GEOMETRIZANDO CON PLEGADO DE PAPEL

Marcelo Ponce – Adriana Rabino

Inspirado en el problema *Probabilidad y Geometría* de www.gpdmatematica.org.ar y el material brindado por la Dra. Betina Zolkower al GPDM.

Contenidos: Triángulos y cuadriláteros: definiciones, relaciones y propiedades. Áreas. Teorema de Viviani

Recurso didáctico: plegado de papel

"Algunos matemáticos han llevado a cabo todas las construcciones de la geometría plana de Euclides mediante el plegado de papel, siendo el primero y el más relevante Sundara Row quien publicó, hacia 1893, el libro "Experiencias de geometría con papel plegado" (Aznar, M.A., 2011).

Enseñar geometría tiene dos objetivos muy importantes: como base para comprender conceptos de matemática desarrollando el pensamiento lógico apoyado en el visual, y modelizar problemas de otras ciencias y de la vida cotidiana. Es importante que los alumnos vivencien estos usos a través de la resolución de situaciones problemáticas que involucren cuestiones de la vida real y/o problemas matemáticos que se apoyen en la geometría.

En cuanto a las habilidades de pensamiento y estrategias de resolución de problemas, la geometría ayuda a estimular y ejercitar entre otras: visualizar, comparar, medir, conjeturar, imaginar, crear, generalizar y deducir.

Lo cierto es que esta rama de la matemática, además de brindar las ventajas mencionadas anteriormente, permite trabajarla con infinidad de recursos didácticos (pocas veces explotados) que despiertan el entusiasmo en los alumnos.

Atendiendo a la teoría de niveles de Van Hiele, el aprendizaje de la geometría se construye pasando por niveles de pensamiento: visual, descriptivo, de deducción informal y de deducción formal. Cada uno se caracteriza por habilidades de razonamiento específicas e importantes. Según este modelo, se requiere una adecuada enseñanza para que los alumnos puedan pasar a través de los distintos niveles (Bressan, 2000).

Una de las características de esta teoría es que no se puede alcanzar el nivel *n* sin haber pasado por el nivel anterior *n-1*, o sea, el progreso de los alumnos a través de los niveles es secuencial e invariante. Esto es importante de tener en cuenta porque puede suceder que un alumno puede llegar a nivel secundario y, si nunca vio geometría en su pasaje por la escolaridad primaria, probablemente esté en el nivel 0 de desarrollo del pensamiento geométrico. Es decir, este desarrollo no sería dependiente de la edad de la persona. Además, que un alumno esté en un nivel en un determinado tópico geométrico no asegura que esté en ese mismo nivel para abordar otro contenido de geometría.

Por lo tanto se hace imprescindible hacer un diagnóstico de los conocimientos geométricos que poseen nuestros alumnos y partir desde donde sea necesario.

Una de las habilidades que colabora al desarrollo del pensamiento geométrico es el de la **construcción** y una forma intuitiva de comenzar los procesos de construcción es el **plegado de papel**, ya que con este recurso didáctico se pueden realizar las mismas construcciones que puedan ser hechas con regla y compás. Al realizar plegados de papel se está manipulando permanentemente con "elementos" geométricos (ángulos, bisectrices, diagonales, ejes de simetría, etc.), plasmándose en el papel diversas relaciones y conceptos de geometría. La comprensión de muchos conceptos geométricos se facilita de manera amena con la visualización de construcciones a través de este recurso que posibilita procesos de producción de conocimiento geométrico que permite hacer construcciones, verificarlas, visualizarlas, hacer conjeturas, discutirlas, analizarlas y probarlas. Además trae aparejados otros procesos tales como la experimentación y el uso del lenguaje verbal y no verbal (por ejemplo, diagramático, ver Nota al final).

Debemos recordar que las representaciones externas (en nuestro caso los plegados) nos dan una idea de una imagen interna o de un concepto, pero estas representaciones solo son modelos aproximados de las figuras mentales de las que trata la geometría.

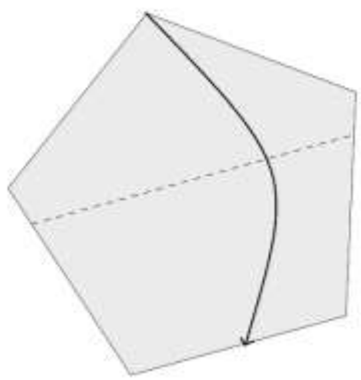
A continuación se presentan algunas actividades para llevar al aula.

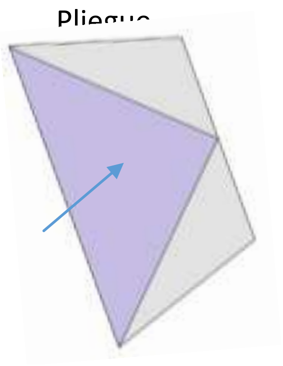
Inicio

Al plegar una figura de papel se forma un "pliegue" (segmento de recta trazado en el papel).

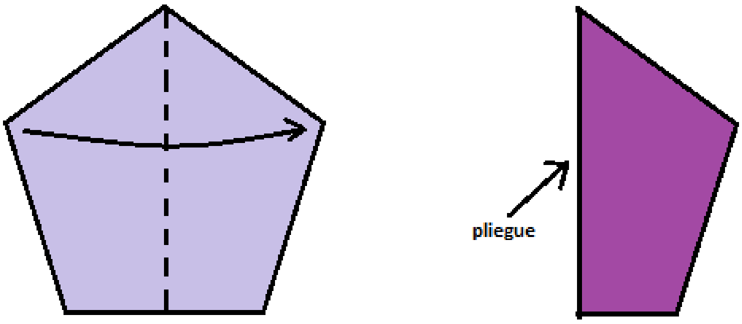
Dentro de una misma figura cualquiera se pueden realizar distintos plegados. Algunos de ellos se pueden identificar de la siguiente manera:

1) Plegado **vértice/lado** (la flecha indica el movimiento)

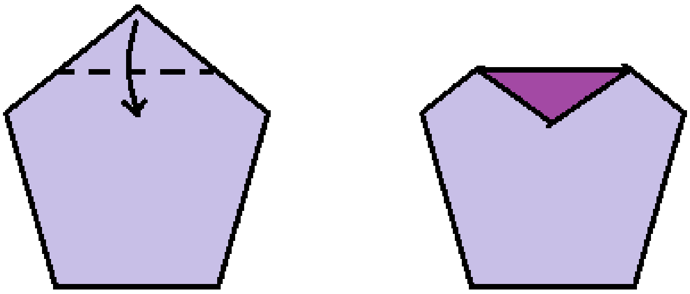




2) Plegado **vértice/vértice**



3) Plegado **vértice/punto interior**



Actividades

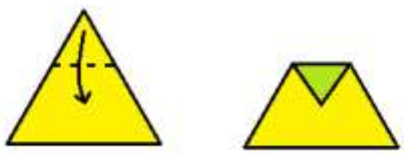
Materiales: hojas de papel lisas. Lápiz, goma y tijeras.

En las siguientes actividades se pide trabajar en parejas. En cada uno de los ejercicios se solicitará al grupo una explicación diagramática del proceso de plegado (semejante al que se muestra en las soluciones de cada caso). No está permitido usar palabras, solo diagramas, números, flechas y letras, salvo que se pida una explicación verbal o una demostración en forma explícita.

A) De triángulos a cuadriláteros

1. Construir un triángulo equilátero en papel y descubrir qué cuadriláteros se pueden lograr haciendo plegados a este triángulo. Describir con diagramas la construcción de cada uno de ellos. Escribir una definición de cada una de las figuras obtenidas, destacando alguna/s de sus propiedades.

Posible solución:



Por ejemplo, se obtiene así un trapecio isósceles. Sus bases son paralelas (porque así se hizo el pliegue) y los ángulos de la base son congruentes pues son dos de los ángulos interiores el triángulo equilátero original.

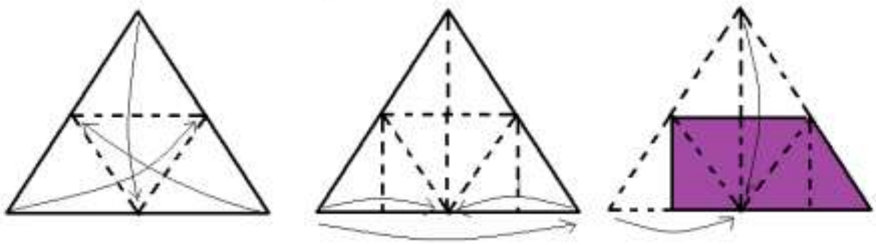
2. A partir de los diagramas anteriores, agrupar los mismos en clases inclusivas, esto es, que cada diagrama se vea como un caso particular del anterior. Pueden repetirse los cuadriláteros en clases diferentes.

Posible solución:
Por ejemplo, si aparece un rectángulo y un cuadrado, que este último esté incluido en la clase de los rectángulos.

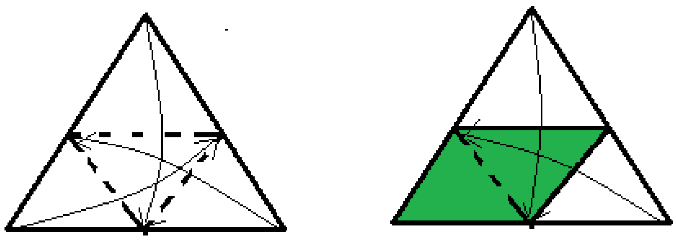
3. Dado un triángulo equilátero cualquiera:
a) Encontrar un trapecio rectángulo cuya área sea 5/8 del área del mismo.
b) Encontrar un paralelogramo cuya área sea 2/4 del área del mismo.
c) Encontrar un trapecio rectángulo cuya diagonal mayor sea igual a la altura del triángulo equilátero dado.
d) Construir el trapezoide que tiene $\frac{7}{8}$ del área del triángulo equilátero dado.

Posibles soluciones:

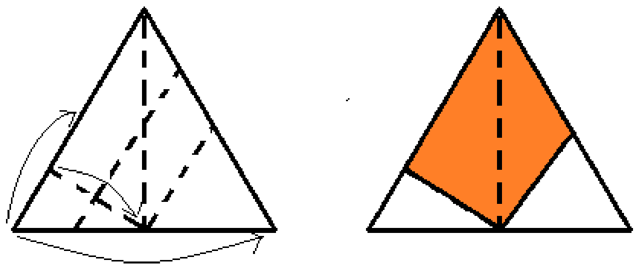
a)



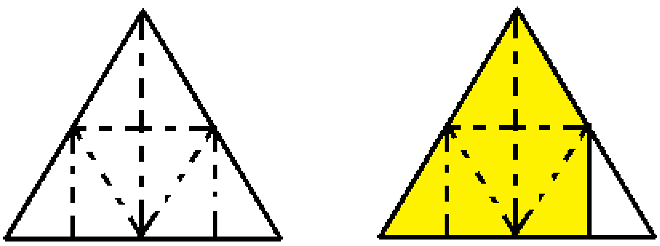
b)



c)



d)



B) De cuadrados a triángulos

1. Con una hoja cuadrada de papel:

a) Plegar para lograr un triángulo rectángulo tal que su área sea 1/64 de la hoja de papel. ¿Cuántos pliegues fueron necesarios? ¿Se puede hallar una generalización?

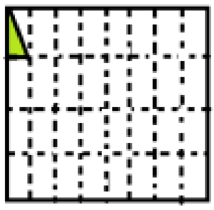
b) Plegar para lograr un triángulo isósceles no equilátero tal que el lado desigual del mismo coincida con uno de los lados de la hoja de papel.

c) Plegar para lograr un triángulo equilátero. ¿Cuántos pliegues hubo que hacer? ¿Puede hacerse con solo dos pliegues? Intentar!

d) Encontrar el triángulo de mayor área que no sea rectángulo.

Posibles soluciones:

a) Plegar el cuadrado 3 veces en un sentido (a una misma distancia) y 7 veces en el otro de tal manera que quede una cuadrícula de 32 rectángulos. Plegar por una de las diagonales de un rectángulo, éste queda dividido en 2 triángulos rectángulos que representan 1/64 cada una del total (1/32 : 2 = 1/64).

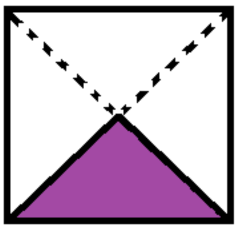


En este caso fueron necesarios 11 pliegues (3 + 7 + 1).

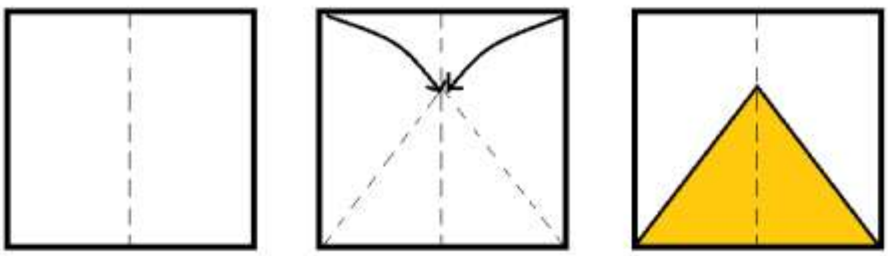
Se puede realizar una tabla como la siguiente para poder encontrar regularidades y generalizar:

Pliegues	Área de cada triángulo (en relación al cuadrado)
1 + 3 + 1 = 5	$1/16 = 1/4^2$
2 + 5 + 1 = 8	$1/36 = 1/6^2$
3 + 7 + 1 = 11	$1/64 = 1/8^2$
4 + 9 + 1 = 14	$1/100 = 1/10^2$
5 + 11 + 1 = 17	$1/144 = 1/12^2$
…………	……………
n + (2n+1) + 1 = 3n + 2	1/2n + 2

b)



c)



primer pliegue

2 pliegues más

d) Cualquier triángulo que tenga como base un lado del cuadrado y un vértice en el lado opuesto a la base (que no sea vértice del cuadrado).

C) De cuadrados a cuadriláteros

1.a) Plegar una hoja cuadrada para obtener un **rombo** (no cuadrado) tal que su área sea ¼ del área del cuadrado original. Registrar el proceso de plegado paso a paso (puede ser con diagramas, flechas, etc.). Escribir una explicación convincente: **i)** de que la figura efectivamente es un rombo y **ii)** de que su área es efectivamente ¼ del área del cuadrado original.
b) Plegar otra hoja cuadrada del mismo tamaño que en **a)** para obtener un **rombo** tal que su área sea mayor que la obtenida en el punto anterior. ¿Qué fracción de la hoja de papel es este nuevo rombo?

2. Con una hoja cuadrada de papel:
a) Plegar para obtener un **romboide** tal que tenga un área que sea ¼ del área de la hoja. Escribir una explicación convincente de que el área mide eso.
b) Plegar la hoja para obtener un **romboide** cuya área sea la mitad del área de la hoja cuadrada. ¿Cómo puedes asegurar que es un romboide?

3. Con una hoja cuadrada de papel:
a) Plegarla para obtener un **rectángulo** cuya área sea 3/8 del área de la hoja cuadrada.
b) Plegar la hoja nuevamente para lograr un rectángulo de tal manera que uno de sus lados forme un ángulo de 45° respecto al borde de la hoja. ¿Cuál es su área respecto del cuadrado original?

4. Con una hoja de papel cuadrada, plegarla para obtener un paralelogramo (no rectángulo) y calcular la relación de área respecto de la hoja original. ¿Cómo se puede asegurar de que es un paralelogramo?

5. Plegar una hoja de papel cuadrada de tal manera de obtener el mayor trapecio posible.

6. Plegar una hoja cuadrada de papel para obtener un cuadrado cuya área sea 4,5/8 del área total de la hoja.

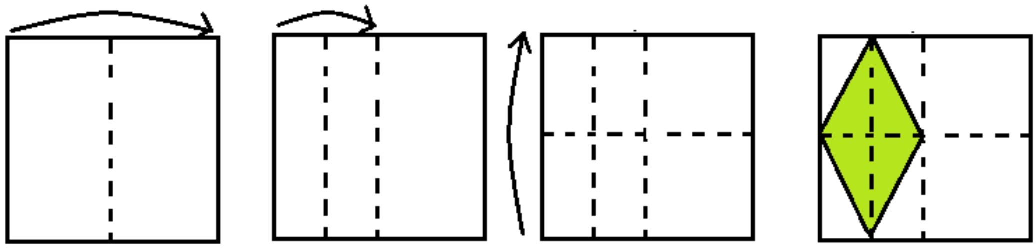
7. Dado un papel rectangular LISO de 22,5 unidades por 27,5 unidades (que les entregará el profesor) encontrar exactamente una longitud de 15 unidades (podrían ser centímetros u otra unidad). ¿Hay más de una forma de hacerlo? Usar diagramas para mostrar si encontraste más de una forma.

8. Sobre el mismo papel, pliega y corta para crear el cuadrado más grande que se pueda. ¡No está permitido usar la regla! ¿Cómo estás seguro que la figura obtenida es realmente un cuadrado?

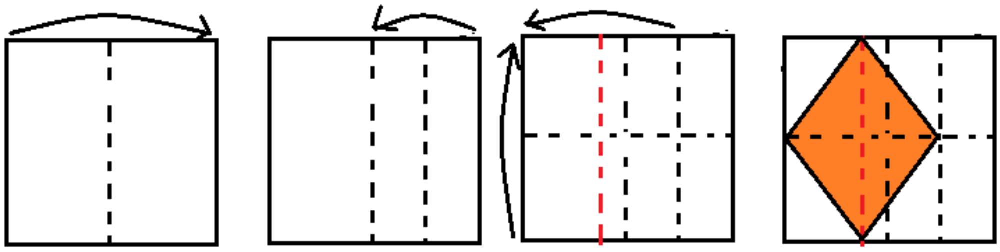
9. En el papel cuadrado obtenido en el ejercicio anterior, pliega para obtener un cuadrado cuya área sea ¼ del cuadrado original. Registra el proceso de plegado paso por paso. ¿Cómo sabes que se construyó un cuadrado? ¿Cómo podrías justificar que el cuadrado que se construyó tiene un área que es ¼ del cuadrado original? Escribe una explicación convincente de que realmente es así.

Posibles soluciones:

1.a)



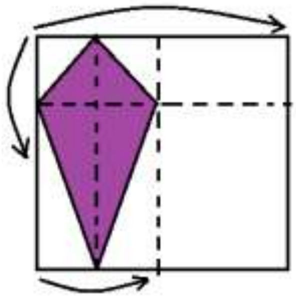
b)



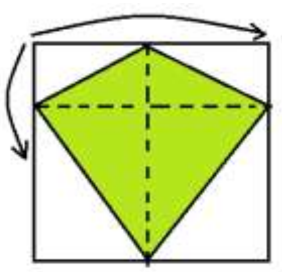
es 3/2 más grande.

2. a)

El romboide está en la mitad de la hoja y a su vez es la mitad del área de ese rectángulo, o sea que su área es ¼ del área de la hoja.

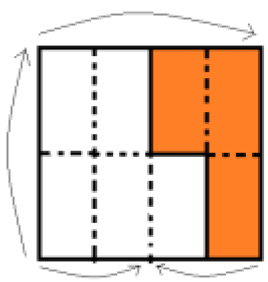


b)

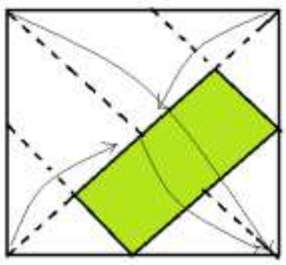


Porque hay dos pares de rectángulos congruentes al plegar el papel y sus diagonales (lados consecutivos del romboide) son también congruentes.

3.a)

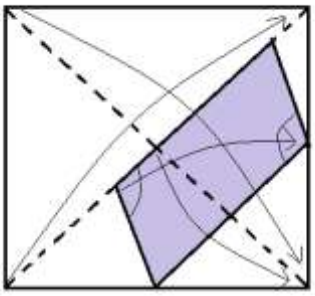


b)



El área es 1/4 respecto del cuadrado original. Un método para resolverlo es seguir haciendo pliegues de tal manera que quede todo el cuadrado dividido en triángulos rectángulos isósceles.

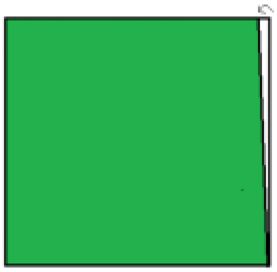
4.



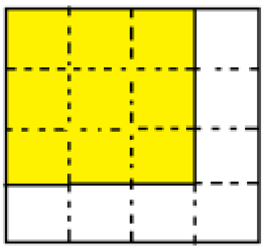
Los pliegues sobre las diagonales y el tercer pliegue (para lograr los dos lados opuestos) aseguran el paralelismo porque las diagonales del cuadrado son perpendiculares. Luego se traza el tercer lado en cualquier dirección y se hace el último pliegue usando la congruencia de ángulos opuestos en el paralelogramo.

5.

El pliegue se debe hacer en el límite, cuando coincide con el lado del cuadrado.

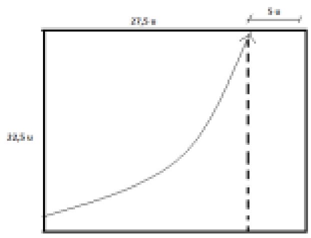


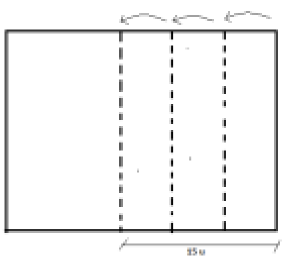
6.



4,5/8 es equivalente a 9/16, por lo tanto se debe plegar el cuadrado para obtener una cuadrícula de 16 y tomar 9.

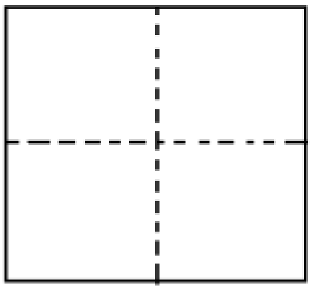
7.





8. Ídem al primer paso del ejercicio anterior.

9.



Estos pliegues son bases medias del cuadrado, por lo tanto dividen a los lados opuestos por la mitad. Entonces queda divido también en cuadrados y como hay 4 iguales, su área es ¼ de la original.

Extensión

D) Comprueba estos teoremas utilizando plegado.

1. En todo paralelogramo el punto de intersección de las diagonales es el punto medio de las mismas.

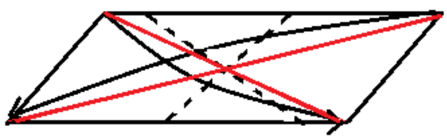
2. La diagonal principal del romboide es perpendicular a la otra diagonal en su punto medio, y es bisectriz de los ángulos opuestos.

3. La base media de cualquier trapecio es paralela a las bases del mismo.

4. **Teorema de Viviani**: *Desde cualquier punto interior de un triángulo equilátero, trazar los tres segmentos perpendiculares a cada lado del triángulo. Independientemente de dónde esté ubicado el punto, la suma de las distancias del punto a cada uno de los lados es constante e igual a la altura del triángulo.*

Posibles soluciones:

1.

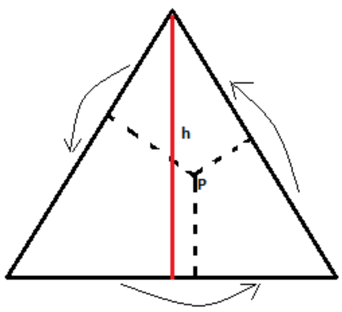


Plegar haciendo coincidir los vértices opuestos. La intersección de los pliegues coincide con la intersección de las diagonales.

2. Plegando por la diagonal principal se comprueba que, por simetría axial, los vértices opuestos están a la misma distancia, por tanto corta a la otra diagonal en su punto medio. Además, por propiedades de la simetría axial, ambas diagonales son perpendiculares.

3. Plegar el trapecio por la base media.

4. Dado un punto cualquiera P interior al triángulo equilátero, plegar sobre cada lado haciendo pasar el pliegue por el punto P:



Estos pliegues son perpendiculares a cada lado y paralelos a cada altura.

La idea es transportar, con pliegues, cada uno de estos segmentos sobre una de las alturas para comprobar que la suma de sus longitudes es igual a la longitud de cualquier altura (las tres son congruentes).

E) Haz un listado de todas las propiedades geométricas que hayas reconocido durante la resolución de los problemas anteriores.

Referencias

AZNAR, M.A. (2011). *El plegado de papel como herramienta de apoyo en la enseñanza artística.* Facultad de Bellas Artes. Universidad de Murcia. España. Revista Iberoamericana de Educación N° 57/1.

BRESSAN, A.M. y otros (2000). *Razones para Enseñar Geometría en la Educación Básica.* Ed. Novedades Educativas.

BRESSAN, A. y otros: *Enseñar GeometrÍa: Redescubrir una tarea posible.* Ed. Styrka. Uruguay. En pdf en www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones

RAMIREZ, JARAMILLO y otros (2015). *El doblado de papel como medio para la producción de conocimiento geométrico.* Revista Virtual. Universidad Católica del Norte. N° 46. Colombia.

ZOLKOWER, B. (2010). *Invitación a Geometrizar Plegados de Papel: Una posible secuencia de enseñanza.* Documento interno del GPDM

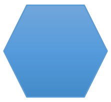
Nota

Extracción de: Acerca del razonamiento diagramático (Michael Hoffmann, *Semiótica*, 2007; según las ideas de C. S. Peirce)

El razonamiento matemático es diagramático.

Un diagrama es una representación externa (un ícono) de relaciones construido de acuerdo con un sistema de reglas y convenciones que consiste en elementos y relaciones disponibles dentro de un determinado sistema de representación.

Por ejemplo:



es un ícono de relaciones geométricas

Razonar diagramáticamente implica:

-- construir un diagrama acorde con determinada condiciones;

-- experimentar con (o manipular) el diagrama;

-- observar (y tomar nota de) los resultados de los experimentos;

-- asegurarse que experimentos similares realizados sobre cualquier otro diagrama construido de acuerdo con esas mismas condiciones dan lugar a los mismos resultados;

-- expresar esos resultados en términos generales.

La función primordial de los diagramas es facilitar procesos de pensamiento individuales o colectivos en situaciones que son demasiado complejas para ser encaradas exclusivamente por medios (o con herramientas) cognitivas (internas).

Se debe distinguir entre el utilizar un diagrama:

-- para representar algo que ya se sabe

-- para comunicar algo a otros

-- como herramienta para pensar.

La relación entre el diagrama como signo y el objeto que representa (por ejemplo, una figura, un proceso, un concepto) no es de índole diádica (signo-objeto) sino triádica. Esto es así porque el significado de un diagrama (como así también el de cualquier otro signo) depende de su interpretación:

HOFFMANN M. H. G. (2007). Cognitive conditions of diagrammatic reasoning: A semiotic approach. *Special Issue on Peircean Diagrammatical Logic. Eds* Joao Queiroz and Frederik Stjernfelt. https://smartech.gatech.edu/bitstream/handle/1853/23809/wp24.pdf

Para ampliar: Zolkower, B. y Bressan, A. (2017). Diagramar y pensar diagramáticamente en la enseñanza-aprendizaje de la matemática. El problema de la escalera. *Rev. Novedades Educativas,* pp. 36-43.