NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 78, noviembre de 2011, páginas 73–94

Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de Secundaria

Silvia Villarroel (Escuelas de Enseñanza Media N° 227, N° 498 y N° 353, Argentina)
Natalia Sgreccia (Universidad Nacional de Rosario y Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Argentina)

Fecha de recepción: 21 de febrero de 2011
Fecha de aceptación: 3 de septiembre de 2011

Resumen

Este trabajo se propone identificar y caracterizar los materiales didácticos concretos que pueden utilizarse en la enseñanza de los contenidos geométricos en primer año de la Educación Secundaria. Además, interesa reconocer las habilidades geométricas que tales materiales permiten desarrollar al ser aplicados. La investigación se fundamenta teóricamente en las ideas que sustenta la Educación Matemática Realista. Mediante un enfoque cualitativo de alcance exploratorio-descriptivo, se distinguen siete grandes grupos de materiales: modelos fijos 2D y 3D, rompecabezas geométricos, tangram, geoplano, transformaciones dinámicas, origami o papiroflexia, objetos del entorno real. Los mismos, dependiendo de la intencionalidad didáctica, favorecen el desarrollo de variadas habilidades geométricas. Sobre esto, se presentan ejemplos de actividades.

Palabras clave

Materiales didácticos concretos – Habilidades geométricas – Geometría – Educación Secundaria – Educación Matemática Realista.

Abstract

This paper intends to identify and characterize didactical concrete materials that can be used in the teaching of geometrical content in first year of Secondary Education. In addition, to recognize the geometrical skills that such materials can develop to be applied. Research is theoretically based on the ideas of the Realistic Mathematics Education. Through a qualitative approach of an exploratory-descriptive scope, seven large groups of materials are distinguished: 2D and 3D fixed models, geometrical puzzles, tangram, geoboard, dynamical transformations, origami, objects of the real environment. These ones, depending on the didactical intention, favor the development of varied geometrical skills. About this, some examples of tasks are presented.

Keywords

Didactical concrete materials – Geometrical skills – Geometry – Secondary Education – Realistic Mathematics Education.

1. Planteamiento del problema

De todas las ramas de la Matemática, la Geometría es una de las más intuitivas, concretas y ligadas a la realidad que conocemos. Por ello, ofrece numerosas posibilidades para experimentar, mediante materiales adecuados, sus métodos, conceptos, propiedades y problemas. En la actualidad se conoce que existen muchos materiales que pueden emplearse en el trabajo de aula. Algunos de ellos han sido diseñados específicamente para estudiar Geometría y otros pueden ser adaptados para utilizarse en su enseñanza. Sin embargo, son pocos los docentes que están al tanto de ello o que se animan a aplicarlos en sus clases. En muchas ocasiones, esto se debe al desconocimiento tanto del manejo de este tipo de herramientas como de las oportunidades que brinda su utilización. Estas oportunidades están asociadas al enorme potencial que tienen los materiales didácticos concretos en el desarrollo de habilidades geométricas. Por lo tanto, este trabajo tiene como propósito hacer un recorrido general sobre la oferta de materiales existentes en el mercado y sobre aquellos que, sin ser comercializados, pueden realizar importantes aportes cuando se los utiliza en las clases de Geometría de la Educación Secundaria. Además, este trabajo intenta identificar las habilidades geométricas que desarrolla la utilización de cada uno de ellos. De este modo es posible reconocer el potencial didáctico de los mismos para así propiciar una difusión fundamentada de ellos.

En este marco de ideas, surgen los siguientes interrogantes: ¿Cuáles son los materiales didácticos concretos que se pueden utilizar para la enseñanza de los contenidos geométricos en 1° Año de la Educación Secundaria (alumnos de 13 años de edad)? ¿Qué habilidades geométricas permite desarrollar la utilización de estos materiales?

2. Marco teórico

Este trabajo se enmarca dentro de la **corriente didáctica** de la escuela de Hans Freudenthal (1905-1990), desarrollada en Holanda desde fines de los años sesenta y conocida como Educación Matemática Realista (EMR). Esta corriente le asocia suma importancia al uso de situaciones realistas, entendidas como razonables, realizables o imaginables, en forma concreta. Concibe a la Matemática escolar como un conjunto de actividades progresivas y reflexivas de simbolización, modelización, esquematización y algebrización, guiadas por un docente capaz de anticipar, organizar didácticamente y facilitar estas trayectorias de aprendizaje. Con el objeto de preservar el sentido de la actividad matemática, se insiste en que desde la enseñanza se mantenga accesible el camino de retorno a las situaciones y contextos que sirvieron de fuente de inspiración para dicha actividad. De esta manera, el foco de atención en la Educación Matemática no es la Matemática como un sistema cerrado, sino la actividad, el proceso de matematización.

La EMR refleja un determinado punto de vista sobre la Matemática como asignatura, sobre cómo la aprenden los estudiantes y sobre cómo deberían enseñarla los docentes. Es posible caracterizar esta perspectiva en términos de seis principios donde cada uno refleja una parte de la identidad de la EMR (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2008):

<u>Principio de actividad</u>. Los alumnos aprenden Matemática haciendo y son tratados como participantes activos en el proceso educativo, donde desarrollan toda clase de herramientas y discernimientos matemáticos por sí mismos.

<u>Principio de realidad</u>. Resulta fundamental el uso de contextos y situaciones realistas, en el sentido de realizables o imaginables, no sólo como dominio de aplicación, sino también y sobre todo como punto de partida para la matematización.

<u>Principio de niveles</u>. Al aprender Matemática los estudiantes pasan por diversos niveles de comprensión: capacidad para inventar soluciones informales relacionadas con un contexto (nivel situacional), creación de diversos niveles de atajos y esquematizaciones (nivel referencial), desarrollo mediante la exploración, reflexión y generalización de las esquematizaciones, superando la referencia al contexto (nivel general), adquisición de una comprensión de los principios subyacentes y el discernimiento de relaciones más amplias (nivel formal). La génesis y el desarrollo de modelos matemáticos a partir de la organización de situaciones realistas cumplen la función de puentes entre los distintos niveles (de informales a formales) de matematización.

Principio de reinvención guiada. Se trata de un proceso de aprendizaje por medio del cual el conocimiento matemático formal en sí mismo puede ser reconstruido. La Educación Matemática, mediante los profesores, debe dar a los estudiantes una oportunidad de re-inventar la Matemática.

Principio de interrelación. Resolver problemas de contexto rico suele involucrar la aplicación de una amplia variedad de herramientas matemáticas. La fuerte interrelación de los distintos ejes y unidades curriculares da una mayor coherencia a la enseñanza desde la EMR y posibilita distintos modos de matematizar las situaciones.

Principio de interacción. Se considera al aprendizaje de la Matemática como una actividad social, donde los estudiantes dan a conocer, unos a otros, sus estrategias e inventos. Al escuchar lo que otros averiguan y comentar estos hallazgos, los estudiantes nutren sus ideas y mejoran sus estrategias. La interacción lleva a la reflexión de los alumnos, favoreciendo así una comprensión más profunda.

En relación con el objeto de estudio de este trabajo, Freudenthal (1973, citado por Villarroya, 1994), citando a J. J. Sylvester (s.f.), decía:

> La Geometría sólo puede tener sentido si explota su relación con el espacio vivenciado. Si el educador elude este deber, desperdicia una ocasión irrecuperable. La Geometría es una de las mejores oportunidades que existen para aprender a matematizar la realidad. Es una ocasión única para hacer descubrimientos. Los descubrimientos realizados por uno mismo, con las propias manos y con los propios ojos, son más convincentes y sorprendentes. Hasta que de alguna forma se puede prescindir de ellas, las figuras espaciales son una guía indispensable para la investigación y el descubrimiento (p. 95).

En este estudio se adhiere a esta postura en cuanto a que la manipulación dinámica de objetos concretos permite hacer descubrimientos geométricos propios y construir mentalmente los objetos matemáticos correspondientes, poniendo en juego en este proceso diversas habilidades geométricas.

De acuerdo a lo expresado en el **Diseño Curricular Jurisdiccional** (DCJ) de la provincia de Santa Fe en relación al estudio y enseñanza de la Geometría, se recomienda su renovación y revalorización en los distintos niveles educativos (Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, 1999). En el 1° Año de la Educación Secundaria se requiere desarrollar las ideas de formas geométricas y favorecer al máximo la intuición espacial, apuntando hacia una imaginación de formas espaciales originales que trascienda la mera identificación de figuras y cuerpos regulares.

Lo anterior se pretende lograr a través del reconocimiento, la producción, el análisis y la construcción de figuras y cuerpos geométricos, argumentando en base a propiedades, en situaciones problemáticas que requieran: determinar puntos que cumplan condiciones referidas a distancias y construir circunferencias, círculos, mediatrices y bisectrices como lugares geométricos; explorar diferentes construcciones de triángulos y argumentar sobre condiciones necesarias y suficientes para su congruencia; construir polígonos utilizando regla no graduada y compás, a partir de diferentes informaciones, y justificar los procedimientos utilizados en base a datos o propiedades de las figuras; formular conjeturas sobre las relaciones entre distintos tipos de ángulos a partir de propiedades del paralelogramo y producir argumentos que permitan validarlas (opuestos por el vértice, adyacentes y los determinados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal); analizar afirmaciones sobre propiedades de las figuras y argumentar su validez, reconociendo los límites de las pruebas empíricas.

A fin de organizar el tratamiento de los contenidos conceptuales citados en el documento de referencia mediante el uso de materiales didácticos concretos, se consideran los siguientes: Posiciones entre rectas y planos; Sistemas de referencias para la ubicación de puntos en el plano; Cuerpos poliedros; Cuerpos redondos; Ángulos; Lugares geométricos -Circunferencia y círculo, Mediatriz y bisectriz, Alturas y medianas-; Polígonos; Transformaciones; Teorema de Thales; Semejanza.

A la enseñanza de la Geometría se puede acceder por dos vertientes: lógica-racional, la cual define a la Geometría como una teoría axiomática que se desarrolla bajo leyes rigurosas de razonamiento deductivo, o la más intuitiva y experimental, basada en la búsqueda, descubrimiento y comprensión por parte del sujeto que aprende de los conceptos y propiedades geométricas en función de explicarse aspectos del mundo en que vive (Bressan, Bogisic y Crego, 2000). La más cercana a las posibilidades y necesidades cognitivas de los alumnos de la Educación Secundaria es la segunda. Asimismo el docente debe saber que su meta en este nivel es crear las condiciones para que el alumno pueda avanzar, en estudios posteriores, hacia la primera.

Bishop (1983) define: “La Geometría es la Matemática del espacio” (p. 16) y es a través del estudio del espacio físico y de los objetos que en él se encuentran por donde el alumno ha de acceder a las captaciones más abstractas de la misma. Esto no implica que su enseñanza en la educación básica deba quedar restringida al espacio físico. El pensamiento geométrico puede tomar a éste como punto inicial, pero ha de avanzar hacia el establecimiento de imágenes, relaciones y razonamientos manejables mentalmente. Por otro lado, la interrelación entre el espacio físico y el matemático no se corta en un punto determinado del desarrollo humano, ni aún en el del matemático profesional. El pensamiento matemático, aunque sea el más abstracto, suele buscar y crear modelos físicos o gráficos para representarse y, viceversa, el mundo físico tiende a ser explicado a través de modelos matemáticos y la Geometría suele ser muy útil en estos casos.

Se admite entonces que el sentido del espacio, y por ende el geométrico, se inicia en las personas mediante la experiencia directa con los objetos del mundo/entorno circundante para enriquecerse a través de actividades de construcción, dibujo, medida, visualización, comparación, transformación, discusión de ideas, conjetura y comprobación de hipótesis, facilitándose así el acceso a la estructura lógica y modos de demostración de esta disciplina.

Desde este punto de vista, la enseñanza de la Geometría debe orientarse al desarrollo de **habilidades** específicas. Según Hoffer (1981), las habilidades básicas que una buena enseñanza de la Geometría debería ayudar a desarrollar son clasificadas en cinco áreas: visuales, de comunicación, de dibujo y construcción, lógicas o de razonamiento y de aplicación o transferencia.

1. <u>Habilidades visuales</u>: Visualizar implica tanto representar lo mental a través de formas visuales externas como representar a nivel mental objetos visuales. El proceso de visualización requiere de dos tipos de habilidades globales: captación de representaciones visuales externas y procesamiento de imágenes mentales. A su vez, comprende siete habilidades específicas que son consideradas como básicas: coordinación visomotora, percepción figura-fondo, constancia perceptual o constancia de forma tamaño y posición, percepción de la posición en el espacio, percepción de relaciones espaciales entre objetos, discriminación visual y memoria visual. Muchos conceptos en Geometría no pueden ser reconocidos y comprendidos a menos que el estudiante pueda percibir visualmente ejemplos e identificar figuras y propiedades por asociación con conocimientos previos. El proceso de aprendizaje de la Geometría requiere de la capacidad de distinguir las características esenciales de una configuración particular que aparece dibujada en concreto o mentalmente, a partir de las características accidentales o irrelevantes. Resulta sumamente importante dar a los alumnos variedad en los estímulos visuales para que puedan generalizar sus imágenes y conceptos acerca de las propiedades geométricas, dejando de lado los aspectos no matemáticos e irrelevantes para el problema planteado (Bressan, Bogisic y Crego, 2000).

2. Habilidades de comunicación: Abarcan la competencia del alumno para leer, interpretar y explicar, en forma oral y escrita, información (en este caso geométrica), usando el vocabulario y los símbolos del lenguaje matemático en forma adecuada. Habilidades de comunicación son: escuchar, localizar, leer e interpretar información geométrica presentada en diferentes formas, así como denominar, definir y comunicar información geométrica en forma clara y ordenada, utilizando los lenguajes natural y simbólico apropiados. Resulta esencial que los alumnos y el docente analicen diversos significados e interpretaciones de las palabras, frases y símbolos, de manera que cada uno sepa claramente lo que el otro entiende y quiere decir al utilizar determinadas expresiones lingüísticas. Según Van Hiele (1970, citado por Bressan, Bogisic y Crego, 2000), los distintos niveles de razonamiento geométrico "no sólo se reflejan en la forma de solucionar problemas sino en la forma de expresarse y en el significado que se le da a determinado vocabulario" (p. 63). De allí la necesidad de que el docente interprete el vocabulario que usan sus alumnos, pero al mismo tiempo tienda a mejorarlo y rigorizarlo, proveyéndoles de mejores herramientas para expresar sus pensamientos.

3. Habilidades de dibujo y construcción: Están ligadas a las de uso de representaciones externas, como son: una escritura, un símbolo, un trazo, un dibujo, una construcción, etc., con las cuales se puede dar idea de un concepto o de una imagen interna relacionada con la Matemática. Estos conceptos e imágenes de los que trata la Matemática son objetos mentales con existencia real pero no física. Ni los cuerpos que confeccionamos ni las figuras que dibujamos son las "figuras geométricas" de las que trata la Geometría. Son sólo modelos más o menos precisos de las ideas que tenemos respecto de ellas. Las representaciones o modelos geométricos externos confeccionados por el docente o realizados por los propios alumnos no sólo sirven para evidenciar conceptos e imágenes visuales internas, sino también se constituyen en medios de estudio de propiedades geométricas, sirviendo de base a la intuición y a procesos inductivos y deductivos de razonamiento. En su aprendizaje de la Geometría, los alumnos deben desarrollar habilidades de dibujo y construcción relacionadas con: la representación de figuras y cuerpos, la reproducción a partir de modelos dados y la construcción sobre la base de datos dados. El docente ha de tener especial cuidado al representar conceptos geométricos, ya que a menudo representaciones únicas o demasiado imprecisas suelen conducir a errores.

4. Habilidades lógicas o de razonamiento: Están relacionadas con las habilidades necesarias para desarrollar un argumento lógico. Habitualmente en Matemática, cuando se habla de razonamiento se hace referencia al razonamiento lógico. Las habilidades lógicas a desarrollar con el estudio de la Geometría en el período escolar de interés son: abstracción de características o propiedades de las relaciones y de los conceptos geométricos; generación y justificación de conjeturas; argumentación; formulación de contraejemplos; seguimiento de una serie de argumentos lógicos; realización de deducciones lógicas. Reconociendo que las habilidades lógicas son relevantes en el desarrollo del razonamiento matemático, no pueden dejarse de lado las habilidades de creación, como por ejemplo: crear, inventar, imaginar, intuir situaciones, explorar y descubrir conceptos, regularidades y relaciones.

5. Habilidades de aplicación o transferencia: Se espera que los alumnos sean capaces de aplicar lo aprendido no sólo en el mismo contexto geométrico, sino también que modelen geométricamente situaciones del mundo físico, de otras disciplinas o de la vida misma. Al aprender Geometría los alumnos están en condiciones de desarrollar habilidades de aplicación o transferencia relacionadas con: sensibilización acerca de los aspectos visuales y geométricos del mundo que los rodea; interrogación acerca de por qué las cosas tienen esa forma o guardan tal o cual relación; representación, descripción y explicación de ideas o imágenes en términos geométricos (verbales, visuales o simbólicos); análisis de representaciones para ver si se ajustan al concepto, imagen o problema planteado. Tishman, Perkins y Jay (1995) sostienen que si no existe una transferencia rica y plena de lo que los alumnos aprenden, la educación no cumple su deber. Sin transferencia no existe un proceso rico de aprendizaje sino yuxtaposición de conocimientos fragmentados, aplicables sólo a casos particulares y previsibles. Aprender a transferir o aplicar conocimientos, estrategias y actitudes de un contexto en otro y a buscar relaciones entre ellos es un proceso que hay que enseñar, ya que por

lo general no se realiza de manera espontánea. Son recursos para enseñar a transferir: la búsqueda de analogías y generalizaciones entre situaciones y formas de solución; el uso de distintas estrategias para un mismo problema; el descubrimiento de aplicaciones de un contenido en diferentes contextos; el establecimiento de relaciones entre lo que se conoce informalmente y lo que se trata en la clase; etc.

Desde la perspectiva de la EMR, el término manipulable se usa como sustantivo colectivo para material táctico y representaciones gráficas, que funcionan como modelos. El término modelo abarca las representaciones de las situaciones donde se reflejan aspectos esenciales de los conceptos y relaciones matemáticas que son relevantes para solucionarlas. No se considera en sentido literal como ejemplo de algo o sólo involucrando objetos y símbolos matemáticos puros; sino que abarca materiales, bosquejos visuales, situaciones paradigmáticas, esquemas, diagramas, símbolos.

En la EMR los modelos deben tener por lo menos dos características importantes: estar *enraizados en contextos realistas*, imaginables, y a la vez tener suficiente *flexibilidad* para ser aplicados en un nivel más avanzado o más general. Los estudiantes siempre deberían poder volver a niveles más bajos reencontrando los orígenes de los modelos más abstractos, lo cual torna a los modelos muy poderosos. Otro requerimiento es que sean *viables*, donde los alumnos deben poder re-inventar esos modelos por sí mismos, en concordancia con la mirada de la EMR sobre los estudiantes. Para lograrlo, los modelos deberían: comportarse de una manera natural y autoevidente (en contraposición con artificial y forzada), ajustarse a las estrategias informales de los alumnos (como si ellos los pudieran haber inventado) y ser fácilmente adaptados a otras situaciones (polivalentes).

En la EMR hay un uso representacional del modelo: como modelo de trabajo (se ejerce una acción sobre él) y como modelo de reflexión (a partir del cual se visualizan y derivan propiedades). Es importante aclarar que el mero hecho de usar materiales manipulables no es "garantía de éxito". No hay que olvidarse tampoco de que el material puede ser concreto, pero que la idea está en la forma en que el alumno entiende el material y canaliza sus acciones sobre él. Los recursos no muestran por sí mismos una idea. Asimismo tampoco podemos enseñar intentando que nuestros alumnos "vean" la interpretación correcta de los materiales que nosotros les presentamos para trabajar. El objetivo de una actividad debería estar orientado a permitir y favorecer que afloren todas las interpretaciones posibles. Para ello el docente debe estar capacitado para conocer previamente todas las interpretaciones que pueden surgir en el aula y no limitar el descubrimiento de sus alumnos. Para la EMR no es el material el que transmite cierto conocimiento. El material es una ayuda para resolver ciertos problemas prácticos en un determinado contexto y se usa para provocar acciones (mentales, más allá de físicas).

Por otro lado, son varias las definiciones que se proponen para las nociones de recurso y material didáctico. Por ejemplo, Álvarez (1996) prescinde del término recurso y utiliza sólo el de material didáctico para referirse a "todo objeto, juego, medio técnico, etc. capaz de ayudar al alumno a suscitar preguntas, sugerir conceptos o materializar ideas abstractas" (p. 9). De forma similar, se expresan Alsina, Burgués y Fortuny (1988a) al afirmar que "bajo la palabra material se agrupan todos aquellos objetos, aparatos o medios de comunicación que pueden ayudar a describir, entender y consolidar conceptos fundamentales en las diversas fases de aprendizaje" (p. 13). Estos autores tampoco usan el término recurso aunque en una posterior clasificación de materiales incluyen los diseñados con fines educativos como caso particular, al igual que los materiales para leer o los dedicados a la comunicación audiovisual.

Al reflexionar sobre la relación existente entre los recursos y los materiales didácticos, Coriat (1997) opta por hacer explícita la diferencia entre ambos términos, entendiendo por recurso didáctico a cualquier material, no diseñado específicamente para el aprendizaje de un concepto o procedimiento que el profesor decide incorporar en sus enseñanzas y por material didáctico al que se diseña con fines educativos (si bien, en general, un buen material didáctico trasciende la intención de uso original y admite variadas aplicaciones; por ello, no hay una raya que delimite claramente qué es un material didáctico y qué es un recurso). Siguiendo con esta última clasificación, en este trabajo se ha decidido englobar ambos términos en materiales didácticos, en concordancia con lo expuesto sobre el tema por Alsina, Burgués y Fortuny (1988a). Así, se entiende por *materiales didácticos concretos* a todos aquellos objetos usados por el profesor y/o los alumnos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática con el fin de lograr ciertos objetivos específicos. Es decir, aquellos objetos que pueden ayudar a construir, entender o consolidar conceptos, ejercitar y reforzar procedimientos e incidir en las actitudes de los alumnos en las diversas fases de sus procesos de aprendizaje. Cabe aclarar que no se considerarán a los instrumentos de dibujo geométrico de uso elemental (regla, compás), ya que los mismos merecen un tratamiento en particular.

Debemos tener en cuenta que en general no existe una correspondencia biunívoca entre un material y un contenido. Un mismo contenido ha de trabajarse, en lo posible, con diversidad de materiales y, recíprocamente, la mayoría de los materiales son utilizables para realizar actividades diversas (Alsina, Burgués y Fortuny, 1988a). En ello radica la importancia de indagar sobre todas las posibles representaciones que puede provocar un determinado material didáctico.

Por otro lado, el **modelo de Van Hiele** (1957) es un punto de referencia para la enseñanza de la Geometría, que tiene en cuenta su aprendizaje y, en función a ello, sugiere pautas a seguir, explicando cómo aprenden los alumnos y cómo evoluciona su pensamiento. Este modelo estratifica el conocimiento en una serie de niveles que permiten categorizar los distintos grados de representación del espacio. Ha sido validado por extensos estudios de psicólogos soviéticos y actualmente está siendo utilizado y recomendado por sociedades de profesores, como el National Council of Teachers of Mathematics en Estados Unidos, la Sociedad Andaluza en la enseñanza de las Matemáticas y la Federación Española de Sociedades de profesores de Matemáticas en España. Tuvo su origen en Holanda, en la década de 1960 (al igual que la EMR), donde los esposos Van Hiele, profesores de Matemática, se encontraron con problemas para poder hacer entender a sus alumnos las definiciones, los procesos y las situaciones relacionadas casi exclusivamente con la enseñanza de la Geometría.

El modelo consta principalmente de dos partes. La primera de ellas es descriptiva, ya que identifica una secuencia de tipos de razonamiento que Van Hiele define como “niveles de razonamiento”, a través de los cuales progresa la capacidad de razonamiento matemático de los individuos desde que inician su aprendizaje hasta que llegan a su máximo grado de desarrollo intelectual en este campo. La otra parte del modelo da las directrices a los docentes sobre cómo pueden ayudar a sus alumnos para que puedan alcanzar con más facilidad un nivel superior de razonamiento; estas directrices se conocen con el nombre de “fases de enseñanza/aprendizaje”.

La presencia de niveles de razonamiento en la enseñanza de la Geometría se debe a que existen diferencias en las formas de aprender, en los modos de trabajar y de expresarse en los distintos períodos por los que atraviesa una persona. Los niveles de razonamiento se definen como estadios del desarrollo de las capacidades intelectuales del estudiante y no están directamente ligados con el crecimiento o la edad. Estos niveles se repasan sucesivamente en cada ocasión en que el estudiante se encuentra con un nuevo contenido matemático y, a medida que se va avanzando en su conocimiento, los primeros niveles son superados de una manera más rápida que en ocasiones anteriores.

Tales niveles son: Nivel 0 o de Visualización/Reconocimiento; Nivel 1 o de Análisis; Nivel 2 o de Deducción informal/Clasificación; Nivel 3 o de Deducción formal; Nivel 4 o de Rigor. Para un mayor detalle de los mismos consultar, por ejemplo: Jaime y Gutiérrez (1990), Corberán, Gutiérrez, Huerta, Jaime, Margarit, Peñas y Ruiz (1994), Vilchez (2004), entre otros. Entre sus características se encuentran (Crowley, 1989):

- La *jerarquización y secuencialidad* de los niveles se refiere a la necesidad de transitar primero un nivel para pasar al siguiente superior, siendo obligatorio cursar todos sin omitir ninguno.

- La relación entre el *lenguaje* y los niveles está asociada al desarrollo del estudiante y la manera en que se comunica con los demás, ya sea con el profesor o con sus compañeros. Se dice que a cada nivel de razonamiento le corresponde un lenguaje específico (González y Larios, 2001), a partir de lo que se infiere que dos personas con distinto nivel de razonamiento, difícilmente se entenderán al dialogar sobre cierto contenido.

- El paso de un nivel al siguiente se produce en forma *continua* y de manera gradual, lo cual implica que el estudiante puede presentar rasgos que corresponden a un estado de transición entre dos niveles. La evidencia de este período es que el alumno muestra deseos de usar el nivel superior, pero cuando encuentra dudas tiende a refugiarse en el nivel inferior, donde se siente más cómodo y seguro.

Las fases de enseñanza/aprendizaje a las que alude Van Hiele forman parte de la segunda parte del modelo y se refieren a las directrices para que los profesores puedan ayudar a sus alumnos a subir al siguiente nivel de razonamiento. Se trata de etapas en la graduación y organización de las actividades propuestas para tal fin. Son cinco: Fase 1 o de Información/Indagación; Fase 2 o de Orientación dirigida; Fase 3 o de Explicitación; Fase 4 o de Orientación libre; Fase 5 o de Integración. Para un mayor detalle sobre las fases consultar, por ejemplo, Alsina, Burgués y Fortuny (1988b), entre otros.

Desde esta postura, el alumno es el que construye sus conocimientos a partir de "redes de relaciones", entretejidas en los procesos de construcción y modificación sucesivos en los diversos niveles de razonamiento. El profesor asume un papel de coordinador de los trabajos y acompañante de este proceso. Para ello, busca y diseña los ejercicios, actividades y medios necesarios -como por ejemplo los materiales didácticos más adecuados- para crearle al alumno un ambiente propicio para el desarrollo de su razonamiento, a través del tránsito por los diferentes niveles.

3. Metodología de la investigación

La presente investigación se enmarcó dentro del enfoque <u>cualitativo</u> (Hernández, Fernández y Baptista, 2003), ya que se procuró realizar un aporte hacia la comprensión acerca de la forma en que el uso de materiales didácticos concretos en 1° Año de la Educación Secundaria fomenta el desarrollo de habilidades geométricas. El estudio fue <u>exploratorio</u>, ya que su finalidad ha sido recolectar información referida a los distintos materiales didácticos concretos que pueden ser utilizados en el abordaje de los contenidos geométricos en 1° Año de la Educación Secundaria, y <u>descriptivo</u>, para caracterizarlos y reconocer los aportes que los mismos hagan para el desarrollo de las habilidades geométricas. Se recabó información pertinente haciendo un recorrido por: artículos vinculados al tema de investigación publicados en revistas de Educación Matemática de la última década; memorias de congresos de Educación Matemática del mismo período temporal; empresas que comercialicen materiales didácticos; sitios web referidos a la problemática tratada. Además se tuvo en cuenta, en la recolección de información, la lectura de libros relacionados con la temática. En todos los casos, se priorizaron las fuentes de información provenientes de Latino e Ibero-América.

Se procedió a su estudio utilizando la técnica de <u>análisis del contenido</u> del discurso escrito. Esta técnica de recopilación de información permite, según Ander-Egg (2003), "estudiar el contenido manifiesto de una comunicación, clasificando sus diferentes partes de acuerdo con las categorías establecidas, con el fin de identificar de manera sistemática y precisa las características de dicha comunicación" (p. 245) y al <u>análisis del material didáctico concreto</u> para la enseñanza de Geometría en 1° Año de la Educación Secundaria, comercializado por empresas como apoyo para dicha enseñanza. En particular, el estudio se realizó sobre el contenido de las indicaciones o instrucciones que suelen acompañarlos, complementado por los conocimientos de las autoras como profesoras en Matemática, buscando indicadores asociados a las categorías de análisis. El diseño de la investigación fue <u>no</u>

experimental, debido a que no se manipularon variables, y transversal, ya que se recolectaron datos en un solo momento y en un tiempo único (Bravin y Pievi, 2008).

Una vez recolectados los datos se tabularon en un *Registro de Materiales didácticos concretos* que tiene en cuenta tres dimensiones de análisis. Dicho registro no se detalla en estas páginas debido a la limitación del espacio. Tales dimensiones se encuentran dividas en categorías. Algunas de estas categorías fueron planteadas desde el inicio y orientaron la recolección de información, otras se originaron para dar respuesta a las necesidades que fueron surgiendo en el avance de este proceso, permitiendo -como es propio de estudios cualitativos- profundizar y completar la perspectiva que en cada una de las dimensiones se pretendía dar. Por ello, el Registro de Materiales quedó organizado de la siguiente manera:

Dimensión 1 *"Descripción del material"*. Establece la relación con lo imaginable y la viabilidad del material que plantea en sus principios la EMR. Está constituida por tres categorías:

Categoría 1: Características generales. Descripción del material indicando su tamaño, forma y mencionando las propiedades más sobresalientes que lo caracterizan. En algunos casos se hace referencia a su historia.

Categoría 2: Variantes/Integrantes. Enumera las diferentes presentaciones del material, señalando las particularidades principales que caracterizan a cada tipo o bien mencionando aquellos que participan del agrupamiento por haberlos incluido dentro del mismo.

Categoría 3: Construcción y accesibilidad. Nombra el/los tipos de materiales con que está fabricado, si puede ser construido o elaborado por el docente/alumno, y las posibilidades actuales de acceder al mismo.

Dimensión 2 *"Interés didáctico-matemático"*. Determina el aporte didáctico-matemático que cada material puede realizar. Está formada por tres categorías de análisis:

Categoría 1: Contenidos geométricos conceptuales y procedimentales. Expone los contenidos geométricos (DCJ, 1999) que los materiales concretos considerados permiten abordar.

Categoría 2: Habilidades geométricas. Enumera las habilidades geométricas (Hoffer, 1981) que se pueden desarrollar mediante su implementación.

Categoría 3: Niveles de razonamiento geométrico y fases de enseñanza/aprendizaje. Establece la relación con los niveles de razonamiento (Van Hiele, 1957), justificando el uso del material correspondiente en los diferentes estadios propuestos por el modelo. Además, se señalan las fases de enseñanza/aprendizaje en las cuales el docente puede utilizarlos, de modo tal que se maximice su utilidad.

Dimensión 3 *"Versatilidad del material"*. Plantea la flexibilidad que presenta el material, su aplicación y/o adaptación en niveles más avanzados del aprendizaje, características estas que, desde la visión de la EMR, debe cumplir todo modelo utilizado con fines didácticos. Está integrada por tres categorías de análisis:

Categoría 1: Adaptación a diversos contenidos geométricos. Destaca la variedad de contenidos geométricos en los cuales determinado material puede ser aplicado y si el mismo favorece el desarrollo de nociones espaciales y/o del plano.

Categoría 2: Vinculación con otros ejes del área. Establece vinculación con los demás ejes del área y se mencionan algunas vinculaciones con otros ejes de otras áreas del conocimiento.

Categoría 3: Uso en otros niveles de escolaridad. Plantea la utilidad que puede brindar su implementación tanto en niveles más avanzados como en niveles previos de la escolaridad.

4. Resultados de la investigación

A partir de la investigación realizada, se identificaron **siete grupos de materiales didácticos concretos** que pueden ser utilizados en la enseñanza de los contenidos geométricos de 1° Año de la Educación Secundaria. Para cada grupo identificado, se enumeran las variantes del material didáctico concreto, se presenta una figura ilustrativa y se ejemplifica con una actividad, indicándose las habilidades geométricas que podrían desarrollarse.

4.1 Modelos fijos 2D y 3D

Modelos fijos 2D y 3D: Bloques lógicos de Dienes, Cuerpos geométricos rígidos.

Figura 1: Modelos fijos 2D y 3D

Actividad 1: "Adivina qué es"

Momento 1.1: Comentarios iniciales

Se necesitan: dos conjuntos iguales de cuerpos geométricos rígidos (uno de ellos se exhibe con sus respectivos nombres y el otro se coloca en una bolsa que no permita ver en su interior), tarjetas con las definiciones de cuerpo redondo y cuerpo poliédrico convexo (poliedro convexo).

Momento 1.2: Explora y contesta

Colocados en grupos de dos personas, resuelve:

a. Por turno, cada integrante del grupo extrae un cuerpo geométrico de la bolsa y sin mirarlo lo describe oralmente. Su compañero registra las características mencionadas e intenta identificarlo. De esta manera se continúa hasta terminar con todos los cuerpos.

b. Propongan alguna clasificación entre los cuerpos explorados y justifíquenla. Compartan dicha clasificación con el resto de la clase.

c. Tomen las tarjetas con las definiciones, interprétenlas y compárenla con la clasificación realizada en el ítem anterior.

d. Busquen ejemplos de su alrededor que sean representados por los cuerpos geométricos estudiados.

Habilidades abordadas en la actividad: ***Visuales*** *(coordinación visomotora, constancia perceptual y memoria visual);* ***de comunicación*** *(recolección e interpretación de información, denominación, definición, escucha, registro, lectura y localización de datos y objetos);* ***lógicas o de razonamiento*** *(clasificación, comparación y justificación);* ***de aplicación o transferencia*** *(sensibilización).*

4.2 Rompecabezas geométricos

Rompecabezas geométricos: Poliominós y poliamantes, Rompecabezas de la T, de la H, de la casita o la cruz griega, Rompecabezas de las cuatro T, Rompecabezas de piezas idénticas, Cubos y policubos, Demostraciones dinámicas, Rompecabezas de mosaicos de Van Hiele, Rompecabezas por cuadratura.

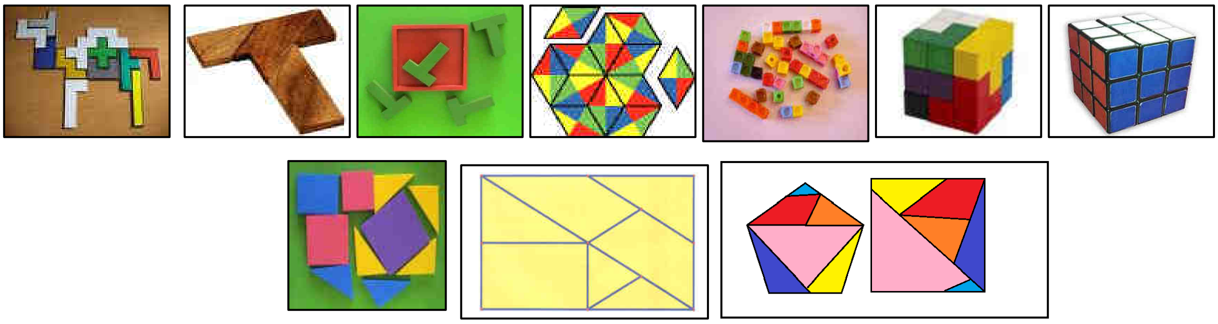

Figura 2: Rompecabezas geométricos

Actividad 2: "Construye con cubos"

Momento 2.1: Comentarios iniciales

Los policubos son cuerpos geométricos formados por cubos iguales encajados o pegados por medio de sus caras. Se pueden considerar diferentes colecciones de agrupaciones de cubos, entre ellas una de las más conocidas es el cubo Soma, formado por siete agrupaciones diseñado por el danés Piet Hein (1905 – 1997) en el año 1936. El objetivo de este rompecabezas es colocarlos de manera que todos juntos formen un cubo 3x3x3.

Momento 2.2: Antes de comenzar

Observa los policubos con los que está formado el cubo de soma:

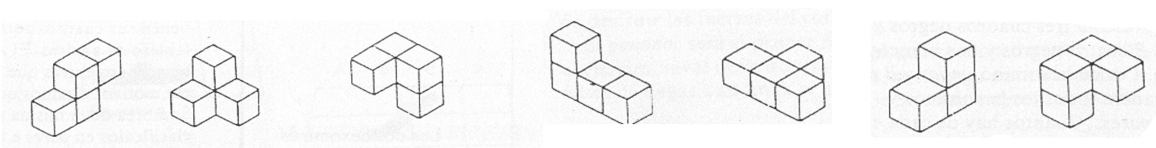

Figura 3: Agrupaciones que originan el cubo Soma

a. Utilizando los cubos representa cada uno de ellos.

b. ¿Por cuántos cubos está formado cada uno de los siete policubos del cubo de Soma?

Momento 2.3: Investiga y luego responde

Con la ayuda de los cubos descubre cuántos policubos diferentes se pueden formar con tres (tricubos), cuatro (tetracubos) y cinco unidades (pentacubos). ¡En este último caso hay 29 disposiciones distintas!

c. Construye dos figuras idénticas a la que aparece en la figura siguiente,utilizando cuatro cubos para cada una. Observa que se pueden encajar una en otra para formar un cubo de tamaño 2x2x2

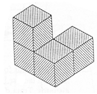

Figura 4: Ejemplo de tetracubo

d. Hay otras dos figuras que se pueden construir con cuatro cubos cada una y que reunidas forman un cubo 2x2x2. Descúbrelas.

e. Piensa: ¿Cuál es el motivo por el que al ubicar de determinada manera estas disposiciones forman un cubo?

Habilidades abordadas en la actividad: ***Visuales*** *(coordinación visomotora, percepción figura-fondo, discriminación visual, constancia perceptual y percepción de la posición en el espacio y de relaciones espaciales entre objetos);* ***de dibujo y construcción*** *(representación y reproducción de figuras a partir de modelos dados);* ***de comunicación*** *(denominación y definición);* ***lógicas o de razonamiento*** *(creación, invención y exploración de figuras);* ***de aplicación o transferencia*** *(interrogación y análisis de representaciones).*

4.3 Tangram

Tangram: Chino, de Fletcher, Cardiotangram, Hexagonal, Pentagonal, Triangular, de Lloyd, Pitagórico, de Brügner, Stomachion, Ovoide, Espacial.

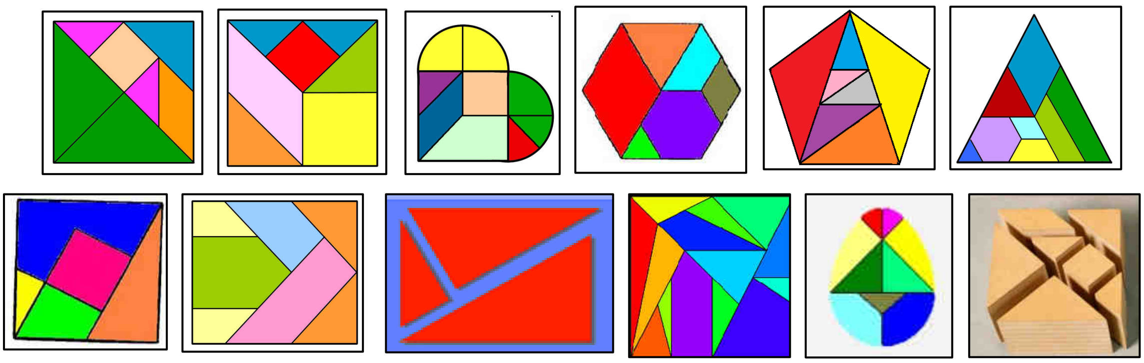

Figura 5: Tangram

Actividad 3: "Juega y aprende con el Tangram"

Momento 3.1: Conociendo el Tangram

El Tangram es un juego chino muy antiguo llamado "*Chi Chiao Pan*" que significa "juego de los siete elementos" o "tabla de la sabiduría". Es un rompecabezas que consta de 7 piezas y requiere de ingenio, imaginación y, sobre todo, paciencia. Estas piezas son llamadas Tans y las figuras obtenidas mediante su composición Tangramas. Todas ellas juntas forman un cuadrado.

Sus piezas son las siguientes: “cinco triángulos de diferentes tamaños”, “un cuadrado”, y “un paralelogramo”. Las reglas del juego son muy simples:

1. Con dichos elementos, ni uno más ni uno menos, se deben construir figuras. Es decir, al momento de formar las distintas figuras no debe quedar ninguna pieza sin utilizar.

2. Las piezas no deben superponerse.

3. El tangram (que estamos utilizando ahora) es un juego planimétrico, es decir, todas las figuras deben estar contenidas en un mismo plano.

4. Se tiene libertad total para elaborar las figuras, por lo cual no es necesario seguir un orden.

Momento 3.2: Construcción y reconocimiento del juego

a. Construye tu propio juego de Tangram mediante el doblado de papel, siguiendo los pasos que se detallan a continuación:

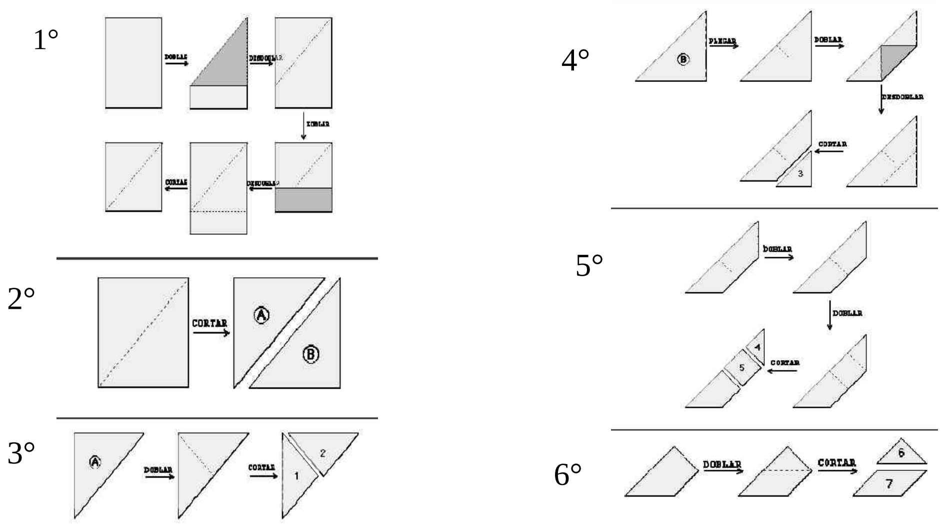

Figura 6: Pasos para la construcción del Tangram chino por plegado de papel

b. Algunas de las figuras que pueden construirse son las que se presentan a continuación. Como verás se pueden representar figuras humanas, animales y muchos objetos. Inténtalo.

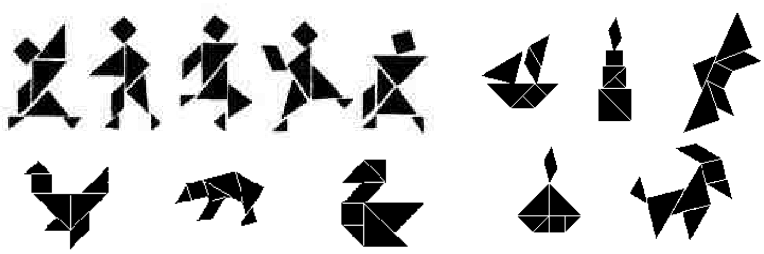

Figura 7: Soluciones de algunos tangramas

c. Las figuras construidas son las soluciones de los correspondientes tangramas. El objetivo de este juego es que vos solo puedas encontrar dichas soluciones. Aquí tienes algunos para que pongas en juego tu ingenio:

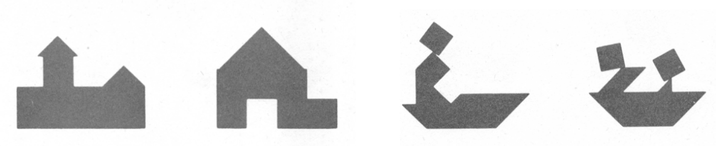

Figura 8: Ejemplos de tangramas

Momento3.3: Investiga y luego responde

d. Toma uno de los triángulos pequeños y clasifícalo.

e. Toma el otro triángulo pequeño y con ellos forma diferentes figuras geométricas.

f. Las figuras formadas, ¿se parecen a alguna otra pieza del Tangram?

g. ¿Qué podemos concluir acerca de sus áreas?

Acabas de descubrir el:

“Principio de conservación de la cantidad y no necesariamente de la forma”

A estas figuras se las llama equivalentes. En particular si conservan la misma superficie, se las llama equisuperficiales. Por lo tanto, los tangramas son…………………………………………………

h. Piensa y justifica, ¿las figuras equisuperficiales tendrán el mismo perímetro (isoperimétricas)?

i. Piensa, averigua y completa: *Cuando tenemos dos o más figuras geométricas, éstas pueden ser:*

Figuras congruentes:………………………. *Figuras semejantes:* ……………………….

Figuras equivalentes: ………………………. *Figuras diferentes*: ……………………….

j. Identifica entre las piezas del Tangram un par de figuras que se correspondan a cada una de las clasificaciones anteriores.

Habilidades abordadas en la actividad: ***Visuales*** *(coordinación visomotora, percepción figura-fondo, discriminación visual, constancia perceptual, rotación mental, percepción relaciones espaciales entre objetos);* ***de dibujo y construcción*** *(representación y reproducción de figuras a partir de modelos dados);* ***de comunicación*** *(escucha, localización, lectura, interpretación, denominación y definición);* ***lógicas o de razonamiento*** *(abstracción de características y propiedades, invención y exploración de figuras);* ***de aplicación o transferencia*** *(interrogación y análisis de representaciones).*

4.4 Geoplano

Geoplano: Cuadrado u ortogonal, Triangular o isométrico, Circular.

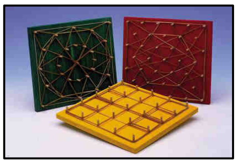

Figura 9: Geoplano

Actividad 4: "Comprueba relaciones entre los ángulos en una circunferencia"

Momento 4.1: Comentarios iniciales

Un **ángulo inscrito** en una circunferencia es aquél cuyo vértice está sobre la circunferencia y sus lados determinan cuerdas sobre la misma. Un **ángulo central** de una circunferencia es aquél cuyo vértice es el centro de la circunferencia y sus lados son dos radios de la misma.

a. Construye en tu geoplano un ángulo inscrito y un ángulo central cualquiera.

b. Investiga cuánto mide el ángulo central más pequeño de lados no coincidentes que puede hacerse en tu geoplano e indica por qué.

c. Según lo anterior, ¿serías capaz de calcular cuánto miden los ángulos inscrito y central que has construido?

d. Vas a descubrir ahora el modo de calcular ángulos inscritos en la circunferencia. A continuación tienes un ángulo y otros que tienen los lados paralelos al primero: mídelos y anota las medidas junto a cada uno.

Figura 10: Ejemplos de ángulos de lados paralelos

¿Qué relación existe entre ellos?

e. ¿Cómo puedes aplicar la relación anterior al cálculo de la amplitud de un ángulo inscrito en la circunferencia?

Momento 4.2: Investiga y luego responde

f. En tu geoplano, construye dos ángulos inscritos que abarquen el mismo arco de circunferencia. ¿Cómo son sus amplitudes? Prueba con varios ejemplos. ¿Puedes extraer alguna conclusión?

g. Ahora, construye un ángulo central y un ángulo inscrito que abarquen el mismo arco. ¿Cómo son sus amplitudes? Prueba con varios ejemplos. ¿Puedes extraer alguna conclusión?

h. Por último, construye un ángulo inscrito que abarque una semicircunferencia. ¿Cuál es su amplitud? Justifica.

*Habilidades abordadas en la actividad: **Visuales** (coordinación visomotora); **de dibujo y construcción** (representación de figuras y cuerpos); **de comunicación** (lectura, interpretación, denominación y definición); **lógicas o de razonamiento** (abstracción de características y propiedades, argumentación y exploración de figuras); **de aplicación o transferencia** (interrogación y análisis de representaciones).*

4.5 Transformaciones dinámicas

Transformaciones dinámicas: Poliformas, Varillas de mecano, Retículas, Desarrollos planos.

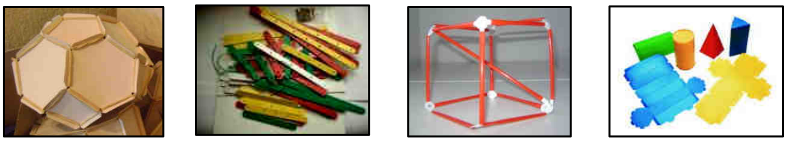

Figura 11: Transformaciones dinámicas

Actividad 5: "Construye y clasifica cuadriláteros"

Momento 5.1: Antes de comenzar

Si construyes un triángulo, con las varillas de mecano, comprobarás que esta figura geométrica es rígida; es decir, aunque se haga presión sobre los vértices, el triángulo no se deforma, no se mueve. Esta propiedad, la indeformabilidad o bien la estabilidad, es una característica propia de los triángulos y es por lo que se los utiliza en diferentes construcciones. En cambio, las figuras de cuatro lados, los cuadriláteros, no gozan de esta propiedad.

Momento 5.2: Investiga y luego responde

Toma cuatro varillas de mecano, todas de distinta longitud, y construye un cuadrilátero. La construcción, ¿es siempre posible?, ¿qué resulta necesario?

Presionando sobre un vértice se comprueba que puede lograrse que dos lados lleguen a ser paralelos. Así se obtiene un…………………………………………………………

a. Si conservamos fija la posición de tres de sus varillas y hacemos girar una alrededor de una mariposa, vemos que es posible obtener una infinidad de trapecios y que en un momento determinado obtenemos un ……………………………

b. ¿Qué puedes concluir?

1. Toma cuatro varillas de mecano, dos de las cuales sean iguales entre sí, lo mismo para las otras dos, aunque no sean iguales a las dos primeras. Únelas para formar un ***rectángulo***.

c. Presionando en uno de los vértices o en los lados, el rectángulo se transforma en un ………

d. ¿Qué puedes concluir?

e. Observa y anota lo que ocurre con los elementos de un rectángulo (lados, ángulos, diagonales) durante la transformación de aquél en paralelogramo.

2. Vimos que las diagonales de un rectángulo son iguales y se cortan en el punto medio. Esta propiedad nos permite hacer la siguiente construcción: toma dos piezas iguales de mecano y únelas por su punto medio. Luego, pasa un hilo elástico por los cuatro agujeros que hay en los extremos de las varillas y separa las varillas. Se forman distintos ………………………………………………….

f. Observa lo que sucede cuando las diagonales son perpendiculares y anótalo.

g. ¿Qué puedes concluir?

3. Toma cuatro varillas de mecano iguales y ponlas de manera que formen un ***cuadrado***.

h. Realiza una leve presión sobre uno de los vértices o sobre uno de los lados, para ver que un cuadrado no es rígido, sino que se transforma en un ………………………………………………..

i. ¿Qué puedes concluir?

j. Observa y anota lo que ocurre con los elementos de un cuadrado (lados, ángulos, diagonales) durante la transformación de aquél en rombo.

4. Une, por su punto medio, dos varillas de mecano de distinta longitud y pasa luego el hilo elástico por los cuatro agujeros extremos. Abriendo las piezas tendremos un …………………………

k. Observa lo que sucede cuando las diagonales son perpendiculares y anótalo.

l. ¿Qué puedes concluir?

Momento 5.3: Extrayendo conclusiones

5. Intenta resumir las actividades anteriores en una red conceptual que muestre la clasificación de los cuadriláteros realizada.

Habilidades abordadas en la actividad: ***Visuales*** *(coordinación visomotora, constancia perceptual, percepción de la posición espacial y discriminación visual);* ***de comunicación*** *(escucha, lectura, interpretación y diálogo entre pares y con el docente);* ***de dibujo y construcción*** ***(****representación y construcción sobre la base de datos dados);* ***lógicas o de razonamiento*** ***(a****rgumentación, clasificación de objetos geométricos por sus atributos abstracción de propiedades, comparación de conceptos y propiedades).*

4.6 Origami o Papiroflexia

Origami o Papiroflexia: Modelos sin corte de papel, Con cortes de papel, Con apoyo de materiales adicionales, Multi-capas, Multi-hoja, Desarrollados partir de módulos, Decorados, Con técnica de encorvado.

Figura 12: Origami o Papiroflexia

La actividad considerada en tangram también involucra la técnica del origami.

Objetos del entorno real: Entornos natural, artificial y artístico.

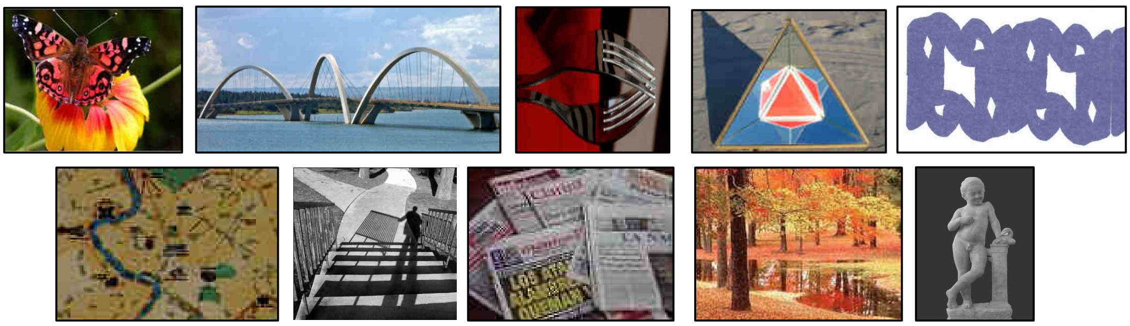

Figura 13: Objetos del entorno real

Actividad 6: "La Geometría nos rodea"

Momento 6.1: Antes de comenzar

Ubicado en pequeños grupos de 2 o 3 personas, recorre distintos ámbitos escolares y toma fotografías de ellos. Puedes tomar distintas fotografías de un mismo objeto desde diferentes lugares.

Momento 6.2: A trabajar sobre ellas

a. Describe, desde el punto de vista geométrico, las fotografías tomadas.

b. Fundamenta en base a tus conocimientos la descripción anterior.

Habilidades abordadas en la actividad: ***Visuales*** *(percepción figura-fondo, discriminación visual, constancia perceptual, percepción de la posición espacial y de la relación entre objetos);* ***de comunicación*** *(recolección e interpretación de información, denominación);* ***de dibujo y construcción (****obtención de distintas vistas de un mismo objeto);* ***lógicas o de razonamiento (****Argumentación, abstracción de propiedades);* ***de aplicación y transferencia (****identificación de formas y relaciones geométricas en el mundo natural y artificial, análisis de las formas n relación con el objeto en donde se encuentran).*

4.7 Criterios de análisis

A partir de una mirada holística-interpretativa del Registro de materiales didácticos concretos, se proponen los siguientes **siete criterios**, con sus correspondientes categorías y subcategorías. Estos criterios constituyen los ejes de análisis que orientan el agrupamiento realizado de los materiales. En las categorías y/o subcategorías se consideran los materiales didácticos concretos -o sus variantes- que intervienen en el agrupamiento en cuestión. Estos criterios surgen, por un lado, para dar respuesta a una completa caracterización de los materiales didácticos concretos analizados y, por otro lado, para responder a diferentes demandas que muchos docentes presentan relacionadas con posibilidades específicas de interés -como por ejemplo: utilizar un objeto concreto/tangible en sí mismo o una técnica, requerir el uso de una determinada materia prima, construir los materiales en forma artesanal o bien adquirirlos en comercios, resaltar la utilidad de que el material sea estático o móvil/dinámico, trabajar las diferentes dimensiones, desarrollar determinados conceptos, aplicar dichos materiales en diferentes niveles y fases de enseñanza/aprendizaje o enfocar la aplicabilidad de los mismos en otras áreas de conocimiento o niveles de escolaridad.

Criterio 1. Cualidad: Considerando la característica propia de cada material surgen dos categorías. *Objeto tangible:* Modelos fijos 2D y 3D, Rompecabezas geométricos, Tangram, Geoplano, Transformaciones dinámicas y Objetos del entorno real; *Técnica:* Origami.

Criterio 2. Materia prima: Teniendo en cuenta el o los recursos necesarios para su fabricación surgen tres categorías. *Papel:* Origami; *Cartón, cartulina, madera, plástico, acrílico, goma eva, telgopor:* Modelos fijos 2D y 3D, Rompecabezas geométricos, Tangram, Geoplano y Transformaciones dinámicas; *Otros recursos:* Objetos del entorno real.

Criterio 3. Disponibilidad: De acuerdo a la posibilidad de obtener cada material, teniendo en cuenta que todos ellos son de fácil acceso, se contemplan tres categorías. *Construcción artesanal:* Modelos fijos 2D y 3D, Rompecabezas geométricos, Tangram, Geoplano, Origami, Caleidoscopios, Desarrollos planos y Varillas de mecano; *Adquisición en comercios:* Espejos/mira o réflex, papel/cartulina, Mapas, Rejas, Diarios/revistas, Fotografías, Poliformas y Retículas; *Observación directa:* Entorno natural y artístico.

Criterio 4. Movilidad: Teniendo en cuenta el modo de interactuar con el material se observan dos categorías. *Dinámico:* Rompecabezas geométricos, Tangram, Geoplano, Transformaciones dinámicas y Origami y algunos objetos del entorno real (como por ejemplo la masa para modelar); *Estático:* Modelos fijos 2D y 3D y algunos objetos del entorno real (como por ejemplo una estatua).

Criterio 5. Dimensión: De acuerdo a la dimensión geométrica que se pretenda abordar, se consideran tres categorías. *Bidimensión:* Bloques lógicos de Dienes, Poliominós y poliamantes, Rompecabezas de la T, de la H, de la casita o la cruz griega, Rompecabezas de las cuatro T, Rompecabezas de piezas idénticas, Demostraciones dinámicas, Rompecabezas de mosaicos de Van Hiele, Rompecabezas por cuadratura, Tangram chino, Tangram de Fletcher, Cardiotangram, Tangram hexagonal, Tangram pentagonal, Tangram triangular, Tangram de Lloyd, Tangram pitagórico, Tangram de Brügner, Stomachion, Tangram ovoide, Geoplano ortogonal, geoplano circular y Entorno artificial; *Tridimensión:* Cuerpos geométricos rígidos, Cubos y policubos, Cubo soma, Cubo de Rubik, Tangram espacial, geoplano isométrico, Entorno natural y artístico; *Bidimensión-tridimensión:* Poliformas, Varillas de mecano, Retículas, Desarrollos planos y Origami.

Criterio 6. Contenidos conceptuales: De acuerdo a lo expresado en el DCJ (1999) sobre el área de Matemática en 8° Año EGB (actual 1° Año de Educación Secundaria) en relación con el eje Geometría, se organizan nueve categorías. *Posiciones entre rectas y planos:* Tangram, Geoplano, Origami, Entorno natural y artificial; *Sistemas de referencia para la ubicación de puntos en el plano:* Geoplano, Origami, Entorno natural y artificial; *Cuerpos poliedros:* Origami, Entorno Natural y Artificial, Cuerpos geométricos rígidos, Poliominós y poliamantes, Cubos y policubos, Cubo soma, Cubo de Rubik, Retículas, Tangram espacial, Geoplano triangular, Poliformas y Desarrollos planos; *Cuerpos redondos:* Origami, Entorno Natural y Artificial, Cuerpos geométricos rígidos y Desarrollos planos; *Ángulos:* Modelos fijos 2D y 3D, Rompecabezas geométricos, Tangram, Geoplano, Transformaciones dinámicas, Origami, Varillas de mecano y Objetos del entorno real; *Lugares geométricos: Círculo y circunferencia:* Cardiotangram y Geoplano circular, *Mediatriz y bisectriz:* Origami y Espejo/mira o réflex, Varillas de mecano y Papel/cartulina, *Alturas y medianas:* Origami, Varillas de mecano y Papel/cartulina; *Polígonos:* Tangram, Geoplano, Origami, Entorno natural, Entorno artificial, Bloques lógicos de Dienes, Poliominós y poliamantes, Rompecabezas de mosaicos de Van Hiele, Poliformas, Varillas de mecano, Caleidoscopios y Papel/cartulina; *Transformaciones:* Bloques lógicos de Dienes, Cuerpos geométricos rígidos, Poliominós y poliamantes, Espejos, Rompecabezas de piezas idénticas, Cubos y policubos, Caleidoscopios, Poliformas, Fotografías, Papel, Rejas, Tangram, Geoplano, Origami, Entorno natural y artificial; *Teorema de Thales. Semejanza:* Bloques lógicos de Dienes, Poliominós y poliamantes, Rompecabezas de Van Hiele, Mapas, Diarios/revistas, Fotografías, Tangram, Geoplano, Origami y Entorno natural.

Criterio 7. Versatilidad: Se considera aquí la aplicabilidad de cada material didáctico concreto en los diferentes ejes del área de Matemática, o de otras áreas de conocimiento, y la adaptación de los mismos en los distintos niveles de escolaridad. De esta manera se originan dos categorías y subcategorías. *Vinculación intra e inter área: Matemática: Eje Medidas:* Modelos fijos 2D y 3D, Rompecabezas geométricos, Tangram, Geoplano, Transformaciones dinámicas, Origami y Objetos del entorno real; *Eje Números y operaciones:* Rompecabezas geométricos, Tangram y Objetos del entorno real; *Eje Funciones:* Geoplano y Objetos del entorno real; *Eje Estadística y Probabilidades:* Rompecabezas geométricos, Transformaciones dinámicas y Objetos del entorno real; *Otras áreas:* Origami y Objetos del entorno real. *Niveles de escolaridad: Inicial:* Modelos fijos 2D y 3D, Geoplano, Entorno natural y Papel/cartulina; *Primario: Completo:* Modelos fijos 2D y 3D, Geoplano, Origami y Objetos del entorno real; *Último cursos:* Rompecabezas geométricos, Tangram y Transformaciones dinámicas; *Secundario: Primeros cursos: Modelos fijos 2D y 3D, Geoplano,* Transformaciones dinámicas y Objetos del entorno real; *Completo:* Rompecabezas geométricos, Tangram y Origami; *Superior:* Origami y Objetos del entorno real.

En cuanto al reconocimiento de las habilidades geométricas, se puede determinar que todos ellos favorecen el desarrollo de las cinco habilidades geométricas reconocidas por Hoffer (1981). Esto está estrechamente vinculado con las intenciones didácticas con que se los utiliza dentro de la actividad sugerida al alumnado y el aporte que el docente puede realizar al respecto. Una conclusión análoga le cabe a la vinculación entre materiales y niveles/fases de Van Hiele.

5. Conclusiones

Desde el comienzo de este artículo se ha sostenido que la Geometría, por su carácter intuitivo, concreto y ligado a la realidad, constituye uno de los medios más eficaces para aprender en forma experimental, recreativa y reflexiva la Matemática. Debido a esto, se considera que la manipulación responsable de los materiales didácticos concretos presentados -esto es, con pleno conocimiento de las potencialidades y limitaciones que los mismos ofrecen- es un elemento clave para favorecer la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría en 1° Año de la Educación Secundaria.

Según lo analizado, la utilización de los materiales didácticos concretos, que se presentan en este artículo, abarcan todos los contenidos conceptuales sugeridos por el DCJ (1999) en el eje Geometría para el año escolar de referencia. También se ha podido observar que dichos materiales son facilitadores y potenciadores intelectuales de las habilidades geométricas, favoreciendo y colaborando en el desarrollo del pensamiento geométrico. Es decir, pueden servir de andamio a estrategias metodológicas para el desarrollo de competencias matemáticas en el ámbito de la Geometría. De igual modo, se ha observado que los materiales didácticos concretos propuestos satisfacen las características de los modelos según la EMR respecto a viabilidad, flexibilidad y enraizamiento en contextos realistas que los mismos deben presentar. Además, se ha podido reconocer que ellos pueden ser aplicados -dependiendo de las intenciones didácticas con que se los utilice- en las diferentes fases de enseñanza/aprendizaje que el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele considera. De esta manera, se colaboraría en el tránsito de un nivel a otro.

Al mismo tiempo, se ha concluido que la implementación de este tipo de materiales en la enseñanza de la Geometría en 1° Año de la Educación Secundaria tiene plena coherencia con los principios de la corriente matemática que fundamenta este trabajo de investigación -la EMR-, por cuanto satisface los seis principios que la identifican: favoreciendo un aprendizaje activo donde el alumno aprende haciendo (Principio de actividad); siendo realizables e imaginables permitiendo iniciar el proceso de matematización (Principio de realidad); funcionando como puentes entre los distintos niveles de organización de la Matemática (Principio de niveles); favoreciendo la construcción de sus propias herramientas y juicios matemáticos mediante la manipulación directa de los mismos (Principio de reinvención guiada); estableciendo relaciones entre los distintos ejes y unidades curriculares dentro de la Matemática y con las demás áreas de conocimiento, proporcionando mayor coherencia a la enseñanza (Principio de interrelación) y, por último, fomentando el aprendizaje como una actividad social donde la reflexión conjunta y el intercambio de ideas permiten alcanzar niveles de comprensión más elevados (Principio de interacción).

Esta investigación ha realizado su aporte en ese sentido, identificando y caracterizando los materiales didácticos concretos que pueden utilizarse en 1° Año de la Educación Secundaria y reconociendo las habilidades geométricas que permiten desarrollar. Además se considera que los resultados de esta investigación pueden considerarse como puntos de partida para futuras indagaciones, tales como: Ubicados en la enseñanza de la Geometría en 1° Año de la Educación Secundaria: ¿qué otros materiales didácticos concretos, si es que existen, se utilizan fuera de

Iberoamérica?, ¿cuáles son los riesgos de un uso inapropiado de los materiales didácticos concretos?, ¿qué instancias de formación de profesores se requieren para contribuir a un uso intencional y responsable de los materiales didácticos concretos?; En el mismo nivel educativo, pensando ahora en el área Matemática en general: ¿cuáles otros materiales didácticos concretos existen para los restantes ejes?, ¿por qué, a pesar de conocer sus beneficios y contar la institución con ellos, los materiales didácticos concretos a veces no son usados en las clases?

Entre tantos otros interrogantes que pueden ir surgiendo y cuyas puertas se espera haber abierto desde esta investigación. Para finalizar, al considerar a la Geometría como la comprensión del espacio que nos rodea, tal como lo expresa Freudenthal (1991, citado por Vilchez, 2004) en la siguiente definición: “La Geometría es aprehender el espacio… ese espacio en el que vive, respira y se mueve el niño” (p. 30), los materiales didácticos concretos han mostrado ser una herramienta muy útil para alcanzar este aprendizaje. Así, se espera haber colaborado en la generación de conocimiento sobre este tipo de materiales y, de este modo, aproximarnos un poco más a lograr que la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría en 1° Año de la Educación Secundaria puedan gozar de los beneficios que brinda una utilización responsable y reflexiva de los mismos.

Bibliografía

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. (1988a). *Materiales para construir la Geometría*. Madrid: Síntesis.

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. (1988b). *Invitación a la didáctica de la Geometría*. Madrid: Síntesis.

Álvarez, A. (1996). *Actividades Matemáticas con Materiales Didácticos*. Madrid: MEC-Narcea.

Ander-Egg, E. (2003). *Métodos y técnicas de investigación social: técnica para recogida de datos e información.* Buenos Aires: Lumen.

Bishop, A.J. (1983). Space and geometry. En R. Lesh & M. Landau. (Eds.). Acquisition of mathematical concepts and processes. New York, US: Academic Press.

Bravin, C. y Pievi, N. (2008). *Documento metodológico orientador para la investigación educativa*. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación e Instituto Nacional de Formación Docente.

Bressan, A., Bogisic, B. y Crego, K. (2000). *Razones para enseñar Geometría en la Educación Básica. Mirar, construir, decir y pensar…* Buenos Aires: Novedades Educativas.

Corberán, R., Huerta, P., Margarit, J., Peñas, A. y Ruiz, E. (1989). *Didáctica de la Geometría: modelo de Van Hiele*. Valencia: Universidad de Valencia.

Coriat, M. (1997). Materiales, recursos y actividades: un panorama. En L. Rico (ed.). *La educación matemática en la Enseñanza Secundaria*, 155-177. Barcelona: ICE-Horsori.

Crowley, M.L. (1989). The design and evaluation of an instrument for assessing mastery Van Hiele levels of thinking about quadrilaterals. An Abbor, MI: U.M.I.

González, N. y Larios, V. (2001). El doblado de papel: una experiencia en la enseñanza de la Geometría. *XIXIM: Revista electrónica de Didáctica de las Matemáticas*, 1 (2). Recuperado el 23 de febrero de 2007, de http://www.uaq.mx/matematicas/redm/art/a0202.pdf.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2003). *Metodología de la investigación.* (3° ed.). México DF: Mc Graw Hill.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than Proof. *Mathematics Teacher,* pp. 11-18.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: El modelo de van Hiele. En S. Llinares y M. Sánchez. (eds.). *Teoría y práctica en educación matemática*, 295-384. Sevilla: Alfar. Recuperado el 11 de agosto de 2010, de http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf.

Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe. (1999). Diseño Curricular Jurisdiccional para el Tercer Ciclo de la EGB. Área Matemática.

Tishman, S., Perkins, D., & Jay, E. (1995). *The Thinking Classroom: Teaching and learning in a culture of thinking*. Needham, MA: Allyn & amp; Bacon.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2008). Educación matemática en los Países Bajos: un recorrido guiado. *Correo del maestro*, 149. Recuperado el 30 de noviembre de 2009, de http://www.gpdmatematica.org.ar/public.htm.

Van Hiele, P. (1957). *De Problematiek van het inzicht. Gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof*. Tesis de Doctorado en Matemáticas y Ciencias Naturales, Universidad Real de Utrecht. Traducción al español realizada en 1990 por el proyecto de investigación Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en Enseñanza Media basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele (director Ángel Gutiérrez) del Concurso Nacional de Proyectos de Investigación Educativa del C.I.D.E. (1989-91).

Vilchez, N. (2004). *Enseñanza de la Geometría con utilización de recursos multimedia. Aplicación a la primera etapa de educación básica*. Tesis de Doctorado en Pedagogía, Universitat Rovira i Virgili. Recuperado el 18 de agosto de 2010, de http://www.tesisenxarxa.net/TDX/TDX_URV/TESIS/AVAILABLE/TDX-0619107-141631//712parteCAPIIGEO.pdf.

Villarroya, F. (1994). El empleo de materiales en la enseñanza de la Geometría. *Revista interuniversitaria de Formación de Profesorado*, 21, 95-104. Recuperado el 20 de mayo de 2009, de http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=117840.

Silvia Villarroel es Profesora Titular en el área de Física en la Escuela de Enseñanza Media N° 498 de General Gelly, Profesora Interina en el área de Matemática en la Escuela de Enseñanza Media N° 227 de Máximo Paz y Tutora Académica en el área Matemática de la Escuela de Enseñanza Media N° 353 de Sargento Cabral, reside en la localidad de Sargento Cabral (Argentina), nació el 23 de enero de 1978, tiene los títulos de Profesora de Matemática y Física y Licenciada en Enseñanza de la Matemática.

Natalia Sgreccia es Profesora Adjunta en el área Educación Matemática en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de Universidad Nacional de Rosario y Becaria doctoral del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, reside en la ciudad de Rosario (Argentina), nació el 24 de octubre de 1979, tiene los títulos de Profesora de Enseñanza Media y Superior en Matemática y Magíster en Didácticas Específicas.