

LA SIMETRÍA.

Celosías y Mosaicos en Educación Secundaria.

Simetría Axial

Mueve el deslizador

5

1. La posición de la imagen está definida por A, B y A1. M es el punto medio de AB. Trazamos la mediatriz de AB y O sobre ella.
2. Diseñamos un deslizador t entre 0 y 1: $t = 0.84$ y un punto $C = A + t(B-A)$ que se desplazará entre A y B.
 $t = 0.84$
3. C1 es el punto C sobre el arco. C2 es el simétrico de C' respecto de M. C3 y C4 son los trasladados con AA1.
4. Colocamos la misma imagen sobre los puntos C1, C2, C3 y C4.
5. Utilizamos el deslizador t para mover la imagen.

GUÍA DIDÁCTICA

Autor: José Antonio Mora Sánchez

Arranque: D:\Sim\index.htm

ÍNDICE.

1. Requisitos técnicos.	1
2. Consideraciones iniciales.	2
2.1. Interactividad de las construcciones.	
2.2. Herramientas de presentación.	
2.3. El programa GeoGebra.	
2.4. Animaciones e interactividad.	
2.5. Navegación.	
2.6. Los textos.	
3. Antecedentes y justificación.	6
3.1. Mosaicos.	
3.2. Geometría y Arte.	
3.3. ¿Por qué la simetría?	
4. La simetría en el currículo de matemáticas.	9
4.1. Los objetivos de la enseñanza de las matemáticas.	
4.2. La Geometría y la Simetría en las competencias básicas.	
4.3. Los contenidos matemáticos.	
1º de ESO.	
2º de ESO.	
3º de ESO.	
4º de ESO.	
Bachillerato y Universidad.	
Contenidos comunes a toda la etapa.	
Objetivos para después de la Universidad.	
4.4. Objetivos de la Web.	
5. La enseñanza con ordenadores.	14
6. Metodología.	
6.1. Las actividades.	
6.2. Tratamiento de la diversidad del alumnado.	
6.3. Organización de la clase.	
7. Estructura y organización del trabajo.	18
7.1. Presentación.	
7.2. Movimientos.	
7.3. Celosías.	
7.4. Mosaicos.	

7.5. Complementos

8. Evaluación. 24

- 8.1. Evaluación de los contenidos.
- 8.2. Evaluación de las competencias.

9. Descripción de los códigos y técnicas utilizadas. . 26

- 9.1. Análisis de mosaicos.
- 9.2. Construcción de mosaicos.
- 9.3. Mosaicos dinámicos.
- 9.4. Otros iconos utilizados en los applets.

Anexo 1. Experimentación de los materiales.

Resultados obtenidos. 29

- a) Grupo ESTALMAT de la Comunidad Valenciana.
- b) Trabajo Monográfico de Investigación. 4º de ESO.
- c) Matemáticas en 1º y 3º de ESO en el IES San Blas.
 - La Simetría Axial.
 - La Simetría Rotacional.

1. Requisitos técnicos.

La *Simetría* es una página Web que puede ser ejecutada sin dificultad desde cualquier ordenador provisto de navegador.

Para acceder al contenido completo de estos materiales basta con acceder al fichero *D:\Sim\index.htm*

Se ha diseñado para una resolución de 1024 x 768 o superior, aunque se verá correctamente desde 800x600. Si algún applet no cabe en pantalla, se puede pasar a pantalla completa (F11).

Las páginas de *Simetría* se componen de unos ciento cincuenta applets interactivos para los que puede ser necesario actualizar la máquina virtual de java en el ordenador. La descarga es gratuita en la dirección:
<http://www.java.com/es/download/> .

Todos los applets se pueden abrir en el ordenador en el que se trabaja si se dispone del programa GeoGebra para modificar los archivos y guardarlos. Este software es libre y gratuito. Se puede descargar en la página:
<http://www.geogebra.org>.

Las guías y los formularios para la evaluación se encuentran en la carpeta *D:\Sim\Textos*

2. Consideraciones iniciales.

2.1. Interactividad de las construcciones.

En la geometría del movimiento necesitamos hacer accesibles no sólo las imágenes representadas, sino también las ideas y los conceptos involucrados. Queremos que nuestros alumnos realicen abstracciones de las ideas que les presentamos, para que lleguen a manejar con soltura conceptos, que a veces no son fáciles y requieren de suficiente experiencia previa.

Se ha intentado aprovechar las ventajas que ofrecen los programas de Geometría Dinámica, tanto en la presentación de los conceptos en movimiento, como en la posibilidad de interactuar sobre las construcciones, mediante la modificación de algunos parámetros, con el fin de crear secuencias animadas.

Todos los applets van colocados sobre una línea de puntos de color verde –para facilitar su reconocimiento–, disponen de elementos interactivos, que normalmente son deslizadores que hacen aparecer una secuencia de imágenes, y también interruptores –también llamadas casillas de control–, que presentan o hacen desaparecer ciertas zonas de la construcción cuando el usuario lo solicite. Los applets se complementan con:

- Sugerencias para la manipulación de los elementos,
- Aclaraciones de las ideas,
- Explicaciones de algunos conceptos implicados,
- Preguntas sobre la construcción que estamos manipulando,
- Propuestas de trabajo para la clase.

2.2. Herramientas de presentación.

La mayoría de las páginas contienen una o varias figuras interactivas construidas con el programa informático GeoGebra, especialmente indicado para la enseñanza y aprendizaje de la Geometría y las Matemáticas. Dispone de una amplia colección de recursos para la realización de movimientos en el plano muy sencillos de utilizar, además de disponer de otras herramientas que favorecen una presentación atractiva de los materiales para los estudiantes:

- Variedad de colores y trazos,
- La ocultación de elementos auxiliares para resaltar el motivo principal que queremos mostrar y también para no complicar excesivamente la construcción.
- La facilidad para realizar animaciones, en las que se ha elegido el momento en que aparece cada uno de los elementos de la composición mediante deslizadores que, unas veces, son accionados manualmente por el usuario y, en otros casos, serán automáticos, para que muestren el movimiento de la composición sin necesidad de intervención externa.

- La posibilidad de diseñar actividades de aprendizaje y de evaluación de los objetivos dirigidas a los alumnos.
- Los mismos alumnos y el profesor pueden revisar las construcciones incluidas en la Web.

2.3. El programa GeoGebra. Instalación y uso.

Si se dispone del programa GeoGebra instalado en el ordenador, será posible abrir el archivo, a partir del cual se ha generado el applet, con el fin de que el usuario pueda disponer de la construcción completa: comprobar su funcionamiento, revisar cómo se ha realizado hacer modificaciones que crea oportunas para mejorar los resultados tanto estéticos como en la presentación de los conceptos. Hay completa libertad para usar estos archivos con fines educativos; el único requisito es citar la procedencia.

Como se ha comentado en el apartado anterior, GeoGebra es un software libre que se puede descargar de la página <http://www.geogebra.org>, en ella se ofrecen dos alternativas: la versión que se instala completa en el ordenador y la que requiere estar conectado a Internet. Dependiendo del uso que se vaya a hacer de él, convendrá una u otra.

2.4. Animaciones e interactividad.

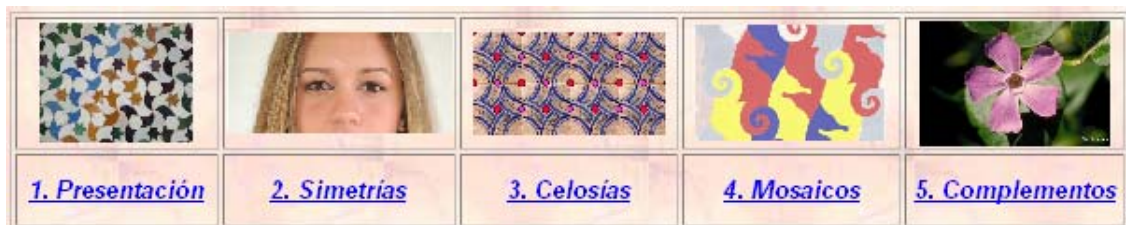
En algunos casos se presenta una secuencia animada que muestra inicialmente las ideas que se quieren resaltar, es lo que ocurre en el análisis de mosaicos. Si dejamos actuar de forma automática al deslizador, nos expondrá una secuencia de imágenes que parte de una figura poligonal, se convierte en una imagen figurativa de Escher o abstracta en el arte islámico, y después de esa baldosa van surgiendo otras que componen diversas partes del mosaico. El recorrido es de ida y vuelta, de forma que cuando está construido, los movimientos se van deshaciendo poco a poco hasta volver a la figura poligonal inicial.

A veces es conveniente detener la presentación automática para llevar el deslizador manualmente hasta la posición que nos interesa y así revisar lo que ocurre en ese momento y extraer conclusiones de lo que observamos.

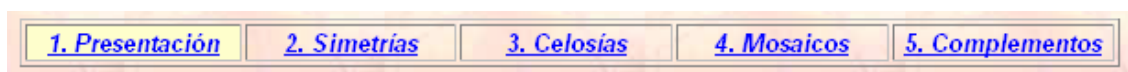
Esta interacción con el ordenador no sustituye la construcción de figuras en papel y mucho menos la manipulación con objetos físicos: espejos, libro de espejos, mira, las fotografías realizadas por los propios alumnos o las baldosas realizadas en material manipulable.

2.5. Navegación.

La página inicial contiene los enlaces a los cinco bloques de contenidos que se proponen. Esta primera barra presenta los enlaces de primer nivel:



A partir de aquí, las páginas están estructuradas en varios niveles de profundidad. Todas las páginas de los dos primeros niveles contienen en la parte superior la barra siguiente con los cinco enlaces que se han señalado:



El color amarillo indica la sección en la que nos encontramos. Llegaremos a encontrar hasta cuatro niveles de profundidad en el esquema.

Cuando descendamos hacia los niveles 3 y 4 esta barra desaparece, pero en la parte inferior disponemos de tres enlaces, el central (Volver al índice) es el que sube un nivel en la estructura.



En la sección [5.7](#) Se dispone de un mapa de la Web con toda la estructura y con enlaces a cualquiera de las páginas.



Los contenidos se han organizado secuencialmente por orden de dificultad, por lo que es posible realizar una visión de los materiales que los recorra de uno en uno, de forma meramente secuencial.

Otra alternativa consiste en seleccionar las partes más interesantes, teniendo en cuenta el curso y los alumnos que tenemos, y diseñar para ellos una secuencia de trabajo que se ajuste a los contenidos diseñados para ese curso y que

atienda al nivel de nuestro alumnado.

2.6. Los textos.

Los textos incluidos en las páginas unas veces son expositivos, otros proporcionan aclaraciones sobre el uso de las páginas y en otros casos plantean cuestiones y propuestas de trabajo. Para distinguirlos con facilidad, se ha utilizado un código de colores que se ha mantenido a lo largo de las páginas:

- Si el texto es de color **negro**, el párrafo suministra información.
- Cuando sea de color **rojo**, se dedica a proporcionar aclaraciones sobre la manipulación de los applets y las distintas alternativas que tenemos para sacar más partido de ellos.
- En color **verde** los párrafos plantean preguntas y problemas acerca de las ideas que surgen de los applets o proponen trabajos e investigaciones a realizar. En algunos casos se han planteado preguntas en exceso, para que sea el profesor el que las seleccione atendiendo al nivel e interés de los alumnos.

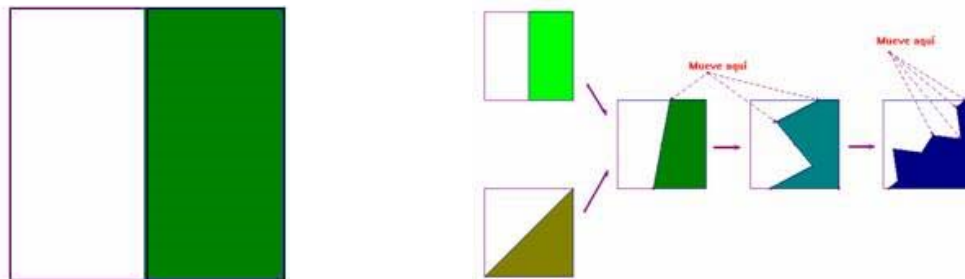
3. Antecedentes y justificación.

3.1. Mosaicos.

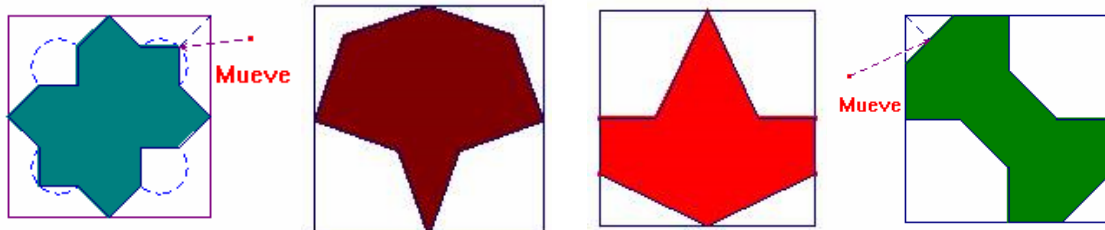
Los primeros trabajos que realicé sobre mosaicos se remontan a finales de los 80 y aparecieron publicados en 1991 en un artículo en el número 8 de la revista *SUMA*, que tendría una ampliación con la aplicación de la Geometría Dinámica al trabajo de clase en otro artículo dieciséis años después publicado por *La Gaceta de las Matemáticas*.



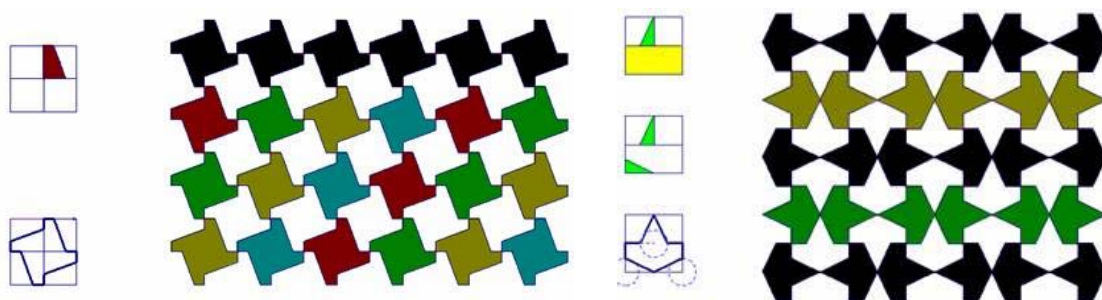
El problema se iniciaba con un problema muy sencillo como es la construcción de un polígono dentro del cuadrado cuya área sea la mitad. Las propuestas de trabajo abarcaban muchas situaciones geométricas, algebraicas y actividades más amplias como la generalización:



El proceso derivaba en la construcción de baldosas utilizadas por los géometras nazaríes en la Alhambra con la ventaja adicional de introducir elementos móviles que provocan transformaciones en las figuras:



Los cambios en las baldosas tienen un reflejo inmediato en el mosaico generado con ellas:



En 1993, y en colaboración con Julio Rodrigo realizamos una propuesta de trabajo con mosaicos publicada en Proyecto Sur: las construcciones se realizaban con tramas y materiales manipulables. La sección [3. Celosías](#) de esta Web tiene su origen en aquella experiencia.



3.2. Geometría y Arte.

Este trabajo, que se presenta ahora como *La Simetría, Celosías y Mosaicos*, conecta con otros realizados anteriormente y que se presentan en las Web del autor <http://jmora7.com/> y del equipo G4D <http://www.geometriadinamica.es/> en estas páginas encontraremos varios ejemplos de utilización de los programas de Geometría Dinámica, que relacionan la enseñanza de las matemáticas con otros campos, como es el caso de *Geometría y Mecanismos* que conecta la Geometría Sintética de los polígonos con su utilización en la Tecnología. También tenemos varios ejemplos de la utilización de la Geometría en la creación y análisis de manifestaciones artísticas.

- *Los arcos en la arquitectura* (en colaboración con G4D) presenta una colección de diez applets que permiten la construcción en red de diez de los arcos más utilizados.
- *Geometría dinámica y arte* dedicado al análisis geométrico de la pintura.
- *Las Meninas* (con la colaboración de Rafael Losada) realiza un detallado análisis geométrico del cuadro de Velázquez .
- *La mitad del cuadrado* parte de una *investigación* geométrica en el aula para profundizar en las artes decorativas.
- *La construcción del omnipoliedro*, en colaboración con Fernando Juan conecta la geometría clásica de construcción manual de poliedros con la geometría más moderna –la dinámica-, que los representa de forma virtual

3.3. ¿Por qué La Simetría?.

Una forma de resumir el planteamiento que ha guiado el trabajo que se expone en la Web de Simetría consiste en recurrir a la cita de Hermann Weyl, que se expone en la página inicial:

La simetría es una idea, por medio de la cual, el hombre de todas las épocas ha tratado de comprender y crear la belleza, el orden y la perfección.

La simetría se relaciona con la sensación de belleza que nos produce como un producto cultural en el que intervienen varios factores:

- La regularidad o simetría de las baldosas.
- Los elementos de simetría de la composición completa.
- Las conexiones del diseño de una baldosa con las adyacentes, es decir, la continuidad de las líneas lo que permite el diseño de formas complejas más grandes.

Además de los motivos estéticos hay otros de índole tecnológica y económica para la construcción de mosaicos, como es la creación de un molde (baldosa para el suelo, azulejo cerámico para las paredes, motivo en los papeles pintados, patrón textil, estribillo de una canción, etc.) de forma que sólo tengamos que construir una pequeña parte y podamos componer el diseño completo mediante repetición.

Pero no sólo a las personas les preocupa la construcción de mosaicos. Un problema clásico de la geometría en la naturaleza –anterior a la misma geometría como actividad humana-, consiste en rellenar el plano con baldosas de forma que no queden huecos entre ellas ni se produzcan solapamientos. Para conseguirlo necesitaremos dos cosas:

- Una o varias baldosas que se repiten: las abejas “prefieren” –aunque hay razones físicas y geométricas que explican tal preferencia-, el hexágono regular para sus celdas y las tortugas también optan por el hexágono, aunque no tan regular, para sus caparazones, mientras los humanos se inclinan por el cuadrado y el rectángulo para sus pavimentos y los diseños de sus estancias.
- Una determinada forma de repetirla, es decir, uno o varios movimientos que permitan pasar de una baldosa a otra. De esa forma sólo tenemos que encontrar suficientes baldosas como la inicial y seguir el plan trazado para colocar las siguientes.

4. La simetría en el currículo de matemáticas.

4.1. Los objetivos de la enseñanza de las matemáticas.

Estos materiales pretenden contribuir a la consecución de los objetivos planteados para la etapa de Secundaria Obligatoria: la mejora de la capacidad de razonamiento y de las habilidades de resolución de problemas. Para conseguirlo se empieza por identificar los elementos geométricos de la realidad, y el mayor esfuerzo se va a dedicar a cuantificar la belleza mediante la simetría.

Hay dos de los objetivos que van a ocupar el lugar central del aprendizaje de los estudiantes

5. Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la vida cotidiana, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.

6. Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos, tanto para realizar cálculos, como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa, y también como ayuda en el aprendizaje.

Y todo ello teniendo siempre en cuenta que la finalidad es conseguir una actitud positiva hacia las matemáticas, alcanzar la integración de los conocimientos matemáticos en redes más amplias y lograr que los alumnos valoren las matemáticas como parte integrante de nuestra cultura.

4.2. La Geometría y la Simetría en las competencias básicas.

El planteamiento didáctico de la Web La Simetría atiende a uno de los criterios expuestos en la sección dedicada a las competencias en el currículo de Matemáticas de la LOE, en cuanto a los criterios de funcionalidad y posibilidad de aplicar los contenidos matemáticos:

Conviene señalar que no todas las formas de enseñar matemáticas contribuyen por igual a la adquisición de la competencia matemática: el énfasis en la funcionalidad de los aprendizajes, su utilidad para comprender el mundo que nos rodea o la misma selección de estrategias para la resolución de un problema, determinan la posibilidad real de aplicar las matemáticas a diferentes campos de conocimiento o a distintas situaciones de la vida cotidiana.

En la sección inicial del currículo de la LOE dedicada a la contribución de las Matemáticas a la adquisición de las competencias básicas se expone:

Las matemáticas contribuyen a profundizar en el conocimiento e interacción con el mundo físico mediante la discriminación de formas, relaciones y estructuras geométricas, especialmente con el desarrollo de la visión espacial y la capacidad para transferir formas y representaciones entre el plano y el espacio.

Las matemáticas también contribuyen a la competencia en expresión cultural y artística:

El mismo conocimiento matemático es expresión universal de la cultura, siendo, en particular, la geometría parte integral de la expresión artística de la humanidad al ofrecer medios para describir y comprender el mundo que nos rodea y apreciar la belleza de las estructuras que ha creado. Cultivar la sensibilidad y la creatividad, el pensamiento divergente, la autonomía y el apasionamiento estético son objetivos de esta materia.

4.3. Los contenidos matemáticos.

Se presta gran atención a los contenidos geométricos incluidos a lo largo de la Educación Secundaria. A continuación, veremos cómo inciden en los contenidos de cada curso:

1º de ESO.

Se atiende tanto a la descripción de los elementos geométricos como a su utilización de forma razonada.

- Clasificación de triángulos y cuadriláteros a partir de diferentes criterios. Estudio de algunas propiedades y relaciones en estos polígonos. .
- Medida y cálculo de ángulos en figuras planas.
- Simetría de figuras planas. Apreciación de la simetría en la naturaleza y en las construcciones.
- Empleo de herramientas informáticas para construir, simular e investigar relaciones entre elementos geométricos.

2º de ESO.

La geometría de este curso se dedica mucho más al espacio, pero hay algunas transformaciones que tienen relación con los movimientos y las transformaciones.

- Figuras con la misma forma y distinto tamaño. La semejanza. Proporcionalidad de segmentos. Identificación de relaciones de semejanza.
- Utilización de procedimientos tales como la composición, descomposición, intersección, truncamiento, dualidad, movimiento, deformación o desarrollo de poliedros para analizarlos u obtener otros.

3º de ESO.

Los contenidos geométricos de tercero dedican una especial atención a la los movimientos y a sus manifestaciones en la vida

- Determinación de figuras a partir de ciertas propiedades. Lugar geométrico.
- Traslaciones, simetrías y giros en el plano. Elementos invariantes de cada movimiento.
- Uso de los movimientos para el análisis y representación de figuras y configuraciones geométricas.
- Reconocimiento de los movimientos en la naturaleza, en el arte y en otras construcciones humanas.
- Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas.

4º de ESO.

En la geometría de 4º la conexión con los movimientos puede venir de las estrategias de resolución de problemas.

- Utilización de conocimientos geométricos en la resolución de problemas del mundo físico.

En algunas comunidades autónomas los alumnos realizan un **Trabajo Monográfico de Investigación** relacionado con alguna de las áreas del currículo al acabar la Educación Secundaria. Un estudio sobre la presencia de la simetría en la naturaleza o su utilización en la sociedad, la construcción de celosías o el análisis y el diseño de mosaicos, suele resultar muy motivador para ellos. En esa investigación los alumnos:

- Buscan información acerca de la simetría y su utilización en la naturaleza y los diversos campos de la actividad humana.
- Producen diseños de diverso tipo de complejidad.
- Redactan sus conclusiones y las presentan en público.

Bachillerato y universidad.

Se inician algunas actividades de experimentación que tienen que ver con contenidos más propios de Bachillerato como es la Geometría Analítica (Ver sección [2.5.2. Los movimientos en la Geometría de Coordenadas](#)) o con otros que no se ven hasta los estudios universitarios como la Teoría de Grupos (ver sección [3.6. El grupo de simetría del Cuadrado](#) y [4.3 El nombre del grupo cristalográfico](#)).

El estudio de mosaicos puede ser uno de los temas centrales de la asignatura “Matemáticas de La Forma” del Bachillerato Artístico.

Contenidos comunes a toda la etapa.

El currículo de la LOE incluye además una colección de contenidos comunes a todos los bloques, que en muchos casos quedan ocultos detrás de la colección de ejercicios que vienen detrás de cada tema del libro. En la Web de *La Simetría* siempre están presentes los siguientes contenidos, tan matemáticos como las fracciones o el teorema de Thales:

- La planificación y la utilización de estrategias en la resolución de problemas,
- La descripción verbal de relaciones cuantitativas y espaciales, y procedimientos de resolución utilizando la terminología precisa.
- Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas, comprender las relaciones matemáticas y tomar decisiones a partir de ellas.
- Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de respuestas a los problemas y en la mejora de las soluciones encontradas.
- Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.

Además, en estos materiales se proporcionan oportunidades para que los alumnos realicen todo tipo de actividades que están relacionadas con la esencia de las matemáticas:

- Construir,
- Clasificar,
- Dibujar,
- Modelizar
- Localizar
- Razonar
- Formular
- Comprobar y justificar conjeturas,
- Demostrar.

Contenidos para después de la Universidad.

La simetría ha sido una de las ideas más fructíferas de la ciencia de los siglos XIX y XX. A partir de razonamientos sobre la simetría se han encontrado soluciones a problemas planteados mucho tiempo atrás. En matemáticas la (no) solución de la ecuación de quinto grado llevó a Galois y a Abel a la teoría de grupos. En cristalografía resolvió muchos problemas de los geólogos. En biología se aplicó para el estudio y catalogación de los seres vivos. La teoría de cuerdas en física. El estructuralismo en lingüística, las estructuras del parentesco en antropología. Además, la simetría está presente en la mayoría de las manifestaciones artísticas, en la estructura de muchas obras desde la pintura a la arquitectura o la música, pasando por las artes decorativas.

Todos estos ejemplos tienen como denominador común la búsqueda de la simetría en la ciencia de tal forma que, como señala Livio (2007), se ha convertido en *el concepto* central en los intentos para organizar y explicar el universo.

Hasta no hace mucho la geometría escolar se quedaba en una relación de fórmulas para el cálculo de áreas y volúmenes, unos pocos resultados que había que aplicar y una colección de nombres que aprender. Todo ello hacía referencia a una pequeña parte de las matemáticas, las referentes a los hechos. En el aprendizaje de las matemáticas, cada vez se da más importancia a las relaciones y la geometría del movimiento se dedica precisamente a ello. Si la escuela debe preparar a los profesionales del futuro, debemos tener en cuenta que los estudiantes actuales serán los científicos cuando el siglo XXI

esté avanzado, y la enseñanza que diseñemos para ellos ha de prepararles para los retos que se van a encontrar.

4.4. Objetivos de la Web.

El objetivo principal que se ha planteado para estos materiales es el de facilitar la visualización de los conceptos asociados a la comprensión de los movimientos en el plano y ponerlos en conexión con los hechos relevantes de la vida diaria en los que se manifiestan. Otros objetivos generales de estos materiales didácticos son:

- Fomentar la curiosidad y la experimentación de los alumnos para que sean ellos mismos los constructores de su conocimiento.
- Potenciar los procesos inductivos y el razonamiento argumentado como parte esencial de la actividad matemática.
- Impulsar el gusto por unas matemáticas bellas, en las que el rigor científico vaya acompañado por una estética atractiva.

La propuesta de trabajo intenta abarcar la mayoría de los contenidos de secundaria relativos a los Movimientos en el plano y otros conceptos relacionados, así como la preparación de aquellas ideas que más adelante han de surgir en estudios posteriores de bachillerato y universidad, y también aquellos que pueden ser útiles para desenvolverse como ciudadanos en la sociedad actual.

También se pretende que los alumnos disfruten del aprendizaje de las matemáticas. Ya que disponemos de un tema tan agradable al sentido de la vista como es la Simetría y que nos hace reflexionar como evocador de la belleza, se ha intentado diseñar el plan de aprendizaje de forma que los estudiantes interioricen poco a poco esa sensación y la transfieran a las mismas matemáticas y a su aprendizaje.

Además de la manipulación de los elementos interactivos de los applets, siempre se intenta que los alumnos escriban sus conclusiones, redacten sus ideas, si es posible, antes de que sean debatidas con el resto de la clase. Puede que esto sea lo más complicado de conseguir. Durante mucho tiempo se ha pensado en matemáticas como una actividad individual, con lo que nos hemos perdido esa fase de afinación de las ideas que se produce cuando el estudiante expresa sus conclusiones y las debe defender ante sus compañeros para reafirmarlas o cambiar de opinión.

La búsqueda de la precisión y el rigor son habilidades importantes en la actividad matemática, pero los alumnos no las aprenden de un día para otro. Cuando se consiguen es después de un trabajo a largo plazo, al que hay que contribuir con la mayor cantidad de experiencias que podamos.

5. La enseñanza con ordenadores

La LOE (2006) incorpora en su texto algunos argumentos para utilizar los programas de geometría dinámica

La utilización de recursos manipulativos que sirvan de catalizador del pensamiento del alumno es siempre aconsejable, pero cobra especial importancia en geometría donde la abstracción puede ser construida a partir de la reflexión sobre las ideas que surgen de la experiencia adquirida por la interacción con un objeto físico. Especial interés presentan los programas de geometría dinámica al permitir a los estudiantes interactuar sobre las figuras y sus elementos característicos, facilitando la posibilidad de analizar propiedades, explorar relaciones, formular conjeturas y validarlas.

En la construcción del conocimiento, los medios tecnológicos son herramientas esenciales para enseñar, aprender y en definitiva, para hacer matemáticas. Estos instrumentos permiten concentrarse en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento y la resolución de problemas. En este sentido, la calculadora y las herramientas informáticas son hoy dispositivos comúnmente usados en la vida cotidiana, por tanto el trabajo de esta materia en el aula debería reflejar tal realidad.

Las matemáticas son un área del conocimiento en la que frecuentemente se manejan conceptos abstractos de cierta complejidad. Esta materia ha sido una de las primeras en plantearse la necesidad de utilizar recursos de todo tipo para hacer más accesibles los conocimientos al alumnado, intentando hacerlos “visibles” mediante conexiones con otros campos de conocimiento y con la vida cotidiana: la utilización de recursos didácticos variados, fotografías, videos, etc. tienen gran tradición en el aprendizaje.

Los ordenadores son una herramienta con grandes posibilidades para esta visualización de conceptos matemáticos y en las últimas dos décadas, con la aparición de los programas de Geometría Dinámica (Cabri, Sketchpad, Cinderella, Geogebra y otros), han ido transformándose unos programas de dibujo geométrico para convertirse en auténticos asistentes matemáticos que actualmente integran de forma natural geometría de coordenadas, hoja de cálculo.

Las nuevas versiones del software de Geometría Dinámica son cada vez más fáciles de utilizar. Para la Web de Simetría se ha utilizado de forma exclusiva el programa GeoGebra, que es de libre distribución, lo que supone una gran ventaja para el alumnado que puede disponer de él tanto en el instituto, como en sus casas. Esta facilidad de uso ha ido paralela a una mayor integración del software con los navegadores con las herramientas para la creación de applets dinámicos que permiten mostrar los conceptos en movimiento.

6. Metodología.

Utilización de los materiales en la clase de matemáticas.

6.1. Las actividades

Se ha elegido una combinación de varios tipos de actividades que se complementan unas a otras para conseguir que la clase sea tan dinámica como la geometría que se utiliza para aprender.

- Los problemas y actividades cortas, cuestiones muy concretas que hay que responder aplicando la información que se posee y los conceptos y técnicas adquiridas con anterioridad. Tenemos un ejemplo cuando se pregunta por la cantidad de ejes de simetría o el orden de los centros de rotación de los azulejos del Museo de Onda (ver secciones [2.2.4](#) y [2.3.3](#))
- Preguntas que tienen que ver con los procesos más generales de la actividad matemática; es el caso de la clasificación de los cuadriláteros atendiendo a la cantidad de elementos de simetría (Ver sección [2.2.5](#))
- Cuestiones más generales para indagar en ideas, técnicas y hechos de la vida cotidiana como la colección de preguntas sobre la simetría para investigar (Ver sección [2.5.5](#)).
- Investigaciones matemáticas a largo plazo. Este tipo de trabajos tiene una característica común: la pregunta que se hace no está completamente determinada en el enunciado y los mismos estudiantes pueden tomar decisiones sobre el camino a seguir y la forma de hacerlo La sección [3.3](#), dedicada a la construcción de celosías puede tomar caminos distintos al planteado sin más que transformar el cuadrado por un triángulo equilátero o un hexágono regular, cambiar uno de los cuatro movimientos seleccionados por otro distinto, o simplemente cambiar el foco de la investigación desde la forma dibujada en el cuadrado a los huecos que dejan las baldosas.
- Investigaciones exhaustivas, en las que hay que analizar todas las posibilidades que se pueden dar en una determinada situación. Tenemos dos claros ejemplos en el estudio de posibilidades para los azulejos de la sección [3.5](#) (baldosas con diferentes elementos de simetría y distintos movimientos para su colocación). También el estudio de los diecisiete grupos cristalográficos realizado en [4.4](#) planos a partir de estas técnicas en la sección.
- Actividades diseñadas para la evaluación de los conocimientos adquiridos con esta secuencia de trabajo. Se han diseñado dos, una para la simetría axial [5.3](#) y otra para la simetría rotacional [5.4](#).

6.2. Tratamiento de la diversidad del alumnado.

El estudio de los mosaicos que se propone, no requiere una gran instrucción matemática previa, por lo que puede interesar a alumnos que en otro caso

tendrían más dificultades para seguir el ritmo de la clase. Además, se pueden diseñar distintos niveles de profundización en el trabajo, de forma que todos puedan realizar aprendizajes a su nivel. Uno de los objetivos metodológicos de *La Simetría* es conseguir la diferenciación en nuestras clases de matemáticas. Las dos investigaciones propuestas serán muy útiles para el tratamiento de la diversidad en clase.

Para los alumnos que tengan más dificultades será muy interesante el trabajo con Celosías, porque les permite partir de muy pocos conocimientos matemáticos, para llegar hasta un nivel tan alto como deseen ya que la sección acaba con los grupos de Leonardo.

Para los alumnos de más capacidad o interés puede suponer un reto la comprensión de los grupos cristalográficos, adquirir destreza en la clasificación, aprender a analizarlos con GeoGebra y atreverse a diseñarlos ellos mismos con las técnicas descritas en [4.4](#) para los Mosaicos dinámicos

6.3. La organización de la clase.

La situación ideal para el trabajo en clase sería que individualmente o en pequeño grupo –delante del ordenador dos son mejor que tres-, los alumnos siguen los materiales con un plan trazado por el profesor.

En estos momentos no se puede proponer una situación así como algo generalizable, aunque es posible que dentro de unos años sea cotidiano. Se plantean dos tipos de organización de la clase:

- Los materiales los utiliza el profesor: presenta los contenidos matemáticos con la ayuda de un ordenador portátil y un cañón de proyección -si es con pizarra digital, mucho mejor-. En este caso, el profesor puede lanzar a la clase las preguntas y las actividades propuestas, para provocar el debate entre los alumnos que les acerque a las soluciones. La manipulación posterior la pueden hacer los propios alumnos o el profesor a partir de las indicaciones que le dan los alumnos.
- El trabajo lo realiza directamente al alumnado, que interactúa con los applets en sus ordenadores en un aula de Informática, tanto si tienen acceso a Internet, como si el profesor ha insertado en los ordenadores la Web completa de *La Simetría*. En este caso los alumnos realizan individualmente o en pequeños grupos el trabajo, anotan sus soluciones, después las discuten con toda la clase y se extraen conclusiones. Más adelante los alumnos más avanzados pueden abrir los archivos de GeoGebra e intentar comprender cómo han sido construidos e incluso modificarlos para introducir mejoras.

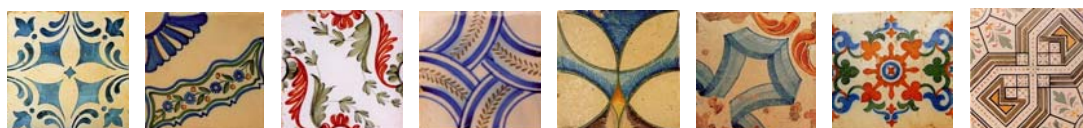
En ambos casos es el profesor el que diseña la secuencia de enseñanza que se puede apoyar en parte en la secuencia planteada para estas páginas.

Aún cabe una tercera posibilidad: una persona interesada en estos temas accede a estas páginas desde cualquier lugar con acceso a Internet –o ha

descargado previamente los materiales-. En este caso, la secuencia de preguntas que se realiza en cada página puede ser útil para dirigir su atención hacia los aspectos más interesantes.

El trabajo de clase puede derivar en la construcción física de algunos modelos, con la ayuda de otras áreas como la de tecnología o plástica para diseñar los mosaicos ideados en matemáticas. Durante la época de elaboración de estos materiales, me llevé una grata sorpresa al llamar al *Museo del Taulell* de Onda solicitando autorización para mostrar las imágenes utilizadas en [3.5](#), extraídas de la Colección de Azulejos del Siglo XIX (Ver Estall i Poles, 2000). La dirección del museo, además de enviar la autorización para el uso de las imágenes con fines didácticos, brindó la posibilidad de realizar físicamente en su taller las baldosas diseñadas por los alumnos en clase. En su Web podemos encontrar una reseña de la realización por los alumnos del IES Serra d'Espadà de Onda.



http://www.museoazulejo.org/es/ficha_actividad.php?id=55



7. Estructura y organización del trabajo.


7.1. Presentación.

Se inicia con una serie de cuatro páginas de presentación en las que se marcan los objetivos tanto en lo referido a los contenidos conceptuales como en la forma de trabajar.

	1.1. Presentación. Los Movimientos
	1.2. Presentación. Investigaciones
	1.3. Presentación. Mosaicos

7.2. Movimientos.

En esta sección se utilizan varias secuencias de actividades cortas que mantienen la misma estructura básica para cada uno de los movimientos.

	2.1. Traslación.
	2.2. Simetría axial.
	2.3. Rotación y simetría central.
	2.4. Simetría con deslizamiento.
	2.5. Investigaciones: Análisis y composición de movimientos.

- Comienza por actividades manipulativas, en las que el alumno puede experimentar las ideas que se le proponen. Para cada movimiento se ha elegido como actividad inicial una fotografía de Pilar Moreno, en la que muestra un elemento cotidiano que posee ese tipo de simetría (traslacional, axial, rotacional o de simetría con deslizamiento).
- Una colección de actividades que muestran varios temas, en los que podemos observar y utilizar la simetría
- Una tercera secuencia de actividades de aplicación de la simetría, que termina con la utilización de ese movimiento para analizar algunos mosaicos como preparación para la sección 4 dedicada a un análisis más profundo de los mosaicos.

	2.1.1. Simetría por traslación.
	2.1.2. El lago de los cisnes.
	2.1.3. Traslademos rejas.
	2.1.4. Simetría traslacional en un mosaico.
	2.1.5. Práctica con mosaico.

	2.3.1. La simetría rotacional.
	2.3.2. Las letras del abecedario.
	2.3.3. El museo del azulejo de Onda.
	2.3.4. La simetría central.
	2.3.5. La puerta.
	2.3.6. Mosaicos (1).
	2.3.7. Mosaicos (2).
	2.3.8. Mosaicos (3).

	2.2.1. La simetría axial.
	2.2.2. Simetría bilateral.
	2.2.3. Las letras del abecedario.
	2.2.4. Baldosas de cerámica.
	2.2.5. Simetrías en los cuadriláteros.
	2.2.6. La simetría de la mariposa.
	2.2.7. Composición de simetrías perpendiculares.
	2.2.8. Simetrías en los mosaicos.
	2.2.9. Mosaicos (1).
	2.2.10. Mosaicos (2).

	2.4.1. La simetría con deslizamiento.
	2.4.2. Huellas al caminar.
	2.4.3. Mosaicos (1).
	2.4.4. Mosaicos (2).

Se ha añadido una sección que intenta relacionar las ideas que surgen de los apartados anteriores. Se intenta llegar más lejos aplicándolas dentro de las mismas matemáticas:

	2.5.1. Análisis y composición de movimientos.
	2.5.2. Los movimientos en la geometría de coordenadas.
	2.5.3. Las cuatro isometrías en un mosaico.
	2.5.4. Práctica con mosaico.
	2.5.5. Preguntas sobre la simetría para investigar.

- La composición de los movimientos

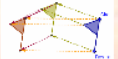
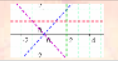



	2.5.1.1. Traslación.
	2.5.1.2. Los movimientos en la geometría de coordenadas.
	2.5.1.3. Simetría axial.
	2.5.1.4. Composición de dos simetrías axiales.
	2.5.1.5. Rotación.
	2.5.1.6. Composición de dos rotaciones.
	2.5.1.7. Simetría con deslizamiento.

- La relación de los movimientos con la geometría de coordenadas.

	2.5.2.1. Traslaciones.
	2.5.2.2. Rotaciones.
	2.5.2.3. Simetrías axiales.

- La aplicación de las cuatro isometrías al análisis completo de un mosaico.

Se acaba con una colección de preguntas en las que se lanzan cuestiones, para que aquellos alumnos más interesados puedan investigar y profundizar en los temas que más les hayan llamado la atención.

	2.5.1. Análisis y composición de movimientos.
	2.5.2. Los movimientos en la geometría de coordenadas.
	2.5.3. Las cuatro isometrías en un mosaico.
	2.5.4. Práctica con mosaico.
	2.5.5. Preguntas sobre la simetría para investigar.

7.3. Celosías.

Se inicia con un problema sencillo: la construcción de celosías, mosaicos formados por la repetición de una baldosa cuadrada que contiene un motivo en su interior. Normalmente este diseño contiene algún elemento de simetría.

	3.1. La construcción de celosías.
	3.2. La baldosa.
	3.3. Los movimientos.
	3.4. Azulejos y simetría.
	3.5. Investiga: Simetría de la baldosa y método de colocación.
	3.6. El grupo de simetría del cuadrado (Grupo de Leonardo).

De todas las formas posibles de colocación se han seleccionado cuatro, básicamente consisten en superponer una baldosa sobre otra ya colocada y moverla después: trasladarla, girarla (90° alrededor de un vértice o 180° alre-






dedor del punto medio de un lado) o bien “dar la vuelta a la baldosa” que se correspondería con colocar la simetría axial respecto de un lado del cuadrado.

El planteamiento de la investigación propuesta incluye las composiciones que se producen y veremos que, bajo ciertas condiciones, distintos movimientos para una baldosa dan como resultado la misma celosía.

	3.3.1. Traslación de una baldosa con vectores sobre los lados del cuadrado.		3.5.1. Baldosa sin simetría.
	3.3.2. Simetría axial respecto de los lados del cuadrado.		3.5.2. Simetría central (rotacional de orden 2)
	3.3.3. Simetría central respecto de los puntos medios de los lados del cuadrado.		3.5.3. Simetría rotacional de orden 4.
	3.3.4. Rotación+traslación.		3.5.4. Un eje de simetría que une los puntos medios de los lados opuestos.
			3.5.5. Un eje de simetría que une vértices opuestos.
			3.5.6. Dos ejes de simetría que une los puntos medios de lados opuestos (y simetría rotacional de orden 2).
			3.5.7. Dos ejes de simetría que une los vértices opuestos (y simetría rotacional de orden 2).
			3.5.8. Los cuatro ejes de simetría del cuadrado (y simetría rotacional de orden 4).

7.4. Mosaicos.

El trabajo se completa con un estudio más profundo de ciertos mosaicos, utilizando para ello diseños de M.C. Escher, algunos islámicos y uno semirregular.

	4.1. Guía de trabajo para estudiar mosaicos.
	4.2. Dos formas de estudiar los mosaicos.
	4.3. El nombre del grupo cristalográfico.
	4.4. Análisis dinámico de mosaicos y Mosaicos dinámicos. Los 17 grupos cristalográficos (34)
	4.5. Mosaicos para practicar.

Para cada uno de los 17 grupos cristalográficos se han seguido dos líneas de trabajo distintas y complementarias:

- Análisis de un mosaico de ese tipo ya creado (por Escher o algún geómetra nazarí). A partir del conjunto de simetrías del mosaico (los movimientos que lo dejan invariante), unido a la creación de la baldosa básica utilizada a partir de la deformación o descomposición de una figura poligonal. Los movimientos hacen que la baldosa transformada vaya rellenando el plano sin dejar huecos.
- Creación de un mosaico de cada tipo, partiendo únicamente de una baldosa poligonal y ciertas transformaciones en unos lados que se llevan a los otros mediante traslaciones, giros o simetrías. Una vez

diseñada la baldosa “figurativa”, se utilizan los movimientos correspondientes para generar el mosaico. En estos mosaicos se dejan libres los puntos iniciales de las transformaciones en los lados para que todo el mosaico se transforme al moverlos.

	Análisis de mosaicos	Mosaicos dinámicos
4.4.1	 Escher 28 Gallos	 p1
4.4.2	 Escher 78 Unicornios	 pg
4.4.3	 Alcázar de Sevilla	 pm
4.4.4	 Escher 91 Escarabajos	 cm
4.4.5	 Escher Caballitos de mar	 p2
4.4.6	 Escher 16 Penos	 pgg
4.4.7	 Escher 37 Escarabajos	 pmg
4.4.8	 Escher 81 Animales voladores	 pmm
4.4.9	 Mosaico islámico	 cmm
4.4.10	 Escher 25 Reptiles	 p3
4.4.11	 Escher 69 Tres animales	 p3m1
4.4.12	 Escher 123 Peces voladores	 p31m
4.4.13	 Escher 20 Peces	 p4
4.4.14	 Alhambra Rombos	 p4m
4.4.15	 Escher 12 Mariposas	 p4g
4.4.16	 Escher 60 Mariposas	 p6
4.4.17	 Mosaico Semirregular 6.4.3.4	 p6m

 4.5.1. Escher. División regular del plano número 4.
 4.5.2. Escher. Lagartos.
 4.5.3. La Alhambra. El polígon.
 4.5.4. Escher. División regular del plano número 122.
 4.5.5. Escher. División regular del plano número 44.
 4.5.6. Escher División regular del plano número 45 (Ángeles y demonios).
 4.5.7. Escher División regular del plano número 55.

Cuando entramos en cualquiera de los 34 mosaicos estudiados, tendremos una nueva barra de enlaces en la parte superior que nos permitirá desplazarnos a cualquier otro, pero sólo de los realizados con la misma línea de – análisis de mosaicos o mosaicos dinámicos-, que el que estamos viendo en ese momento.

p1	pg	pm	cm	p2	pgg	pmg	pmm	cmm	p3	p3m1	p31m	p4	p4m	p4g	p6	p6m
--------------------	--------------------	--------------------	--------------------	--------------------	---------------------	---------------------	---------------------	---------------------	--------------------	----------------------	----------------------	--------------------	---------------------	---------------------	--------------------	---------------------

Si deseamos pasar a uno de los del otro tipo podemos subir un nivel para ir a la página 4.4 y desde allí ir al que queramos.

7.5. Complementos.

Para acabar, se han incorporado algunas secciones que incluyen información útil para el profesorado: enlaces a esta guía didáctica y a la del alumno y algunos documentos adicionales con bibliografía, direcciones de Internet o una relación de las personas que han colaborado en la elaboración y mejora de estos materiales didácticos.

	5.1. Instrucciones para la simulación de los movimientos con Geogebra.
LA SIMETRÍA	5.2. Guía didáctica
	5.3. Evaluación de la simetría axial (1º de ESO).
	5.4. Evaluación de la simetría rotacional (3º de ESO).
Bibliografía.	5.5. Bibliografía.
Internet	5.6. Direcciones de Internet
Mapa	5.7. Mapa de la web.
Agradec	5.8. Agradecimientos

En el apartado 5.1 tenemos una colección de instrucciones interactivas una guía para que el profesor –y los propios alumnos-, para que puedan diseñar sus propios applets que simulen los movimientos sobre una imagen previamente colocada sobre la pantalla de GeoGebra.

	5.1.1. Colocar una imagen en la pantalla.
	5.1.2. La traslación.
	5.1.3. La simetría axial.
	5.1.4. La rotación.
	5.1.5. La simetría con deslizamiento.

Las secciones 5.3 y 5.4 contienen dos propuestas de evaluación que se comentan en la siguiente sección.

8. Evaluación

Se han diseñado dos colecciones de actividades para poder comprobar el grado de adquisición de los conceptos y destrezas de la simetría axial y rotacional. El tipo de preguntas planteado es muy parecido a la secuencia de actividades de aprendizaje y en algunos casos se ha utilizado el mismo contexto.

	5.3.1. Pregunta 1. Simetrías en las banderas.
	5.3.2. Pregunta 2. Simetrías en las letras del abecedario.
	5.3.3. Pregunta 3. Simetrías en las baldosas de cerámica.
	5.3.4. Pregunta 4. Simetrías en logotipos.
	5.3.5. Pregunta 5. La simetría en la teja.
	5.3.6. Pregunta 6. Composición de simetrías 1.
	5.3.7. Pregunta 7. Simetría y orientación.
	5.3.8. Pregunta 8. Ejes de simetría en los mosaicos 1.
	5.3.9. Pregunta 9. Ejes de simetría en los mosaicos 2.
	5.3.10. Descargar la hoja de respuestas

	5.4.1. Pregunta 1. Simetría rotacional en los símbolos.
	5.4.2. Pregunta 2. Simetría rotacional en el diseño gráfico.
	5.4.3. Pregunta 3. Las baldosas de cerámica.
	5.4.4. Pregunta 4. Forma simétrica de una daga.
	5.4.5. Pregunta 5. La simetría en la puerta y la flor.
	5.4.6. Pregunta 6. Simetría rotacional en los mosaicos.
	5.4.7. Pregunta 7. Mosaicos con simetría rotacional 2.
	5.4.8. Pregunta 8. Mosaicos con simetría rotacional 3.
	5.4.9. Descargar hoja de respuestas

Además de los contenidos matemáticos de simetría axial y simetría rotacional, las cuestiones planteadas en el modelo que se presenta intentan evaluar otros aspectos de la actividad matemática y de la enseñanza en general.

Evaluación de los contenidos matemáticos:

- Especialmente los contenidos relativos a los movimientos en el plano
- El análisis de relaciones y propiedades de figuras en el plano, el estudio de los cuadriláteros.
- Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas.

Tanto en los contenidos seleccionados como en la forma de presentar las cuestiones, también se evalúan las competencias matemáticas:

- Competencia en comunicación lingüística en la comprensión de los mensajes en la formulación y expresión de las ideas en preguntas de dificultad creciente y también en la interacción entre el lenguaje: natural y el geométrico.
- Competencia matemática en la capacidad para interpretar y describir la realidad, la discriminación de formas, relaciones y estructuras geométricas y también en la determinación de pautas de comportamiento, regularidades e invariantes.
- Competencia digital mediante la utilización a nivel usuario de los programas de geometría dinámica. Esto permite a los estudiantes interactuar sobre las imágenes y figuras propuestas y sus elementos característicos, facilitando la posibilidad de analizar propiedades, explorar relaciones, formular conjeturas y validarlas.
- Competencia cultural y artística, ya que la simetría está en la raíz de la

expresión de las artes decorativas a lo largo de la historia de la humanidad y nos puede servir para apreciar la belleza en las creaciones de diferentes culturas.

En el *Anexo 1. Experimentación* se expone un informe más detallado de las características de la experimentación y de los resultados obtenidos con estas pruebas de evaluación del alumnado.

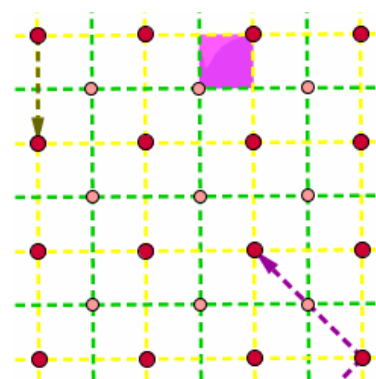
9. Descripción de los códigos utilizados. Técnicas de construcción en los applets.

9.1. Análisis de mosaicos.

La forma elegida para hacer aparecer los elementos de simetría en los mosaicos consiste en activar una colección de interruptores que GeoGebra llama casillas de tildado.



- Los **centros de rotación** se marcan en distintas tonalidades de rojo y en distintos tamaños dependiendo del orden de la simetría rotacional.
- Los **ejes de simetría** aparecen como una línea de puntos de color verde.
- Los **vectores de traslación** se representan como dos vectores de color morado con trazo discontinuo muy grueso.
- Los **ejes de simetría con deslizamiento** se ven como líneas punteadas de color amarillo. Normalmente también aparece además un vector paralelo al eje en color marrón, es el deslizamiento que hay que realizar después de la simetría para que el mosaico vuelva a coincidir consigo mismo.
- El **grupo de simetría** (en azul) es el código correspondiente al grupo cristalográfico según la notación simplificada que se expone en [4.3](#).



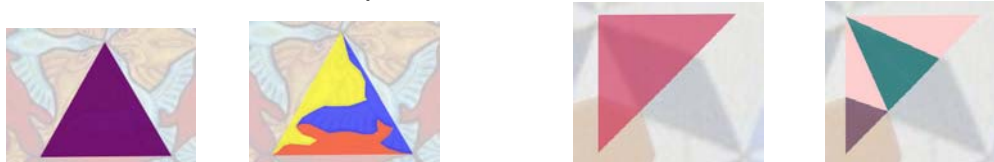
9.2. Construcción de mosaicos.

Una vez realizado el trabajo de análisis y catalogación de cada mosaico, se realiza un segundo estudio dentro del mismo applet, que se gobierna desde el deslizador verde colocado en la zona superior izquierda de la pantalla. Parte de una baldosa poligonal (cuadrado, triángulo, rectángulo, rombo o hexágono) y puede verse sometido a dos tipos de transformaciones:

- La deformación de algunos de los lados se lleva a los otros lados mediante traslaciones, giros o simetrías. Para cada mosaico se reproducen aquí algunas instantáneas que permiten hacerse una idea del proceso. En los applets se puede ver la secuencia animada completa, en la que cada parte se mueve de forma continua mediante la isometría elegida en ese momento para construir la figura ideal por Escher: un hombre, un lagarto, un pájaro o un insecto.

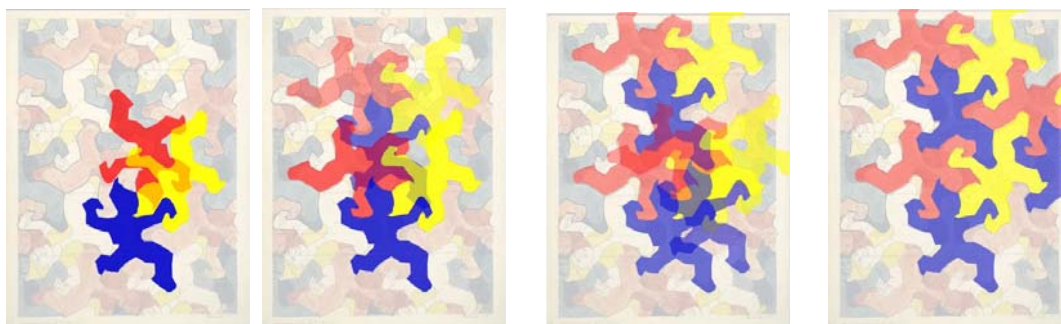


- Descomposición de la baldosa en otras piezas más pequeñas, que generan el diseño final cuando se unen a otras como ella si seguimos un determinado patrón de construcción.



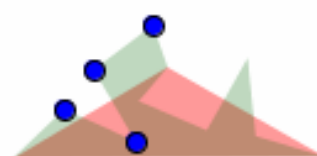
Esta es una forma de estudiar los mosaicos que permite colocarse en la posición del creador de mosaicos. Todo parte de un polígono que rellena el plano y se deforma de manera controlada para generar una figura que tenga una apariencia de animal.

Una vez tenemos la nueva baldosa diseñada, se utilizan las isometrías que han aparecido en el análisis previo para generar nuevas baldosas iguales a ella. A la figura del hombre azul se le imprimen dos rotaciones de 120° (amarillo) y 240° (rojo), para rellenar el plano alrededor del centro de giro. En el paso siguiente, utilizamos dos vectores de traslación con direcciones independientes para mostrar que podemos rellenar el plano la figura compuesta por tres hombres. Para acabar sólo tenemos que repetir el proceso de traslación de forma indefinida.



9.3. Mosaicos dinámicos.

Partimos de una baldosa básica poligonal, un triángulo isósceles, que tiene por vértices el centro y dos vértices de un triángulo equilátero. Deformamos uno de los lados iguales y llevamos la línea producida con un giro de 120° al otro lado que tiene el mismo tamaño.

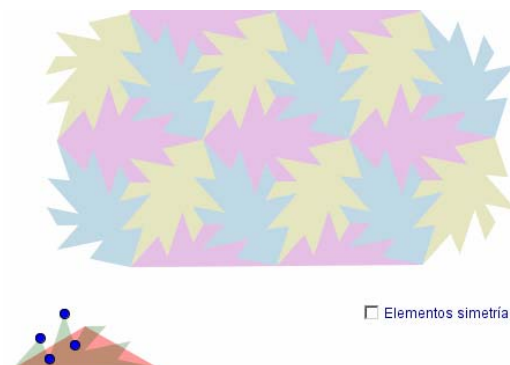
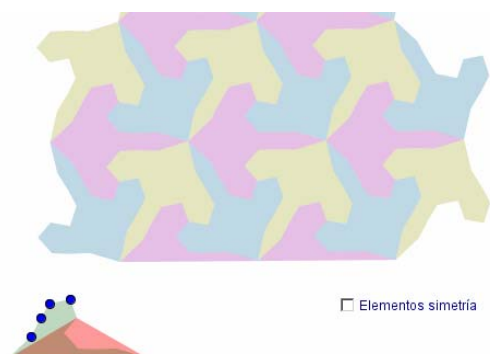


Ver polígono base

El paso siguiente consiste en llevar la baldosa así creada al centro del applet y utilizar las simetrías del mosaico para construir el mosaico completo.



En la parte inferior izquierda tenemos la posibilidad de modificar la posición de algunos de los puntos, y comprobar cómo afecta el cambio a todas las baldosas y al mosaico completo.



9.4. Otros iconos en los applets

	<p>La doble flecha en la parte superior izquierda recompone el applet para que vuelva a la posición original.</p>
	<p>Este deslizador se encuentra normalmente en la parte izquierda del applet. Es el que activa la secuencia animada.</p>
	<p>Icono en la zona inferior izquierda. Inicia la animación automática del deslizador punteado de color verde.</p>
	<p>Icono en la zona inferior izquierda. Detiene la animación automática del deslizador punteado de color verde.</p>

Anexo 1. Experimentación de los materiales. Resultados obtenidos.

Las pruebas de evaluación [5.3](#) y [5.4](#) de la Sección [5. Complementos](#) han sido diseñadas para ser realizadas cuando la secuencia de aprendizaje responde al trabajo realizado en la Sección [2. Simetrías](#). La secuencia de preguntas es semejante al trabajo que se hace en el material de aprendizaje.

Si el trabajo en clase se ha complementado con las investigaciones propuestas en las secciones [3. Celosías](#) y [4. Mosaicos](#), esta evaluación deja de tener sentido práctico para conocer el nivel de consecución de los objetivos por parte de los estudiantes, ya que habrán conseguido mucho más que lo que se evalúa aquí. En ese caso es mejor analizar el resultado de las investigaciones y el producto obtenido con esos trabajos.

a) Grupo ESTALMAT de la Comunidad Valenciana.

Una versión muy reducida de estos materiales se ha experimentado con los alumnos del proyecto ESTALMAT de la Comunidad Valenciana. Durante el curso anterior los alumnos habían participado en dos sesiones de trabajo con GeoGebra. En la primera aprendieron a instalar el programa y las primeras ideas básicas de manejo mediante el planteamiento de algunos problemas, y la segunda se dedicó a la construcción de arcos en arquitectura (Ver Arranz, 2008).

La tercera sesión, ya en segundo curso se diseñó con una pequeña parte de los materiales para el reconocimiento de los movimientos en el plano y su aplicación a los mosaicos. La duración de la sesión fue de una hora y cuarto y lo que se pretendía era aportar una forma de trabajar, y que después ellos pudieran seguir los materiales en casa cuando quisieran. Para este grupo no se pudo realizar evaluación por cuestiones de tiempo.

b) Trabajo Monográfico de Investigación de 4º de ESO. IES San Blas de Alicante.

Otra experimentación con parte de los materiales se ha realizado con un grupo de alumnos de 4º de ESO en la asignatura optativa Trabajo Monográfico de Investigación, con un grupo de 14 alumnos que lo habían elegido entre varias propuestas de trabajo. La mayoría de ellos ya conocía el programa GeoGebra y había trabajado con él en clase de matemáticas. Este tipo de asignaturas tiene el inconveniente de contar sólo con una hora semanal, por lo que no puede tener una gran exigencia en el trabajo para casa. La ventaja es que pueden mantener y ampliar las destrezas adquiridas en cursos anteriores, con los programas de geometría dinámica y que han podido ampliar los trabajos que iniciaron el curso pasado.

De varias propuestas de trabajo que se les ofrecieron al principio de curso, la mayoría de los estudiantes eligió el trabajo con mosaicos, es posible que

el profesor tuviera alguna influencia en la elección. Trabajaron con los movimientos, generaron varios mosaicos, algunos de ellos mediante el análisis de algún diseño de Escher o de la Alhambra y también alguno en forma dinámica, partiendo de una baldosa con puntos variables que compone el mosaico a partir de los movimientos de un determinado grupo cristalográfico.

La evaluación de los Trabajos de Investigación se realizó en base al trabajo desarrollado a lo largo del curso y al proyecto desarrollado.

c) Matemáticas en 1º y 3º de ESO en el IES San Blas.

Durante el curso 2008-9 se ha realizado una experimentación con dos grupos: uno de 30 alumnos de 1º y otro de 22 alumnos de 3º de ESO del IES San Blas de Alicante. Durante el tercer trimestre se utilizaron para el aprendizaje las pruebas de los materiales de la [Sección 2](#). Para ellos se diseñó la colección de actividades de evaluación que se presenta en los materiales. Se intentó utilizar, al menos en parte, los contextos de la fase de instrucción.

En general, los resultados se pueden considerar satisfactorios para la mayoría de los estudiantes. En cuanto a la puntuación obtenida por los alumnos, fue de 7.0 para los de 1º de ESO y 7.4 para los de 3º de ESO. La valoración se hizo sobre 10 puntos. Se estableció mayor ponderación para las últimas preguntas que son las de mayor dificultad. La diferencia de puntuación es muy pequeña teniendo en cuenta que son dos cursos de diferencia. Esto se puede justificar porque el nivel académico del grupo de 1º es bastante bueno como lo confirmaron los resultados finales del curso

Tanto para las sesiones de instrucción como para las de evaluación se contó con un aula de Informática móvil compuesta por 20 ordenadores portátiles con el sistema operativo Linux, tenían instalado el navegador Firefox y el programa GeoGebra. Se aprovechó la ocasión para animar a los alumnos de los dos cursos para instalar estos programas en sus ordenadores personales de casa.

Algún día no se pudo utilizar el aula móvil de informática. La alternativa consistió en trabajar con un portátil conectado a un cañón de proyección. En este caso, se planteaban las preguntas a la clase para que cada alumno las pensara, escribiera sus respuesta en el cuaderno y después se organizaba un debate con toda la clase.

A continuación se relatan algunos comentarios que se han podido extraer de la revisión de los cuestionarios propuestos para la evaluación de los grupos de matemáticas de 1º y 3º de ESO.

Simetría Axial:

	5.3.1. Pregunta 1. Simetrías en las banderas.
	5.3.2. Pregunta 2. Simetrías en las letras del abecedario.
	5.3.3. Pregunta 3. Simetrías en las baldosas de cerámica.
	5.3.4. Pregunta 4. Simetrías en logotipos.
	5.3.5. Pregunta 5. La simetría en la reja.
	5.3.6. Pregunta 6. Composición de simetrías 1
	5.3.7. Pregunta 7. Simetría y orientación.
	5.3.8. Pregunta 8. Ejes de simetría en los mosaicos 1.
	5.3.9. Pregunta 9. Ejes de simetría en los mosaicos 2.
	5.3.10. Descargar la hoja de respuestas

Pregunta	Comentarios
5.3.1	<p>Es una actividad que introduce al alumno en la utilización de la simetría para el diseño de figuras en un contexto que suele resultar familiar y atractivo para los estudiantes.</p> <p>La bandera que suele presentar mayor dificultad es la del Reino Unido porque parece tener dos ejes de simetría que quedan anulados porque las líneas rojas oblicuas no están centradas en la banda blanca.</p>
5.3.2	<p>También está situada en un contexto familiar para los alumnos. Es interesante que primero conjeturen acerca de si las letras tendrán ejes de simetría y que sólo después activen los interruptores que hacen ver los posibles ejes horizontal y vertical.</p> <p>Las letras O, H y X tienen los dos ejes de simetría, puede que algunos alumnos vean uno de ellos y no se lleguen a plantear el que pueda tener otro.</p> <p>Tres de las letras que no tienen ejes de simetría: N, S y Z, se han elegido por tener simetría rotacional. Es muy frecuente que los alumnos creen que tienen simetría axial. Es de esperar que la presencia de las líneas de puntos que aparecen con los interruptores, les hagan reflexionar.</p>
5.3.3	<p>Se han elegido ocho diseños, de forma que estén representados todas las posibilidades para las baldosas cuadradas: simetrías paralelas a los lados o que van a los vértices, y simetrías rotacionales de órdenes 2 y 4.</p> <p>Se ofrece como ayuda la posibilidad de dibujar las líneas que podrían ser ejes de simetría. Cuando se activa el interruptor aparecen 4 segmentos que pueden ser ejes de simetría de las figuras. Se pide determinar cuántos de ellos lo serán.</p> <p>La dificultad es baja por la ayuda proporcionada y la experiencia acumulada con las preguntas anteriores. De todas formas, como en las demás actividades, hay que dejar tiempo para que se manipulen las imágenes y se decidan las soluciones.</p>
5.3.4	<p>Las cuestiones se refieren ahora a un nuevo contexto, más abstracto, aunque sigue siendo cercano al alumno. En este caso, no se dispone de ayuda adicional (como la posibilidad de mostrar ejes).</p> <p>Los logotipos que plantearon dificultades son los que sólo tienen simetría rotacional, algunos alumnos tienden a creer que tienen simetría axial. También presentaron problemas los diseños con tres ejes de simetría.</p>

5.3.5	<p>Con esta pregunta se pretende revisar las ideas que los alumnos han adquirido sobre el concepto de simetría y cómo las relacionan con otras ideas geométricas. Si en las preguntas anteriores el lenguaje era de tipo visual y la pregunta muy concreta, a partir de ahora presentan una dificultad añadida que proviene de la utilización del lenguaje geométrico para describir situaciones y establecer relaciones.</p> <p>Para responder a las preguntas, los estudiantes pueden basarse en la observación de la figura y además disponen de los applets en los que pueden modificar los elementos. Sólo es posible mover el punto de color azul.</p> <p>Una de las mayores dificultades de estas cuestiones reside en la comprensión de la propia pregunta. Se han realizado de forma intencionada para estudiar el grado de comprensión que tiene el alumno en este tipo de mensajes. Es más, en algún caso dos preguntas son muy parecidas, y en ellas sólo cambia la redacción, es el caso de los apartados d) y f), en los que se desea que los puntos tracen dos líneas paralelas, y paralelas a su vez al eje de simetría, pero la formulación es distinta.</p> <p>La pregunta g) puede ser engañosa, si se coloca el punto azul sobre el segmento que une P y Q, el punto azul coincidirá con el rojo, pero la respuesta no es correcta porque se puede colocar en esos puntos y en cualquier otro del eje de simetría.</p>
5.3.6	<p>Se quiere comprobar si los alumnos relacionan las ideas de simetría axial y la rotación. Para los alumnos de 1º de ESO estas preguntas tuvieron bastante dificultad.</p>
5.3.7	<p>Se plantea el problema del cambio de orientación provocado por la simetría. Al principio se pregunta para tres casos particulares, con el fin de que el estudiante vea que en algunos casos se puede pasar de una figura a otra mediante traslaciones (al mover el punto A) y rotaciones (al hacer girar B alrededor de A) como ocurre en el apartado b. En cambio, en otros casos es imposible pasar de una a otra (apartados a y c).</p> <p>Las dos últimas preguntas intentan ir más allá y plantean cuestiones sobre la relación entre la paridad del número de simetrías realizadas y la posibilidad de pasar de una figura a otra. Fueron mucho más difíciles de responder que las anteriores, porque requieren un pensamiento mucho más abstracto y la realización de generalizaciones.</p>
5.3.8	<p>El trabajo que se les pide aquí es distinto a todo lo que se ha hecho hasta este momento. Ya no pueden mover puntos o banderas, porque es el mismo eje de simetría lo que han de modificar y comprobar si el mosaico simétrico coincide con el original.</p> <p>Los mosaicos b) y c) resultaron mucho más difíciles.</p>
5.3.9	<p>A la actividad anterior se le añade una nueva dificultad al no disponer del eje de simetría deben realizar las transformaciones con su imaginación.</p> <p>Muchos alumnos asignaron ejes al mosaico b).</p> <p>Las preguntas en las que se pide dibujar la trama de ejes de simetría se han añadido después de la experimentación por lo que no se tienen resultados.</p> <p>Teniendo en cuenta la experiencia con los alumnos, resulta una pregunta más adecuada para el alumnado de 3º que para los de 1º.</p>



Simetría Rotacional:

	5.4.1. Pregunta 1. Simetría rotacional en los símbolos.
	5.4.2. Pregunta 2. Simetría rotacional en el diseño gráfico.
	5.4.3. Pregunta 3. Las baldosas de cerámica.
	5.4.4. Pregunta 4. Forma simétrica de una dada.
	5.4.5. Pregunta 5. La simetría en la puerta y la flor.
	5.4.6. Pregunta 6. Simetría rotacional en los mosaicos.
	5.4.7. Pregunta 7. Mosaicos con simetría rotacional 2.
	5.4.8. Pregunta 8. Mosaicos con simetría rotacional 3.
	5.4.9. Descargar hoja de respuestas

Pregunta	Comentarios
5.4.1	El contexto resulta familiar y atractivo para los estudiantes. Sólo se presentan figuras con simetría rotacional de orden 2 o sin simetría rotacional (orden 1). Los símbolos que no tienen simetría rotacional han sido seleccionados entre los que tienen simetría axial, para que den a los alumnos la sensación de “tener cierta simetría”. Se persigue que discriminen entre los dos tipos de simetría
5.4.2	Se combinan los logotipos de empresas y los símbolos que se insertan en las banderas Se vuelve a presentar la discriminación entre los dos tipos de simetría en el caso de la figura c) que no tiene simetría rotacional aunque sí tiene simetría axial. La figura e) tiene simetría rotacional de orden 2 aunque la parte negra caerá sobre la blanca y viceversa, el enunciado ya ha advertido de esa posibilidad.
5.4.3	En este caso, ya no se proporciona la ayuda del deslizador que gira la baldosa. A esto se añade el que se proponen figuras que poseen simetría axial y rotacional, algunas sólo tienen una de ellas y otras tienen de los dos tipos. Las únicas que sólo poseen simetría rotacional son c) (orden 2) y e) (orden 4). Las colocadas en los apartados b) y h) tienen simetría rotacional de orden 2 por tener dos ejes de simetría axial perpendiculares. El azulejo del apartado d) tiene simetría rotacional de orden 4 y cuatro ejes de simetría axial.
5.4.4	Esta pregunta se añadió posteriormente. No pudo ser evaluada.
5.4.5	Con esta pregunta se pretende revisar las ideas que los alumnos han adquirido sobre el concepto de simetría rotacional y cómo las relacionan con otras ideas geométricas: direcciones, rectas, puntos invariantes Una de las dificultades de estas cuestiones reside en la comprensión de la propia pregunta. Se han realizado de forma intencionada para estudiar el grado de comprensión que tiene el alumno en este tipo de mensajes Las que tuvieron más errores: a) y d). Las dificultades venían de la comprensión de la frase con la que se les formula la pregunta.
5.4.6	La posibilidad de que los mosaicos puedan girar será de gran ayuda en esta primera cuestión con mosaicos. La mayor cantidad de errores se produjo en los puntos B2 y C2
5.4.7	Esta prueba es del mismo tipo que la anterior. Presenta la dificultad adicional

	de no disponer de la imagen girada del mosaico. La mayor cantidad de errores se produjo en los puntos A2 y C2
5.4.8	Los mosaicos con simetría rotacional de varios órdenes (c, d y e) resultaron mucho más difíciles. El f) tuvo menos errores. Puede ser debido a que, al no tener figuras que distraigan la atención, es más fácil encontrar las simetrías rotacionales.



En las páginas siguientes se adjuntan las hojas de respuestas y las plantillas de corrección para cada una de las evaluaciones:

Evaluación de la Simetría Axial. Hoja de respuestas

Nombre y apellidos.....Curso.....

En todas las imágenes debes tener en cuenta que al realizar una simetría no importa el color de las figuras, sólo la forma de las figuras representadas.

1. Banderas		2. Letras				3. Baldosas		4. Logotipos	
	Ejes		Ejes		Ejes		Ejes		Ejes
a) Austria		A		M		a)		a)	
b) Canadá		B		N		b)		b)	
c) India		C		O		c)		c)	
d) Islandia		E		S		d)		d)	
e) Jamaica		F		X		e)		e)	
f) Reino Unido		H		Z		f)		f)	
g) Marruecos		K				g)		g)	
h) Túnez						h)		h)	

5. Simetría en el jardín.		6. Composiciones		7. Orientación		8. Mosaicos 1		9. Mosaicos 2	
	V/F		V/F		V/F		Cant		Cant
a)		a)		a)		a)		a)	
b)		b)		b)		b)		b)	
c)		c)		c)		c)		c)	
d)				d)		d)		d)	
e)				e)					
f)				f)					
g)									

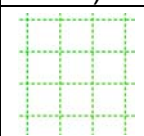
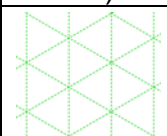
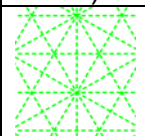
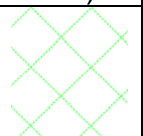

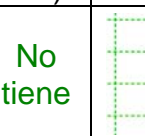

Evaluación de la Simetría Axial Plantilla de corrección

Nombre y apellidos.....Curso.....

1. Banderas		2. Letras				3. Baldosas		4. Logotipos	
	Ejes		Ejes		Ejes		Ejes		Ejes
a) Austria	2	A	v	M	v	a)	4	a)	3
b) Canadá	1	B	h	N	-	b)	0	b)	0
c) India	2	C	h	O	v h	c)	2	c)	1
d) Islandia	1	E	h	S	-	d)	1	d)	2
e) Jamaica	2	F	-	X	v h	e)	0	e)	2
f) Reino Unido	0	H	v h	Z	-	f)	0	f)	0
g) Marruecos	1	K	h			g)	1	g)	3
h) Túnez	1					h)	2	h)	3

5. Simetría en el jardín.		6. Composiciones		7. Orientación		8. Mosaicos 1		9. Mosaicos 2	
	V/F		V/F		V/F		Cant		Cant
a)	F	a)	F	a)	F	a)	2	a)	3
b)	V	b)	F	b)	V	b)	3	b)	0
c)	V	c)	V	c)	F	c)	6	c)	2
d)	F			d)	F	d)	2	d)	6
e)	V			e)	V				
f)	V			f)	Impar				
g)	F								

Tramas de los mosaicos. Preguntas 8 y 9

8 a)	8 b)	8 c)	8 d)	9 a)	9 b)	9 c)	9 d)
					No tiene		

Evaluación de la Simetría Rotacional Hoja de respuestas

Nombre y apellidos..... Curso

En todas las imágenes debes tener en cuenta que al realizar una rotación no importa el color de las figuras, sólo la forma de las figuras representadas.

1. Símbolos						2. Logotipos			3. Baldosas		
Símb	Ord	Ang	Símb	Ord	Ang		Ord	Ang		Ord	Ang
A			M			a)			a)		
Carta			N			b)			b)		
\$			O			c)			c)		
€			%			d)			d)		
#			X			e)			e)		
H			Z			f)			f)		
!						g)			g)		
									h)		

5. Forma		6. Puerta y flor	
	V/F		V/F
a1)		a)	
a2)		b)	
b1)		c)	
b2)		d)	
c1)		e)	
c2)		f)	

7. Mosaicos 1		8. Mosaicos 2		9, Mosaicos 3	
Punto	Orden	Punto	Orden		Órdenes
A2		A2		a)	
B2		B2		b)	
C2		C2		c)	
D2		D2		d)	
E2		E2		e)	
F2		F2		f)	

Evaluación de la Simetría Rotacional Plantilla de corrección.

Nombre y apellidos..... Curso

1. Símbolos						2. Logotipos			3. Baldosas		
Símb	Ord	Ang	Símb	Ord	Ang		Ord	Ang		Ord	Ang
A	1	360°	M	1	360°	a)	3	120°	a)	4	90°
Carta	2	180°	N	2	180°	b)	2	180°	b)	2	180°
\$	2	180°	O	2	180°	c)	1	360°	c)	2	180°
€	1	360°	%	2	180°	d)	5	72°	d)	1	360°
#	2	180°	X	2	180°	e)	2	180°	e)	1	360°
H	2	180°	Z	2	180°	f)	2	180°	f)	4	90°
!	1	360°				g)	3	120°	g)	1	360°
									h)	2	180°

5. Forma		6. Puerta y flor	
	V/F		V/F
a1)	V	a)	V
a2)	F	b)	V
b1)	F	c)	V
b2)	F	d)	F
c1)	V	e)	V
c2)	V	f)	V

7. Mosaicos 1		8. Mosaicos 2		9, Mosaicos 3	
Punto	Orden	Punto	Orden		Órdenes
A2	2	A2	4	a)	3
B2	1	B2	2	b)	2
C2	3	C2	1	c)	2, y 4
D2	6	D2	2	d)	2, 3 y 6
E2	1	E2	2	e)	2, 3 y 6
F2	2	F2	1	f)	No tiene