se elige un alumno al azar.

   a. ¿Cuán probable es que el alumno obtenga un puntaje inferior a 200 puntos?
   b. ¿Cuán probable es que el alumno obtenga un puntaje superior a 350 puntos?
   c. Determinan la probabilidad de que el rendimiento del alumno pertenece al intervalo de $[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$

4. Según el gráfico de abajo se puede considerar que la estatura de una población se distribuye según una distribución normal. En un país, como se representa en el dibujo de abajo, la estatura media de los hombres entre 18 y 20 años se estima en 180cm con una desviación estándar de 7,4cm. Los datos corresponden a la curva roja.

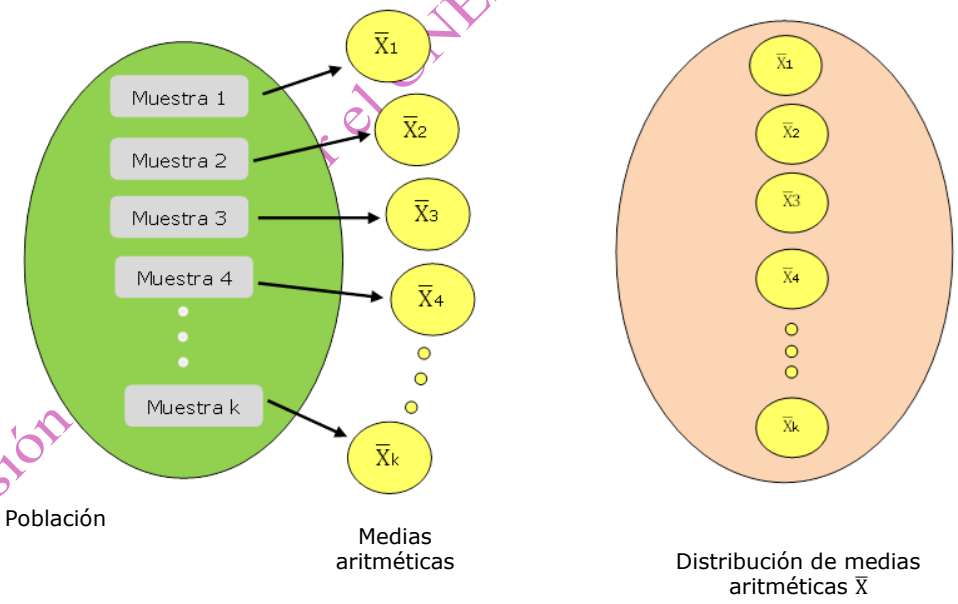
Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño



a. Conjeturan acerca del tipo de distribución y acerca de la confiabilidad de le estatura media de 180cm mencionada en el texto.
b. ¿Con qué probabilidad un hombre, elegido al azar, tiene una altura mayor de 185 cm?
c. ¿Con qué probabilidad un hombre, elegido al azar, tiene una altura entre 170cm y 180cm?
d. En que intervalo simétrico a la estatura media se ubican las estaturas de 50% de todos los hombres.
e. ¿Qué estatura mínima debe tener un hombre para que pertenezca al grupo de 5% de los hombres con máxima estatura?

AE 3
Estimar la media poblacional de una distribución normal sobre la base de niveles de confianza dados.

Observación a la o el docente: Se recomienda representar la distribución muestral de medias aritméticas mediante una representación esquemática como se muestra en el siguiente dibujo.



Versión del CNED en Proceso de Edición y Diseño

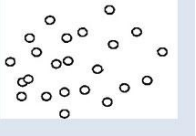
Observación a la o el docente: Para la elaboración de un intervalo de confianza se puede utilizar la siguiente tabla cuyos valores se calcularon con la tabla de la función Φ estandarizada de distribución normal acumulada.

Nivel de confianza de la estimación de la media en %	Factor k de confianza para construir los límites del intervalo	Límites del intervalo de confianza
90%	1,645	$\bar{X} \pm 1{,}645 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
95%	1,960	$\bar{X} \pm 1{,}960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
99%	2,576	$\bar{X} \pm 2{,}576 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

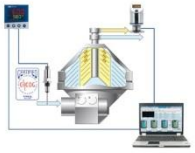
Para otros niveles de confianza hay que determinar los factores de confianza mediante la tabla de la función Φ estandarizada de distribución normal acumulada.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

1. En un instituto de control de nutrición se determina el porcentaje de grasa en la leche. Según los datos del productor se puede contar con una desviación estándar de σ = 1,5%. De la producción se sacó al azar una muestra de 25 cajas y cuyo porcentaje de por medio $\bar{X}$ de grasa se calculó en 12,5%. Se considera que la producción de leche se distribuya aproximadamente mediante una distribución normal.



   a. Elaboran con un nivel de confianza de 90% un intervalo de confianza alrededor de la media de la muestra $\bar{X}$ que incluye el verdadero valor esperado μ de la producción.
   b. Conjeturan acerca del intervalo de confianza de la estimación si se aumenta el tamaño de la prueba manteniendo el nivel de confianza.



2. Una empresa producía resistencias eléctricas de 200Ω con una desviación estándar de 10Ω. Se cambia la máquina de producción y se sabe que se puede contar con una distribución normal y una desviación estándar nueva de σ = 5Ω. Para estimar el verdadero valor esperado μ de la producción se toma una muestra del tamaño 100 cuya media $\bar{X}$ se determinó en 202Ω.

   a. Elaboran con los datos de la muestra el intervalo de confianza de un nivel de 95% de confianza que incluye el verdadero valor esperado μ de la producción.
   b. Conjeturan acerca del ancho del intervalo si se aumenta o si se baja el nivel de confianza.

3. Una población se distribuye según una distribución normal con una desviación estándar σ = 120. Para elaborar intervalos de confianza alrededor de una estimación de la media $\bar{X}$ que incluyen con un nivel de confianza de 95% el verdadero valor esperado μ, se sacan muestras de los tamaños **n** = 4, 9, 16, 25, 36, 64, 100 y 144.

   a. Determinan los anchos de los intervalos de confianza en dependencia del tamaño n. Redondean a la décima y completan la tabla.

Tamaño n	4	9	16	25	36	64	100	144
Ancho d(n)	235,2							

b. Elaboran el gráfico d(n) que representa el ancho del intervalo **d** en dependencia del tamaño **n** de la muestra.
c. Determinan aproximadamente mediante el gráfico el tamaño mínimo de una muestra si el intervalo debe tener un ancho máximo de 60.

AE4
Verificar mediante ejemplos concretos que la media $\overline{X}$ de muestras aleatorias del tamaño n, extraídas de una población, se distribuye aproximadamente normal, si se aumenta el tamaño de la muestra.

1. Se lanzan a la vez un dado, dos dados, tres dados, etc. y se anota la suma de los números caídos. En el caso de un solo lanzamiento se considera el número caído también como una suma.

   a. Determinan todas las sumas posibles y los eventos que llevan a las sumas. Completan las tablas.

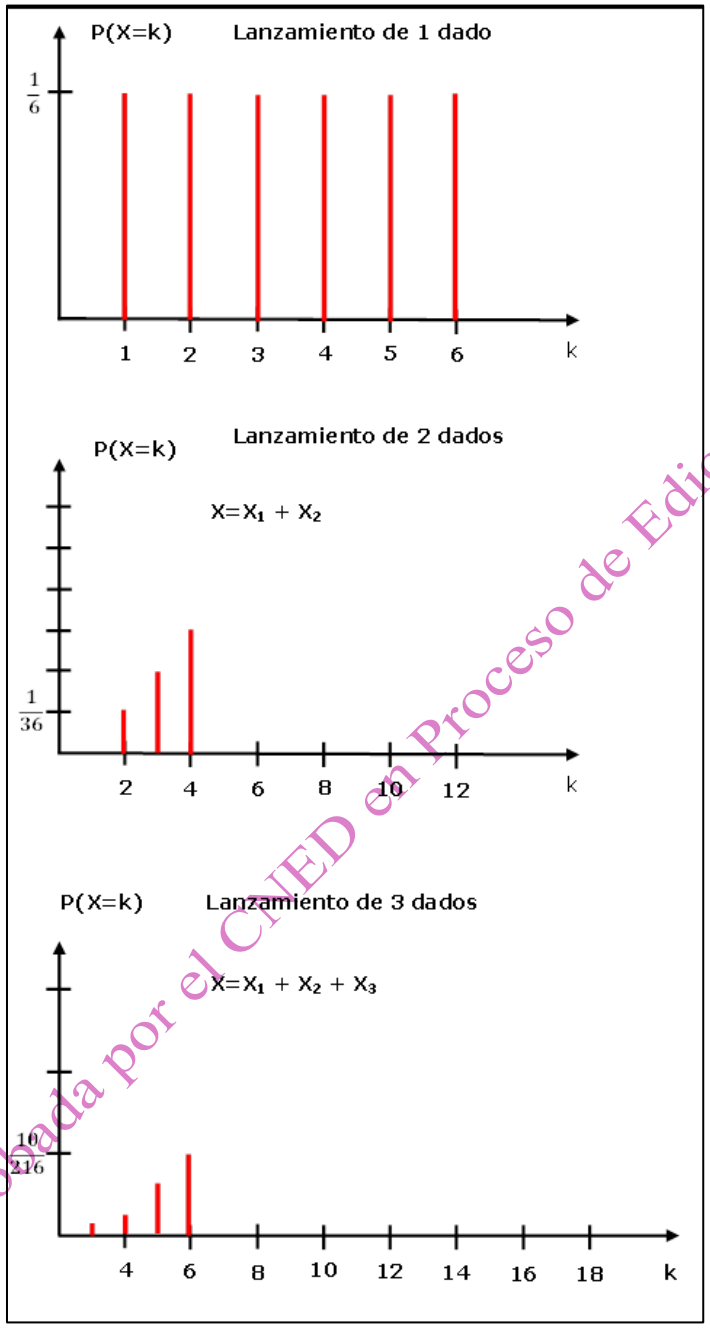
n=1 Suma k	1	2	3	4	5	6
frecuencia	1	1	1	1	1	1
P(X=k)	$\frac{1}{6}$					

n=2 Suma k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
frecuencia											
P(X=k)											

n=3 Suma k	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
frecuencia																
P(X=k)																

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

b. Elaboran los gráficos P(X=k) de los sumas k obtenidos. Completan los histogramas.



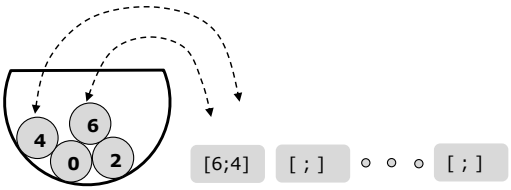
c. Conjeturan acerca de la forma de los histogramas si se aumenta el número de los dados lanzados.

d. Determinan para n = 1, 2, 3 los valores esperados μ y las desviaciones estándar σ y grafican la distribución normal correspondiente utilizando un software de simulación como EXCEL, WINSTATS, GEOGEBRA o un programa disponible en el internet como www.matematicasvisuales.com/html/probabilidad/varaleat/binomial.html

e. Comparan los histogramas con el gráfico de la distribución normal.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

2. En una urna hay cuatro bolitas numeradas con 0, 2, 4 y 6. Se sacan al azar con reposición pares ordenados de números.



a. Determinan la media μ y la desviación estándar σ de la población 0, 2, 4, 6.
b. Elaboran sistemáticamente el espacio muestral de los pares ordenados.
c. Determinan las medias aritméticas $\bar{X}$ de los pares ordenados.
d. Elaboran la distribución de frecuencias absolutas de las medias aritméticas $\bar{X}$. Completan la tabla.

Media aritmética	0	1	2	3	4	5	6
Frecuencia f							

e. Elaboran el gráfico de la distribución de las frecuencias mediante un histograma o con un "gráfico de barras delgadas".
f. Determinan la media $\bar{\mu}$ y la comparan con la media μ de la población.
g. Determinan la desviación estándar $\bar{\sigma}$ de la muestra y verifican la igualdad $\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

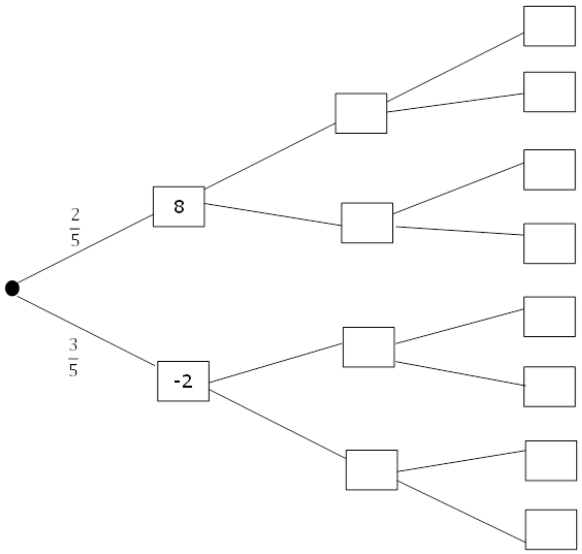
3. Un experimento aleatorio tiene una variable aleatoria representada en la siguiente tabla.

x	-2	8
P(X=X)	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

a. Determinan el valor esperado **μ**, la varianza **σ^2** y la desviación estándar **σ**.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

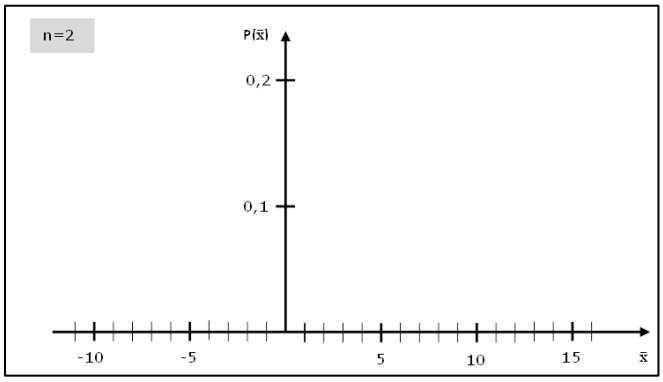
b. En lo siguiente se considera la suma S resultando de **n** repeticiones independientes del experimento $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. La media se define con $\bar{X} = \frac{S}{n}$. Completan y rotulan el árbol de probabilidades para n = 3.



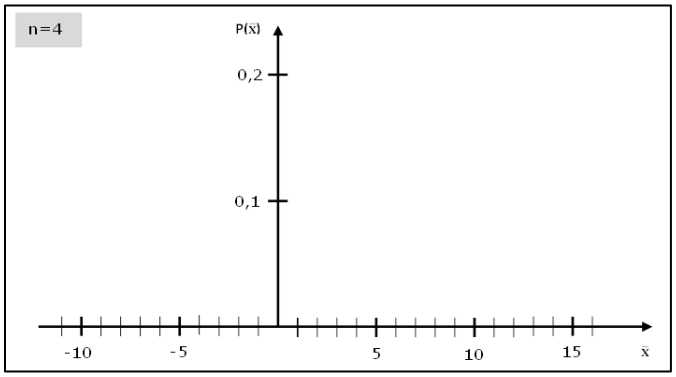
c. Determinan para **n** = 2, 4, 6 y 8 repeticiones el valor esperado **μ**, la varianza $\boldsymbol{\sigma^2}$ y la desviación estándar **σ** de las medias muestrales representadas por la variable aleatoria $\bar{X}$. Completan la tabla.

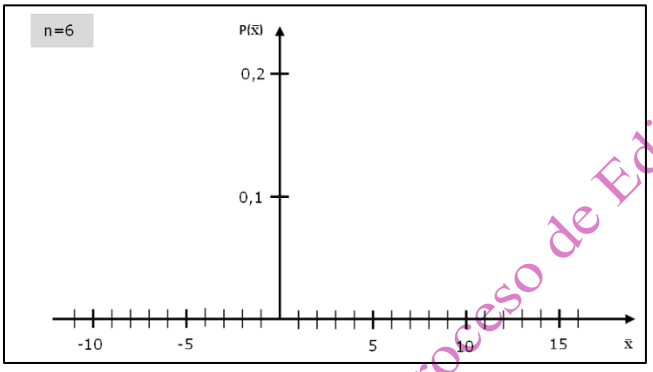
Repeticiones **n**	2	4	6	8
Valor esperado **μ**				
Varianza $\boldsymbol{\sigma^2}$				
Desviación estándar **σ**				

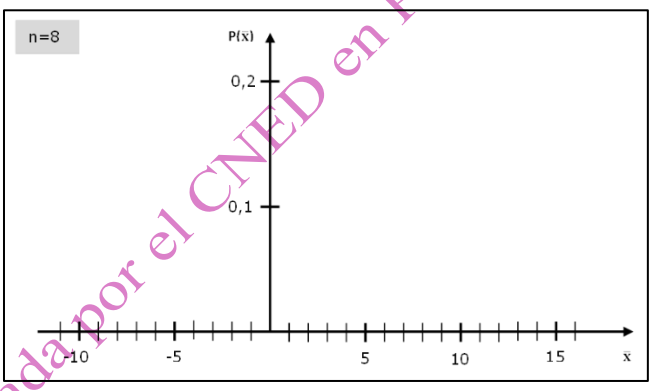
d. Elaboran para **n** = 2, 4, 6 y 8 repeticiones los histogramas de la distribución de las medias muestrales representadas por la variable aleatoria $\bar{X}$.



Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

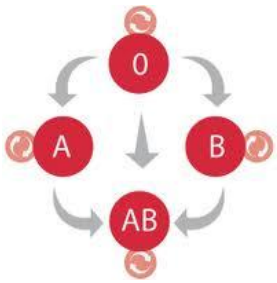






AE 5
Modelar situaciones de la vida diaria o de ciencias con distribuciones aleatorias como la distribución binomial o la distribución normal.

1. La probabilidad de ser portador del grupo sanguíneo B es de aproximadamente 10%. Se hizo un llamado a donar sangre. En un centro de donación de sangre se registran los grupos sanguíneos de los donadores.
   a. Conjeturan acerca de las condiciones para que la situación puede ser modelado mediante un experimento aleatorio.
   b. Se registra el grupo sanguíneo de los donadores. Mencionan las condiciones para modelar el registro de los grupos sanguíneos con una distribución binomial.



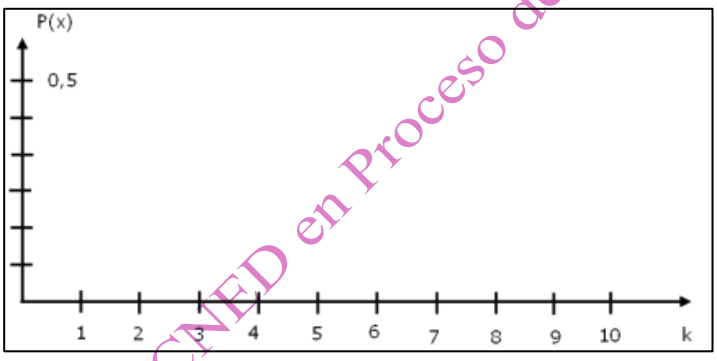
Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

c. ¿Cuántos grupos sanguíneos se debe por lo menos registrar para tener con una probabilidad de por menos 90% un registro de sangre del grupo B? Utilizan una tabla de las probabilidades binomiales acumuladas.

2. En la neonatología de una clínica se registró durante el período de un año que el 20% de los recién nacidos tiene un peso natal de 2 500g. Del registro de los nacimientos se sacaron al azar **n**=10 protocolos de nacimiento. Se quiere definir una variable aleatoria X que representa la cantidad de protocolos de la muestra de recién nacidos que tienen menos de 2 500g de peso natal.
   a. Conjeturan si la variable aleatoria X es continua o discreta.
   b. ¿Con qué distribución de probabilidad se puede modelar la situación? Razonan y comunican la respuesta.
   c. Calculan las probabilidades y las redondean a la milésima. Completan la siguiente tabla utilizando tablas o herramientas tecnológicas.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X=k)											

   d. Elaboran un gráfico de barras delgadas que representa la distribución.



   e. Determinan el valor esperado μ de una variable aleatoria binomial con n =10 y p=0,2.
   f. ¿Con qué probabilidad ocurre el evento que corresponde a μ en la muestra de 10 registros?
   g. Se rechaza una teoría si el evento observado ocurre con una probabilidad menor o igual de p=0,05. Conjeturan acerca de la confiabilidad de la frecuencia relativa de p=20% basada en la observación.

3. Se considera que la "duración de vida" de un motor de un auto de una cierta marca se distribuya mediante una distribución normal con un valor esperado μ=105 000km y una desviación estándar σ = 10 000km.

   a. Determinan el porcentaje de los motores que tienen una "duración de vida" mayor de 120 000km.
   b. ¿Cuál es el porcentaje de los motores cuya "duración de vida" se desvía por más de 12 000km del valor esperado?
   c. ¿Se puede calcular que un motor tiene una "duración de vida" de 100 000km? Razonan y explican la respuesta.
   d. Determinan el intervalo de kilometraje al cual pertenece aproximadamente 95% de la "duración de vida" los motores.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

Ejemplo de evaluación

Aprendizaje Esperado
AE 2 Aplicar distribuciones normales para resolver problemas de la vida diaria.

Indicadores de Evaluación Sugeridos

- Verifican mediante varios ejemplos, utilizando herramientas técnicas de simulación o de cálculo que una distribución normal se define por el valor esperado μ y la desviación estándar σ.
- Reconocen el significado de la función Φ estandarizada de distribución acumulada.
- Utilizan tablas de la función Φ de distribución acumulada para determinar probabilidades relacionadas con intervalos.
- Determinan para cantidades de una muestra aleatoria de población normal su ubicación dentro de los intervalos que desvían del valor esperado μ por 1σ, 2σ y 3σ.

Actividad propuesta

En un lago hay una población de carpas que se distribuye mediante una distribución normal. A base de los resultados de investigaciones biológicas y ambientales se estima el peso de por medio en 4kg con una desviación estándar de 1,25kg.

a. Determinan la probabilidad de pescar una carpa de un peso máximo de 2,5kg.
b. Determinan la probabilidad de pescar una carpa de un peso mínimo de 5kg.
c. ¿Cuál es el porcentaje de todas las carpas que tienen un peso entre 3kg y 4,5kg?
d. ¿En qué intervalo se encuentra el 80% de todas las carpas?
e. Conjeturan acerca de la probabilidad de pescar una carpa de 3,075kg.

Criterios de evaluación

Se sugiere considerar los siguientes aspectos:

- Interpretan el proceso de pescar una carpa como experimento aleatorio y utilizan las tablas de probabilidad de la función Φ estandarizada de distribución acumulada.
- Determinan correctamente y con un redondeo adecuado los porcentajes relacionados con los intervalos.
- Determinan correctamente y con un redondeo adecuado los límites del intervalo requerido.
- Argumentan que la probabilidad del evento puntual de pescar una carpa de un peso exacto de 3,075kg es 0. Mencionan además que la variable aleatoria es continua.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía para los y las docentes

AGUILAR, A. (2009). *Álgebra*. México: Pearson Educación.

ALSINA, C., FORTUNY, J. M., BURGUÉS FLAMERICH, C. (1989). *Invitación a la didáctica de la geometría.* Madrid. Ed. Síntesis.

ARAYA S, R. y MATUS, C. (2008). *Buscando un orden para el azar.* Santiago de Chile: Universidad de Santiago de Chile.

ARTIGUE, M. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Cuidad de México: Iberoamericana.

BAEZA, O. (2008). *Funciones potencia, exponencial y logaritmo.* Proyecto Enlaces Matematica. Universidad de Santiago.

BAUM, D., KLEIN, H. (2008). *XQuadrat 6.* München: Oldenbourg.

BERLANGA, R., BOSCH, C., RIVAUD, J. (2000). *Las matemáticas, perejil de todas las salsas.* Cuidad de México: Fondo de Cultura Económica.

BESCHERER, C., JÖCKEL, S. (2011). *Denkstark 9.* Braunschweig: Westermann.

BOBADILLA A. y BILLIKE, J. (1997). *Apuntes de Cálculo I.* Santiago: Universidad de Santiago de Chile

BÖER, Heinz. (2007). *mathe live* Stuttgart: Klett.

BROUSSEAU, G. (1993). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática.* Traducción Fregona, D. Córdoba: Universidad de Córdoba.

BURGER, E. (2011). *Álgebra 1*. Estados Unidos: Holt McDougal.

CANTORAL, R. (2003) *Desarrollo del pensamiento matemático.* Cuidad de México: Trillas.

CEDILLO, T. (1997). *Calculadoras: Introducción al álgebra.* Cuidad de México: Iberoamericana.

CENTENO, J. (1995). *Números decimales.* Madrid: Síntesis.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona: Horsori.

CORBALÁN, F. (1995). *La matemática aplicada a la vida cotidiana.* Barcelona: Ed. Grao.

DE MELLO Y SOUZA, J. (Malba Tahan). (2002). *El hombre que calculaba.* Ecuador*:* Limusa.

DOLORES, C. (2007). *Matemática educativa.* Madrid, Ed. Diaz de Santos, 2007.

DOUGLAS, G. (1997). *Física. Principios con Aplicaciones. Estados Unidos:* Prentice Hall.

DUHALDE, M. y GONZÁLEZ, M. (2003). *Encuentros cercanos con la matemática.* Argentina: Aique.

ELPHICK, D., WINSTON, H. et al. (2001). 101 *Actividades para implementar los objetivos fundamentales transversales.* Santiago: Lom.

FILLOY, Eugenio. (2003). *Matemática educativa*. México: Fondo De Cultura Económica.

FORTUNY AYMEMI, Josep M. et al. (1996). *Enseñar matemáticas.* Barcelona: Grao.

FREUDIGMANN, Hans, et al. (2009). *Lambacher Schweizer:Mathematik für Gymnasien.* Stuttgart: Klett.

GARCÍA TALAVERA, G. (1998). *Heurística geométrica.* México: Limusa.

GOÑI, J. M. (coord.). (2000). *El currículo de matemática en los inicios del siglo XXI.* Barcelona: Grao.

GOVINDEN PORTUS, Lincoyán. (1998). *Introducción a la estadística.* Mc Graw Hill.

GUEDJ, Denis. (2000). *El teorema del Loro. Novela para aprender matemáticas. Madrid:* Anagrama.

HONG, T., RIDDINGTON, M. y GRIER, M. (2008). *New Mathmatics Counts.* Singapore: Marshall Cavendish Internacional.

JIMÉNEZ, MATUS, MOYA, MUÑOZ. (2009). *Unidad de Algebra y Funciones.* Santiago: Enlaces.

JOHSUA, S., DUPIN, J. (2005). *Introducción a la didáctica de las ciencias y la matemática.* Buenos Aires: Colihue.

LEHMANN, Charles. (2001). *Álgebra. Ecuador:* Limusa.

MILLER, Ch., HEEREN, V., HORNSBY, E. (1999). *Matemática: Razonamiento y Aplicaciones.* Estados Unidos: Addison Wesley Longman. Pearson.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN. (2004). *Matemática. Programa de Estudio, 3° Medio.*

MINISTERIO DE EDUCACIÓN. (2004). *Matemática. Programa de Estudio, 4° Medio.*

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

MINISTERIO DE EDUCACIÓN. (2009). *Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios, matemática.* Mayo.
MINISTERIO DE EDUCACIÓN. (2009). *Mapas de Progreso del Aprendizaje. Sector Matemática. Mapa de Progreso de Números y Operaciones.*
MINISTERIO DE EDUCACIÓN. (2009). *Mapas de Progreso del Aprendizaje. Sector Matemática. Mapa de Progreso de Álgebra.*
MINISTERIO DE EDUCACIÓN. (2009). *Mapas de Progreso del Aprendizaje. Sector Matemática. Mapa de Progreso de Geometría.*
MINISTERIO DE EDUCACIÓN. (2009). *Mapas de Progreso del Aprendizaje. Sector Matemática. Mapa de Progreso de Datos y Azar.*
MIRANDA, H., MOYA, M. (2008). *Álgebra. El poder generalizador de los símbolos.* Santiago: Universidad de Santiago.
OTEÍZA, F., ZAMORANO, L. y BAEZA, O. (2008). *La geometría de los modelos a escala. Semejanza de figuras planas.* Santiago: Universidad de Santiago.
OTEÍZA, F., ZAMORANO, L., y BAEZA, O. (2008). *La circunferencia y un par de rectas en el plano. Ángulos en el plano.* Santiago: Universidad de Santiago.
PLANAS, N. y ALSINA, Á. (2005). *Educación matemática y buenas prácticas.* Barcelona: Grao.
REVISTA UNO. (1997). *Las matemáticas en el entorno.* Barcelona: Grao.
RODRÍGUEZ, J. (1997). *Razonamiento matemático.* México: Internacional Thompson.
RODRÍGUEZ, G. y ESCALANTE, M. (2008). *Unidad función cuadrática y raíz cuadrada.* Santiago: Universidad de Santiago.
SAAVEDRA G., Eugenio. (2005). *Contenidos básicos de estadística y probabilidad. Colección Ciencias.* Santiago: Universidad de Santiago.
SADOVSKY, P. (2005). *Enseñar matemática hoy.* Argentina: Libros del Zorzal.
SANTANDER, R. (2008). *Álgebra I. Primera versión.* Santiago: Universidad de Santiago.
SCHÄTZ, U. y EISENTRAUT, F. (2009). *delta: Mathematik für Gymnasien*. Bamberg: C.C.Buchners.
SERRANO, J. M. (1997). *Aprendizaje cooperativo en matemática.* España*:* Universidad de Murcia.
SPIEGEL, M. y MOYER, R. (2006). *Álgebra superior.* México*:* Mc Graw Hill.
SULLIVAN, M. (2006). *Álgebra y trigonometría. Estados Unidos:* Pearson-Prentice Hall.
TAPIA, Ó. (2007). *Manual de Preparación PSU. Matemática.* Santiago*:* Universidad Católica.
VALENZUELA, P. H. (2006). *Fundamentos de matemática universitaria*. Estados Unidos: Pearson.
WAI-KEUNG, C. y KAM-YUK, L. (2010) *New Way: Mathmatics & Statistics.* Hong Kong: Times Publishing.

Bibliografía para los y las estudiantes

AGUILAR, A. (2008). *Matemáticas simplificadas: aritmética, álgebra, geometría analítica, cálculo diferencial, cálculo integral*. México: Pearson Educación.
ARAYA, R., MATUS, C. (2008). *Buscando un orden para el azar.* Santiago: Universidad de Santiago.
BAEZA, O. (2008). *Funciones potencia, exponencial y logaritmo.* Santiago: Universidad de Santiago.
BAUM, D. y KLEIN, H. (2008) *XQuadrat 6.* München: Oldenbourg.
BERLANGA, R., BOSCH, C., RIVAUD, J. (2000). *Las matemáticas, perejil de todas las salsas.* México: Fondo de Cultura Económica.
BESCHERER, Christine, JÖCKEL, Stefan. (2011). *Denkstark 9.* Braunschweig: Westermann.
BÖER, Heinz, et. al. (2007). *mathe live* Stuttgart: Klett.
BURGER, E. (2011). *Álgebra 1*. Estados Unidos: Holt McDougal
CANTORAL, R. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Trillas.
DE MELLO Y SOUZA, J. (Malba Tahan). (2002). *El hombre que calculaba.* Ecuador*:* Limusa.
FILLOY, E.(2003). *Matemática educativa*. México: Fondo De Cultura Económica.
FREUDIGMANN, H. (2009). *Lambacher Schweizer: Mathematik für Gymnasien.* Stuttgart: Klett.
GARCÍA, G. (1998). *Heurística geométrica.* México: Limusa.
GOVINDEN, L. (1998). *Introducción a la estadística.* Mc Graw Hill.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

HONG, T., RIDDINGTON, M. GRIER, M. (2008). *New Mathmatics Counts.* Singapore: Marshall Cavendish Internacional.
MAGNUS, H. (1997). *El Diablo de los números.* Madrid: Siruela.
MIRANDA , H. y MOYA, M. (2008). *Álgebra. El poder generalizador de los símbolos.* Santiago: Universidad de Santiago.
OTEÍZA, F., ZAMORANO, L. y BAEZA,O. (2008). *La geometría de los modelos a escala. Semejanza de figuras planas.* Santiago: Universidad de Santiago.
OTEÍZA, F., ZAMORANO, L. y BAEZA, O. (2008). *La circunferencia y un par de rectas en el plano. Ángulos en el plano.* Santiago: Universidad de Santiago.
RODRÍGUEZ, G. y ESCALANTE, M. (2008). *Unidad función cuadrática y raíz cuadrada,* Santiago: Universidad de Santiago.
SCHÄTZ, U., EISENTRAUT, F. (2009) *delta: Mathematik für Gymnasien*. Bamberg: C.C.Buchners.
WAI-KEUNG, C. y KAM-YUK, L. (2010) *New Way: Mathmatics & Statistics.* Hong Kong: Times Publishing.

Páginas y recursos digitales interactivos

Portal Educar Chile: www.educarchile.cl/Portal.Base
Universidad de UTAH. http://nlvm.usu.edu/es/nav
Proyecto Descartes, España: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/aplicaciones.php
Eduteka, Colombia: www.eduteka.org
www.ugr.es/~jsalinas/herramar.htm
www.virtual.uptc.edu.co
www.es.easycalculation.com/statistics/binomial-distribution.php
www.edumat.net
www.matematicasvisuales.com/html/probabilidad/varaleat/binomial.html
Software: EXCEL, GEOGEBRA, WINSTATS
Curva Normal, probabilidad acumulada: https://www.geogebratube.org/student/mecOwvlRd
Curva normal, dos colas, relación con espacios de confianza: http://tube.geogebra.org/student/mdqgPNtOL

(Los sitios web y enlaces sugeridos en este programa fueron revisados en agosto de 2014.)

Bibliografía CRA

A continuación se detallan publicaciones que se puede encontrar en las bibliotecas escolares CRA (Centros de Recursos para el Aprendizaje) en cada establecimiento.

BERLANGA, R., Bosch y C. y Rivaud, J. (2000). *Las matemáticas, perejil de todas las salsas. México:* Fondo de Cultura Económica.
CORBALÁN, F. (1995). *La matemática aplicada a la vida cotidiana.* Barcelona: Grao.
GALDOS, L. (1995). *Consultor matemático.* Madrid: Cultural de Ediciones.
GARDNER, M. (2007). *Los acertijos de Sam Loyd.* España: Zugarto.
GUEDJ, D. (1998). *El imperio de las cifras y los números.* Barcelona: Ediciones B.
HEBER, J.osé. (2005). *Olimpíadas matemáticas: el arte de resolver problemas.* México: Los libros de El Nacional.
JIMENEZ, D. (2006). *Matemáticos que cambiaron al mundo.* México: Los libros de El Nacional.
NOMDEDEU, X. (2000). *Mujeres, manzanas y matemáticas, entretejidas.* Madrid: Nivola Libros.
PÉREZ-RUIZ, M. (2002). *Pitágoras. El misterio de la voz interior. Una investigación de arqueología filosófica.* Barcelona: Oceano.
SERRANO, E. (2007). i*Ojalá no hubiera números!* Madrid: Nivola Libros.
TAHAN, M. (2006). *Matemática curiosa y divertida.* Buenos Aires: Pluma y Papel.
VANCLEAVE, J. (1997). *Matemáticas para niños y jóvenes.* México: Limusa.

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

ANEXOS

Anexo 1: Uso flexible de otros instrumentos curriculares

Existe un conjunto de instrumentos curriculares que los docentes pueden utilizar de manera conjunta y complementaria con el programa de estudio. Estos se pueden usar de manera flexible para apoyar el diseño e implementación de estrategias didácticas y para evaluar los aprendizajes.

Orientan sobre la progresión típica de los aprendizajes

Mapas de Progreso[7]. Ofrecen un marco global para conocer cómo progresan los aprendizajes clave a lo largo de la escolaridad

Pueden usarse, entre otras posibilidades, como un apoyo para abordar la diversidad de aprendizajes que se expresa al interior de un curso, ya que permiten:

- caracterizar los distintos niveles de aprendizaje en los que se encuentran los estudiantes de un curso
- reconocer de qué manera deben continuar progresando los aprendizajes de los grupos de estudiantes que se encuentran en estos distintos niveles

Apoyan el trabajo didáctico en el aula

Textos escolares. Desarrollan los Objetivos Fundamentales y los Contenidos Mínimos Obligatorios para apoyar el trabajo de los alumnos en el aula y fuera de ella, y les entregan explicaciones y actividades para favorecer su aprendizaje y su autoevaluación.

Los docentes también pueden enriquecer la implementación del currículum, usando los recursos entregados por el Mineduc a través de:

- los **Centros de Recursos para el Aprendizaje (CRA)** y los materiales impresos, audiovisuales, digitales y concretos que entregan
- el **Programa Enlaces** y las herramientas tecnológicas que ha puesto a disposición de los establecimientos

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

[7] En una página describen en 7 niveles el crecimiento habitual del aprendizaje de los estudiantes en un ámbito o eje del sector a lo largo de los 12 años de escolaridad obligatoria. Cada uno de estos niveles presenta una expectativa de aprendizaje correspondiente a dos años de escolaridad. Por ejemplo, el Nivel 1 corresponde al logro que se espera para la mayoría de los niños y niñas al término de 2° básico; el Nivel 2 corresponde al término de 4° básico, y así sucesivamente. El Nivel 7 describe el aprendizaje de un alumno o alumna que al egresar de la Educación Media es "sobresaliente"; es decir, va más allá de la expectativa para IV medio que describe el Nivel 6 en cada mapa.

Anexo 2: Objetivos Fundamentales por semestre y unidad

Objetivo Fundamental	Semestre 1		Semestre 2	
	Unidades:		Unidad:	
	1	2	3	4
1. Modelar situaciones o fenómenos cuyo modelo resultante sea la función potencia, inecuaciones lineales y sistemas de inecuaciones.	x			
2. Resolver problemas utilizando inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones.	x			
3. Analizar las condiciones para la existencia de la función inversa.	x			
4. Comprender que puntos, rectas y planos pueden ser representados en el sistema coordenado tridimensional y determinar la representación cartesiana y vectorial de la ecuación de la recta en el espacio.		x		
5. Determinar áreas y volúmenes de cuerpos geométricos generados por rotación o traslación de figuras planas en el espacio.		x		
6. Evaluar críticamente información estadística extraída desde medios de comunicación, tales como periódicos, artículos de revistas o desde Internet.			x	
7. Relacionar y aplicar los conceptos de función de densidad y distribución de probabilidad, para el caso de una variable aleatoria continua.			x	
8. Argumentar acerca de la confiabilidad de la estimación de la media de una población con distribución normal, a partir de datos muestrales.				x
9. Comprender que la distribución de medias muestrales de muestras aleatorias de igual tamaño extraídas de una población tiende a una distribución normal a medida que el tamaño de las muestras aumenta.				x
10. Utilizar modelos probabilísticos para representar y estudiar diversas situaciones y fenómenos en condiciones de incerteza.				x
11. Formular conjeturas, utilizar heurísticas modificando o generalizando estrategias conocidas y modelos matemáticos en la resolución de problemas referidos a situaciones o fenómenos que puedan ser descritos en forma simbólica, en condiciones de incerteza y espaciales, fomentando la actitud reflexiva y crítica en la resolución de problemas.				x

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

ANEXO 3: Contenidos Mínimos Obligatorios por semestre y unidad

Contenidos Mínimos Obligatorios	Semestre 1		Semestre 2	
	Unidades:		Unidades:	
	1	2	3	4
ÁLGEBRA				
1. Análisis de la función potencia $f(x)=ax^n$ con a y x en los reales y n entero, en situaciones que representen comparación de tasas de crecimiento aritmético y geométrico y cálculo de interés compuesto, mediante el uso de un software gráfico.	x			
2. Identificación de funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas y determinación de la función inversa cuando proceda.	x			
3. Representación de intervalos mediante lenguaje conjuntista y uso de las operaciones con conjuntos para resolver inecuaciones y sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita.	x			
4. Resolución de problemas que implican el planteamiento de inecuaciones y de sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita; representación de las soluciones usando intervalos en los reales; discusión de la existencia y pertinencia de las soluciones de acuerdo con el contexto. Representación de las situaciones usando un procesador simbólico y gráfico de expresiones algebraicas y funciones.	x			
GEOMETRÍA				
5. Deducción de la distancia entre dos puntos ubicados en un sistema de coordenadas en tres dimensiones y su aplicación al cálculo del módulo de un vector.		x		
6. Identificación y descripción de puntos, rectas y planos en el espacio; deducción de la ecuación vectorial de la recta y su relación con la ecuación cartesiana.		x		
7. Formulación y verificación, en casos particulares, de conjeturas respecto de los cuerpos geométricos generados a partir de traslaciones o rotaciones de figuras planas en el espacio.		x		
8. Resolución de problemas sobre áreas y volúmenes de cuerpos generados por rotación o traslación de figuras planas.		x		

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

DATOS Y AZAR				
9. Interpretación del concepto de variable aleatoria continua y de la función de densidad de una variable aleatoria con distribución normal.			**x**	
10. Estudio y aplicación de elementos básicos de la distribución normal, a partir de diversas situaciones en contexto tales como: mediciones de peso y estatura en adolescentes; puntajes de pruebas nacionales e internacionales; datos meteorológicos de temperatura o precipitaciones. Relación entre la distribución normal y la distribución normal estándar.			**x**	
11. Realización de conjeturas sobre el tipo de distribución al que tienden las medias muestrales; verificación mediante experimentos donde se extraen muestras aleatorias de igual tamaño de una población, mediante el uso de herramientas tecnológicas.			**x**	
12. Estimación de intervalos de confianza, para la media de una población con distribución normal y varianza conocida, a partir de una muestra y un nivel de confianza dado.			**x**	
13. Análisis crítico de las inferencias realizadas a partir de encuestas, estudios estadísticos o experimentos, usando criterios de representatividad de la muestra.				**x**
14. Descripción de los resultados de repeticiones de u experimento aleatorio, aplicando las distribuciones de probabilidad normal y binomial mediante el uso de herramientas tecnológicas.				**x**
15. Aproximación de la probabilidad binomial por la probabilidad de la normal, aplicación al cálculo de experimentos binomiales.				**x**

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

Anexo 4: Relación entre Aprendizajes Esperados, Objetivos Fundamentales (OF) y Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO)

Semestre 1:

Aprendizajes Esperados	OF	CMO
Unidad 1: Álgebra		
AE 1 Modelar situaciones o fenómenos de las ciencias naturales mediante la función potencia $f(x) = a \cdot x^z$ con $\lvert z \rvert \leq 3$	**1**	**1**
AE 2 Resolver problemas utilizando inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones lineales.	**2**	**3,4**
AE 3 Determinar la función inversa de una función dada.	**3**	**2**

Aprendizajes Esperados	OF	CMO
Unidad 2: Geometría		
AE 1 Representar e identificar puntos en un sistema tridimensional de coordenadas.	**4**	**5**
AE 2 Representar rectas y planos en el espacio mediante ecuaciones vectoriales y cartesianas.	**4**	**6**
AE 3 Determinar área y volúmenes de cuerpos geométricos generados por traslación de figuras planas en el espacio.	**5**	**7,8**
AE 4 Determinar área y volúmenes de cuerpos geométricos generados por rotación de figuras planas en el espacio.	**5**	**7,8**

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño

Semestre 2:

Aprendizajes Esperados	OF	CMO
Unidad 3: Datos y azar I		
AE 1 Evaluar críticamente información estadística extraída desde medios de comunicación, tales como periódicos, artículos de revistas o desde Internet.	**6**	**13**
AE 2 Interpretar el concepto de una variable aleatoria continua.	**7**	**9**
AE 3: Aplicar los conceptos de función de densidad y distribución de probabilidad, en el caso de una variable aleatoria continua.	**7**	**10**

Aprendizajes Esperados	OF	CMO
Unidad 4: Datos y azar II		
AE 1 Aproximar a partir de histogramas de distribuciones binomiales el gráfico de la "Campana de Gauss".	**8**	**15**
AE 2 Aplicar distribuciones normales para resolver problemas de la vida diaria.	**8**	**14**
AE 3 Estimar la media poblacional de una distribución normal sobre la base de niveles de confianza dados.	**9**	**14**
AE 4 Verificar mediante ejemplos concretos que la media $\bar{x}$ de muestras aleatorias del tamaño n, extraídas de una población, se distribuye aproximadamente normal, si se aumenta el tamaño de la muestra.	**10,11**	**11**
AE5 Modelar situaciones de la vida diaria o de ciencias con distribuciones aleatorias como la distribución binomial o la distribución normal.	**10, 11**	**12**

Versión Aprobada por el CNED en Proceso de Edición y Diseño