VISUALIZAR Y DEMOSTRAR

Adriana Rabino - Ana Bressan

Este material puede servir para estudiantes de profesorado de matemática y de educación secundaria

PARA EL PROFESOR

Desde los comienzos, la investigación matemática ha utilizado diferentes recursos para su desarrollo: el lenguaje coloquial, el lenguaje simbólico y las figuras. Eran dos las razones fundamentales para introducir las imágenes en los textos matemáticos: sustituir con figuras apropiadas largas explicaciones coloquiales, y facilitar el razonamiento mental basado en la intuición gráfica. Pasó bastante tiempo para ver un avance de nivel en el uso de las imágenes (apuntando a la visualización de propiedades matemáticas), y solo desde hace aproximadamente treinta años que este tópico despertó el interés en lo que se dio en llamar "demostraciones sin palabras". Los avances tecnológicos han permitido el desarrollo de nuevas ramas de la matemática utilizando un nuevo concepto de imágenes: las virtuales (geometría dinámica).
Hay posturas extremas para justificar o no el uso de las imágenes en la matemática. Jean Dieudonné (1906-1992) expresó en una ocasión haber decidido no poner ni siquiera una figura en su texto, apoyando la postura (como la de muchos otros matemáticos) que la única forma de presentar la matemática es a través del discurso formal basado en el lenguaje formal. Otros, como George Polya (1887-1985), opinan que la resolución de un problema matemático siempre se realiza mejor empezando por la visualización.

¿Qué entendemos por visualización?

De aquí en más vamos a hablar de visualización como un sinónimo de razonamiento visual.
A continuación presentamos distintas definiciones del término "visualización", para entender que no se trata de una cuestión meramente perceptiva, sino que implica argumentos analíticos que van dirigiendo cada etapa en la resolución de un problema.

- *Con la visualización matemática se pretende otra cosa (no es la visualización sicológica). Las ideas, conceptos, y métodos de la matemática presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas del campo. […] Esta forma de actuar con atención explícita a las posibles representaciones concretas en cuanto desvelan las relaciones abstractas que al matemático interesan constituye lo que denominamos visualización en matemática.* (Guzmán, p. 15)
- *En general, la visualización proporciona una manera casi sin esfuerzo de adquirir nueva información, y sus resultados a menudo vienen con un grado de*

inmediatez, de claridad, y las fuerzas que hacen que la visualización sea un acto de descubrimiento y de explicación. Así, el valor epistémico del pensamiento visual en las matemáticas se hace evidente, una vez que le damos la debida importancia al descubrimiento y a la explicación. (Marcus Giaquinto, p. 264)

- *…visualizar implica tanto representar lo mental a través de formas visuales externas como representar a nivel mental objetos visuales (representaciones internas)".* (Bressan, 2000)

El proceso de visualización parece requerir, entonces, de dos tipos de habilidades:

- *Las relacionadas con la captación de representaciones visuales externas (o de interpretación de información figural, según Bishop, 1983).*
- *Las relacionadas con el procesamiento de imágenes mentales (o de procesamiento visual, según Bishop, 1983).*

- *Visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar la comprensión.* (Arcavi, 2003)

Creemos que la articulación entre visualización y razonamiento está en la base de toda actividad matemática.
La intuición visual en matemáticas ha llevado a ideas que han resultado de grandes avances en el desarrollo de las matemáticas. Sin embargo, también puede conducir a callejones sin salida, lo que ha llevado a pensar que es un recurso engañoso y carente de precisión. Negar la visualización en matemáticas, sin embargo, sería lo mismo que negar los orígenes de muchas de nuestras ideas más profundas, ya que tiene un poder clarificador, facilita la comprensión y constituye una poderosa herramienta de la tarea matemática y su comunicación (Tall, 1991).
Entonces, ¿cuáles pueden ser los pros y los contras de la visualización?
En la investigación matemática la demostración no es más que la última etapa del proceso. Antes de que pueda haber demostraciones, debe haber todo un camino a recorrer. Esta etapa exploratoria de pensamiento matemático se favorece al construir una imagen general de las relaciones, y tal imagen puede favorecerse con la visualización. Si grandes matemáticos necesitan pensar visualmente, ¿por qué negarles ese proceso de pensamiento a los estudiantes?
Pero, la visualización puede tener algunas desventajas. El problema es que las imágenes a menudo pueden sugerir falsos teoremas. Por ejemplo, durante mucho tiempo durante el siglo XIX se creyó que las funciones continuas tienen como máximo un número finito de puntos donde pueden ser no diferenciables. La idea de que una función podría ser continua en todas partes y diferenciable en ninguna parte era demasiado extraña para ser "vista". Los métodos gráficos se usaron a menudo para probar teoremas analíticos. Otro ejemplo: se consideró satisfactorio dar una prueba visual del teorema del valor intermedio de que una función continua en un intervalo [a, b] pasaba a través de todos los valores entre f (a) y f (b). La curva se consideró como un "hilo continuo", de modo que si es negativo en alguna parte y positivo en otra parte, debe pasar por cero en algún punto intermedio. Sin embargo, sabemos que la función $f(x) = x^2-2$ definida solo en los números racionales es negativa para $x = 1$ y

positiva para x = 2, pero no hay un número racional α para el cual f $(\alpha) = 0$. Por lo tanto, las habilidades de visualización pueden fallarnos.

Visualización en la clase

Históricamente, la visualización en clase se realiza con lápiz y papel, pero si bien en la actualidad con los avances tecnológicos hay otros recursos, eso no quiere decir que los métodos tradicionales desaparezcan totalmente. Más allá de las herramientas utilizadas para visualizar, desde la pizarra y tiza hasta los más avanzados softwares educativos, la visualización en el aula tiene su propio valor pedagógico. Esta puede ser una herramienta para desarrollar la intuición, para empezar a resolver un problema, o un modo natural de identificar conceptos. Además, se merece un rol central en la importante tarea de crear pruebas o demostraciones.
Debe quedar claro que enseñar a construir imágenes no es enseñar a visualizar. En la enseñanza es importante diferenciar entre utilizar una figura, manipularla en búsqueda de nuevas ideas y de comprensión, o utilizarla como esquema, como apoyo del proceso deductivo que se sigue. Es decir, en una situación la figura sirve para razonar, para generar nuevas ideas, para inventar, crear. En la otra, la imagen tan sólo tiene un papel explicativo, está subordinado a lo formal.
Al introducir visualizaciones adecuadas de ideas matemáticas complicadas, es posible brindar la posibilidad de buscar diferentes caminos en los que se pueden adquirir los conceptos, dando así intuiciones mucho más poderosas que en un enfoque tradicional. Al explorar ejemplos que funcionan y ejemplos que fallan, es posible que los estudiantes obtengan las intuiciones visuales necesarias para proporcionar ideas formales poderosas. Por lo tanto, la intuición y el rigor no tienen por qué estar en desacuerdo entre sí. Al proporcionar un contexto adecuadamente poderoso, la intuición conduce naturalmente al rigor de la prueba matemática. Pero hay que tener en cuenta que las ideas visuales que a menudo son consideradas intuitivas por un matemático experimentado, no lo son necesariamente intuitivas para un estudiante inexperto.
Desarrollar el pensamiento matemático avanzado de nuestros estudiantes supone trabajar los procesos de representar, visualizar, generalizar, clasificar, conjeturar, inducir, analizar, sintetizar, abstraer y formalizar. Sin embargo, en la educación matemática que ofrecemos, a veces corremos el riesgo de no inculcar el hábito de interpretar y decodificar adecuadamente nuestras visualizaciones, tratando de hacerlas explícitas a nuestro alumnado y traduciéndolas, cuando esto resulte adecuado, a un lenguaje formal.
Entonces, negar la visualización es negar las raíces de muchas de nuestras más profundas ideas matemáticas. En las primeras etapas del desarrollo de la teoría de funciones, límite, continuidad, etc., la visualización demostró ser una fuente fundamental de ideas. Negar estas ideas a nuestros estudiantes es aislarlos de las raíces históricas del tema.

“Demostraciones” visuales

La propuesta es trabajar con imágenes relacionadas con una expresión o concepto matemáticos que permitan percibir regularidades y relaciones, hacer predicciones y

conjeturas, justificar o refutar esas conjeturas, dar explicaciones coherentes, proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones sin entrar necesariamente en una demostración analítica rigurosa.
Estas actividades potencian la modelación matemática en los estudiantes, ya que un modelo puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible.
Un buen modelo mental o gráfico permite al estudiante buscar distintos caminos de solución y ejercitar su capacidad de modelar situaciones cada vez más complejas, que dependiendo del grado en que se trabajen, potenciarán mucho más un concepto que otro.
De todos modos la intuición visual en matemática, si bien puede sugerir teoremas que conducen a grandes saltos de "visión" en investigación, también pueden conducir a callejones sin salida de errores que engañan. Entonces es necesario ser cuidadosos con la afirmación de teoremas en análisis formal en donde cualquier mínima falta de precisión conduce casi seguro a la falsedad. En tal ambiente de temor y sospecha, las matemáticas visuales fueron relegadas por algunos matemáticos a un rol menos importante, tratándose como matemática real aquello que puede ser demostrado por medios formales.
No cabe duda de que las demostraciones analíticas son necesarias en la formación matemática, por ejemplo, de futuros profesores. Sin embargo la visualización puede complementar y allanar el camino al momento de elegir algún método convencional (directo, indirecto, por absurdo, inducción, etc.) para desarrollar una demostración rigurosa.

Geometría dinámica

Al día de hoy no podemos ignorar el rol que juegan las imágenes en los softwares de geometría dinámica (Geogebra, Cabrí).
Los softwares de geometría dinámica permiten modificar directamente con el mouse los objetos representados sobre la pantalla. La fuerza de la manipulación directa es dar la posibilidad de "ver" y "controlar" aquello que se convierte en una propiedad matemática cuando se desplaza directamente con el mouse a tal o cual punto de tal o cual figura y objeto matemático, en el caso más general. También es posible, mediante las propias acciones sobre el mouse, vivir la misma experiencia que estaba reservada para aquellos espíritus que tenían la suerte de poder "manipular y hacer que se movieran las figuras" dentro de sus cabezas, aquellos de los que se decía tenían la predisposición a las matemáticas.
Ver: www.geogebra.org/m/w8vx9nek

Procuraremos en esta presentación:

- Destacar la importancia de la visualización para que los docentes brinden a sus estudiantes la posibilidad de encontrar distintos caminos en la adquisición de conceptos y ejerciten su capacidad de modelar situaciones cada vez más complejas, que, dependiendo del nivel en que se trabajen, potenciarán mucho más su grado de generalización y que a su vez lo que se enseñe esté cargado de significado y tenga sentido para ellos.

- Que se consideren a las "demostraciones" visuales un recurso de razonamiento para que se promueva en los estudiantes el pensamiento inductivo y deductivo, alentando su reflexión y sus formas de razonamiento, a partir de:
  - trabajar con imágenes relacionadas con una expresión o concepto matemáticos que permitan percibir regularidades y relaciones, hacer predicciones y conjeturas, justificar o refutar esas conjeturas;
  - comenzar procesos de prueba matemática;
  - fundamentar su postura frente a ventajas y limitaciones de las "pruebas visuales";
  - reconocer el valor de las mismas.

ACTIVIDADES PARA LOS ESTUDIANTES

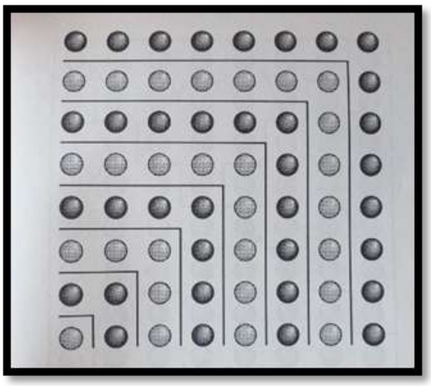
Trabajaremos con "demostraciones" visuales relativas a contenidos de distintas ramas de la matemática y con distintos niveles de complejidad, haciendo un trabajo reflexivo sobre la importancia (o no) de su uso implementación, llevando a la discusión a los estudiantes acerca de si aceptarían las mismas como demostraciones matemáticas, y en caso afirmativo, bajo qué condiciones.

1. Observa y contesta:

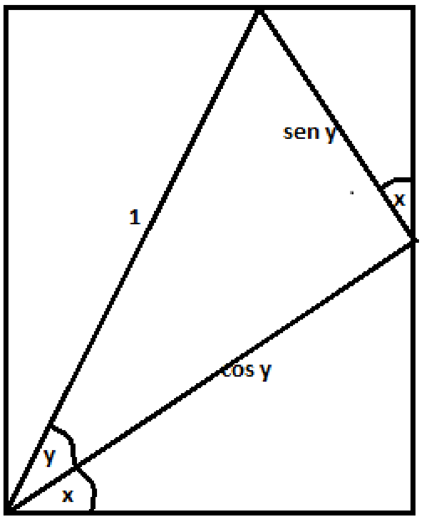
A. ¿Qué propiedad visualizas en cada una de estas imágenes? Exprésala y explica cómo llegaste a ella y en qué te centraste.

¿Existe otra manera de visualizar esta propiedad usando la misma imagen?

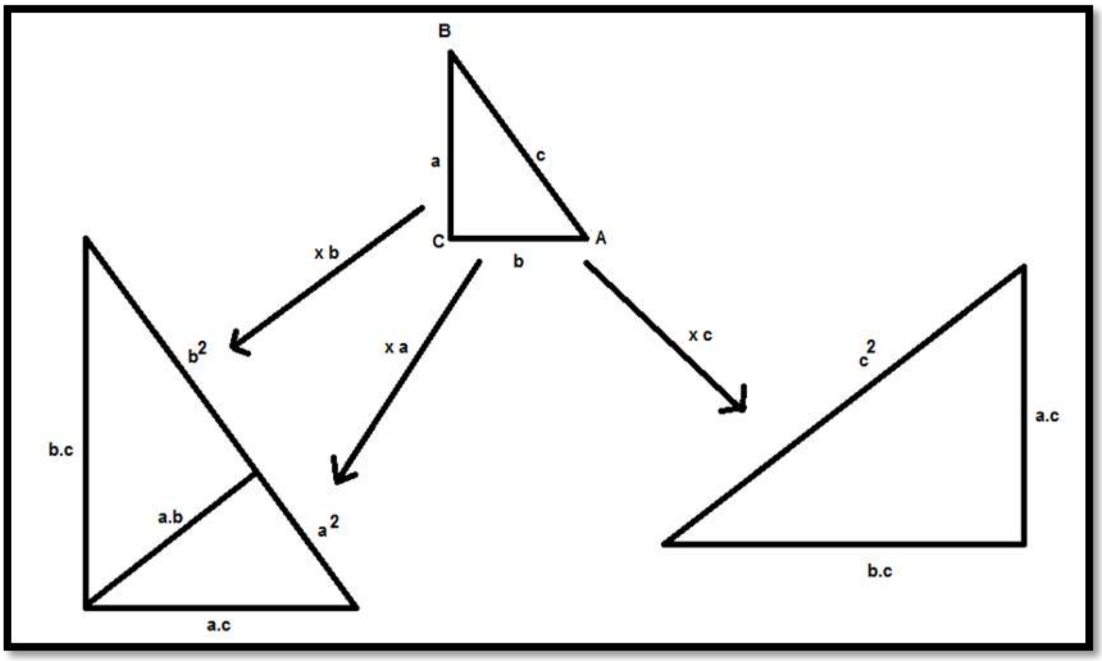
a.



b.



c.



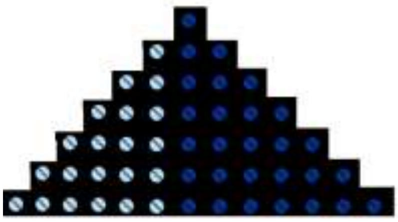
B. ¿Crees que las imágenes se restringen a un caso particular? ¿Valen estas pruebas para generalizar?

C. En algunas imágenes figuran datos y en otras no. ¿Crees que son necesarios? ¿Siempre? ¿A veces?

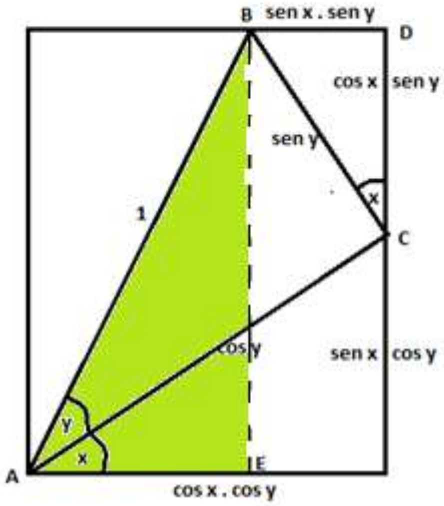
1. POSIBLES SOLUCIONES

A.

a. **Suma de los números impares.**
   Contando los puntos que están en formación de "L" y sumándolos, nos lleva al siguiente resultado:
   $1 + 3 + 5 + \ldots\ldots\ldots + (2n - 1) = n^2$
   Otra forma puede ser agrupando los puntos de igual color en triángulos.



b. **Seno y coseno de la suma de dos ángulos** En el apartado c se trabaja con propiedades trigonométricas referidas al seno y al coseno de la suma de dos ángulos.



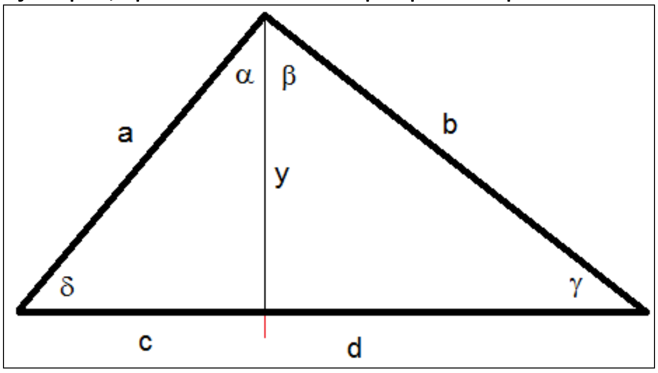
Por relaciones trigonométricas, por semejanza de triángulos (3 ángulos congruentes) y propiedades de los ángulos interiores de un triángulo se pueden verificar los datos que se agregaron a las imágenes.

Así, se puede deducir de la primera figura que:

$$\text{sen }(x + y) = \frac{\cos x\ .sen\ y + sen\ x\ .\cos y}{1} = \cos x\ .\ \text{sen } y + \text{sen } x\ .\cos y$$

$$\cos (x + y) = \frac{\cos x\ .\cos y - sen\ x\ .sen\ y}{1} = \cos x\ .\ \cos y - \text{sen } x\ .\ \text{sen } y$$

(la línea punteada es cos x . sen y + sen x .cos y, ver las relaciones en el triángulo ABE)
Una misma propiedad puede tener más de una imagen que la justifique. He aquí un ejemplo, que se refiere a la propiedad presentada en la actividad anterior.



1) c/sen[α] = a/sen[90] = a = y/sen[δ] = y/cos[α]
2) d/sen[β] = b/sen[90] = b = y /sen[γ] = y/Cos[β] ➔ y = b cos[β]
3) (c+d)/sen[α + β] = b/sen[δ] = b/cos[α] = a/sen[γ] = a/cos[β]

De 1) c = a . sen[α] = y . sen[α]/cos[α]
De 2) d = b . sen[β] = y . sen[β]/cos[β]
De 3) c+d = b . sen[α+β]/cos[α] = a . sen[α+β]/cos[β]

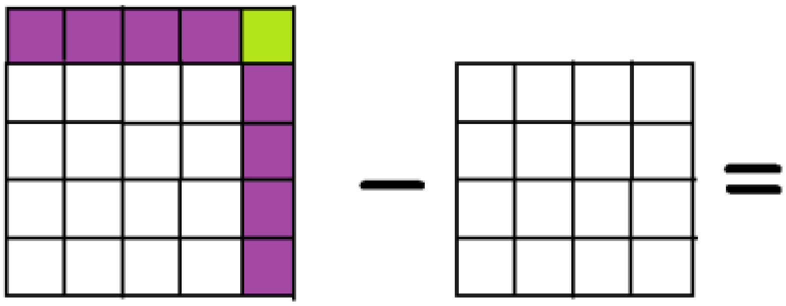
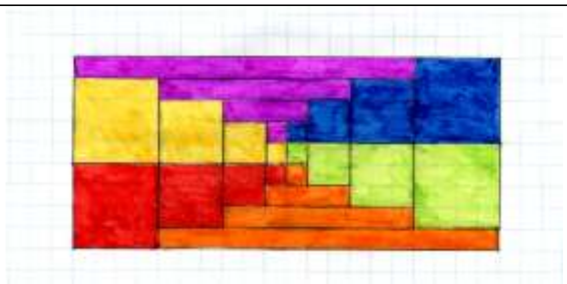
En consecuencia si hacemos la suma de c+d obtenemos:
` b . sen[α+β]/cos[α] = y . sen[α]/cos[α] + y . sen[β]/cos[β]
b . sen[α+β] = y .sen[α] + y . sen[β] . cos[α]/cos[β]
b . sen[α+β] = b . sen[α] . cos[β] + b . cos[β] . Sin[β] . cos[α]/cos[β]

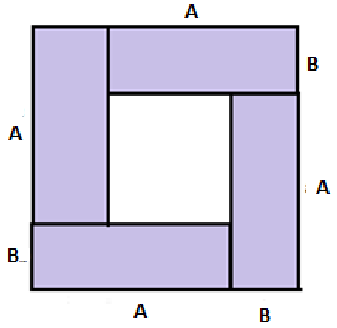
Sin[α+β] = Sin[α].Cos[β] + Sin[β].Cos[α]

c. Teorema de Pitágoras.

Justificar que todos los triángulos son semejantes porque, para llegar del triángulo cuyos lados son a, b, c a los otros triángulos, se multiplican en cada caso los tres lados por una misma constant (factor de porporcionalidad).
Se deduce que los dos triángulos obtenidos son congruentes porque tienen dos lados iguales (bc y ac) y el ángulo comprendido es recto (el triángulo grande que está dividido en dos triángulos rectángulos también es rectángulo porque los dos ángulos x e y son complementarios).
Por lo tanto, sus hipotenusas son congruentes: $a^2 + b^2 = c^2$, o sea que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (Teorema de Pitágoras).

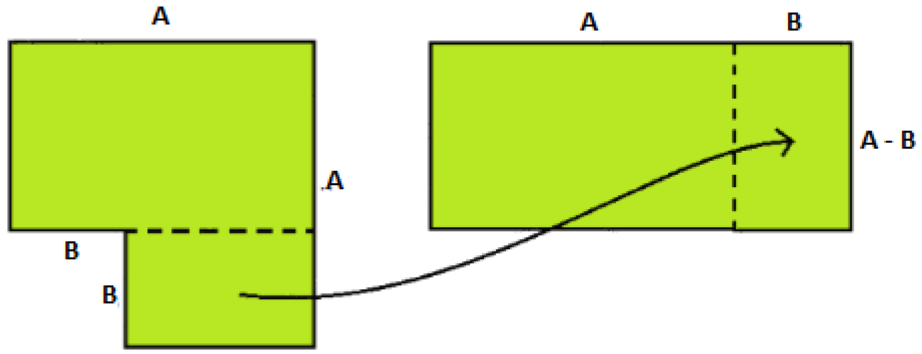
2.
Completa el siguiente cuadro con las imágenes o las expresiones que se corresponden en base a las propiedades dadas en forma visual o algebraica.

	Imagen	**Expresión algebraica**	**Razonamiento**
a		$A^2 - B^2 = (A+B).(A-B)$	
b			
c		$2^0 + 2^1 + 2^2 + ...+ +2^n= 2^{n+1} - 1$	
d			

e			

2. POSIBLES SOLUCIONES

a. Imagen solución:

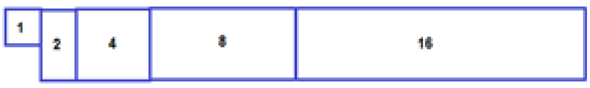


Razonamiento: Se podría pensar como diferencia de áreas de dos cuadrados: $A^2 – B^2$ y luego transformar la figura en un rectángulo como indica la flecha para que quede (A + B)(A - B). Por equivalencia de áreas resulta: $\mathbf{A^2 – B^2 = (A + B).(A - B)}$

b. Si le quitamos al primer cuadrado el segundo, nos queda una tira en L. Esa tira tiene dos partes iguales más 1 cuadradito (2k + 1). Por lo tanto: la diferencia entre dos números cuadrados es un número impar.

$\mathbf{A^2 – B^2 = 2k + 1}$ **, con k ϵ Z.**

c. Imagen solución



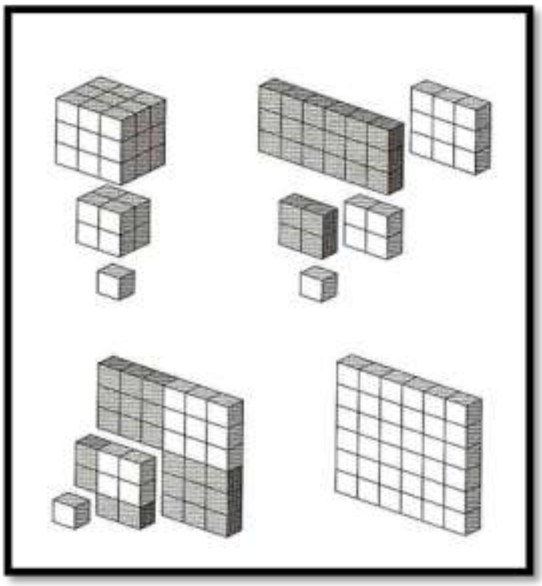
Razonamiento: Sobre uno de los lados se agrega un cuadrado
El área de los rectángulos es 1.1 = 1 ; 1.2 = 2 ; 2.3 = 6 ; 3.5 = 15...
Los primeros factores de cada término conforman la sucesión de Fibonacci .
También esos rectángulos son áureos, ya que las fracciones que se forman con cada término de la sucesión de Fibonacci y el anterior tienden al número de oro. Por lo tanto este puede ser un procedimiento para construir rectángulos áureos.
Se observa que se va duplicando el área al pasar de un rectángulo a otro, por lo tanto el área de cada rectángulo es 2^n.

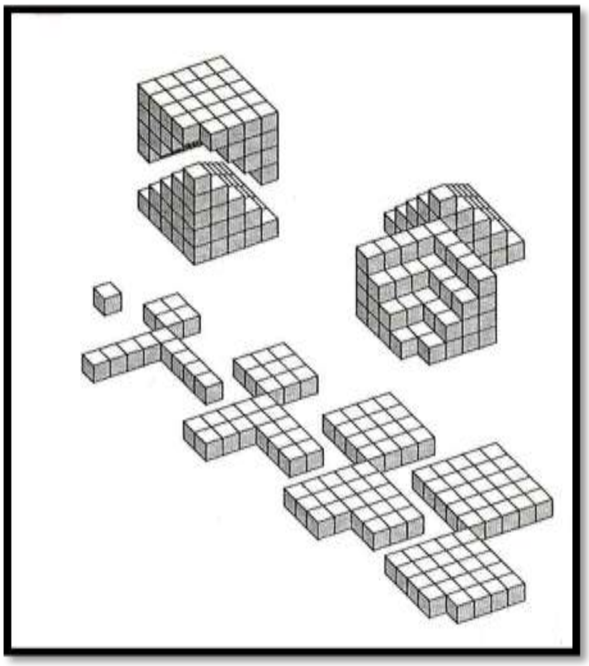
La suma de todos los rectángulos es: $2^0 + 2^1 + 2^2 + ...+ 2^n$
Los dibujos de los distintos pasos inducen a pensar que lo que se pretende es el área que se obtiene en cada caso como la suma de la sucesión correspondiente.
Comparando la sumatoria anterior con el área del dibujo en general, se tiene:
Área = $\mathbf{2^0+2^1+ ....+2^n}$ = $(2^0+2^1+ ....+2^{n-1}) \times 2 + 1 = (2^0+2^1+ ....+2^{n-1} + 2^n) \times 2 + 1 - 2^{n+1} \Rightarrow 2^0+2^1+ ....+2^n$ (la suma de las potencias de 2) = $\mathbf{2^{n+1} - 1}$
Esta serie diverge.
Si se quiere relacionar este problema con otro marco que no sea el geométrico o el algebraico, se puede relacionar con el funcional, ya que responde a una función exponencial.

d. Razonamiento y solución:
$4 . (1^2 + 2^2 + ...+ n^2) + 2 . (1.1 + 1.4 + 1.9 + ...+ 1.n^2)$ (es la suma de todos lo rectángulos) = $6 . (1^2 + 2^2 + ...+ n^2)$
El área del rectángulo es: $b . h = (2n + 1) . 2 . (n . (n + 1))/2 = (2n + 1) . (n^2 + n)$
$\Rightarrow 6 . (1^2 + 2^2 + ...+ n^2) = (2n + 1) . (n^2 + n)$
Entonces la suma de los primeros n números cuadrados es:
$\mathbf{(1^2 + 2^2 + ...+ n^2) = ((2n + 1) . (n^2 + n))/6}$
Esta serie diverge.

e.Razonamiento: La parte sombreada se puede pensar como diferencia de áreas $(A + B)^2 - (A + B - 2B)^2 =$
$= (A + B)^2 - (A - B)^2$
Pero a su vez la parte sombread son 4 rectángulos de área A.B, por lo tanto:
^{3} $\mathbf{AB = (A + B)^2 - (A - B)^2}$

3. También se pueden trabajar propiedades con imágenes hasta la 3° potencia (en 3 dimensiones). Lamentablemente no más. Analizar qué propiedades se deducen de las siguientes imágenes:





Alan L. Fry

Robert Bronson y Christofer Brueningsen

3. POSIBLES SOLUCIONES

En la primera figura vemos una suma de cubos:

Figura 1: $1^3 + 2^3 + 3^3$

Figura 2: $1^3 + 2.2^2.1 + 3.3^2.1$

Figura3: $1^3 + (3^2 - 1^3).1 + (6^2 - 3^2).1$

Figura 4: $(1 + 2 + 3)^2.1$

Como el pasaje de una figura a otra permite ver la equivalencia de los volúmenes, ya que la cantidad de cubitos es la misma, cambiada de posición se puede concluir que:

$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1+ 2 + 3)^2$

En general:

$\mathbf{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + n)^2}$

En la segunda figura se ve al cubo como una suma aritmética

$5^3 = 1 + 13 + 25 + 37 + 49$ (las diferencias son de 12)

Buscando otros casos y haciendo una distribución similar para poder llegar a una generalización se tiene que:

$4^3 = 1 + 11 + 21 + 31$ (las diferencias son de 10)

$3^3 = 1 +9+ 17$ (diferencias de 8)

$2^3 = 1 + 7$ (diferencia de 6)

$6^3 = 1 + 15 + \ldots\ldots$(diferencias de 14)

Volviendo al problema:

$5^3 = 1 + 1+12 + 1+2.12 + 1+3.12 + \ldots$

$$5^3 = 5 + 12 \sum_{i=1}^{4} i$$

$$4^3 = 4 + 10 \sum_{i=1}^{n} i$$

En general:

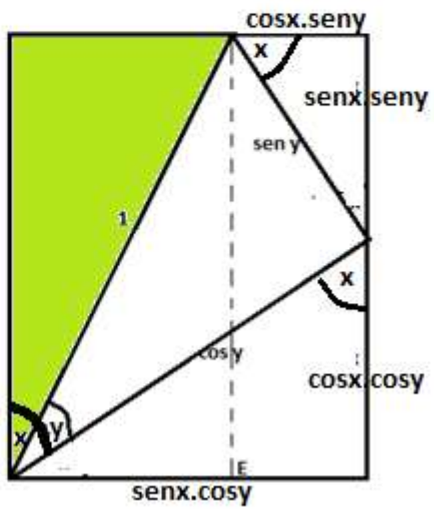
$$\mathbf{n^3 = n + (2n+2) \sum_{i=1}^{n-1} i} \quad \textbf{o} \quad \mathbf{n^3 = n + \sum_{i=1}^{n-1} 2i\,(n+1)}$$

4. Buscar una imagen para la siguiente propiedad: *Cada número cubo es la suma de números impares consecutivos.*(Empezar con casos particulares para llegar a una imagen general).

MÁS PROBLEMAS CON SUS RESPECTIVAS SOLUCIONES:

1. sen (α – β) y cos (α – β)

Posible solución:



Por relaciones trigonométricas, por semejanza de triángulos y propiedades de los ángulos interiores de un triángulo se pueden verificar los datos que se agregaron a la imagen y se pueden visualizar claramente que:

sen (x – y) = sen x . cos y - cos x . sen y

cos (x – y) = cos x . cos y + sen x . sen y

Demostración analítica:

sen (x - y) = sen [x + (-y)] = sen x . cos(- y) + cos x . sen (-y)

como la función seno es una función impar => sen (-y) = - sen y

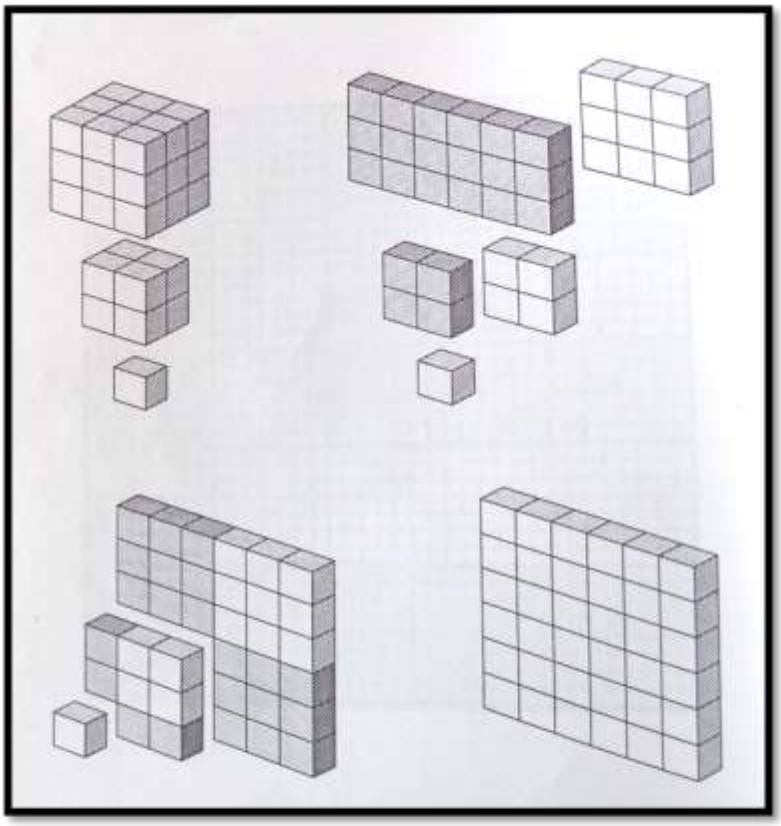
a su vez, la función coseno es una función => cos (-y) = cos y

Por lo tanto sen (x – y) = sen x . cos y – cos x . sen y

La demostración es análoga para cos (x – y)

2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$

Posible solución:



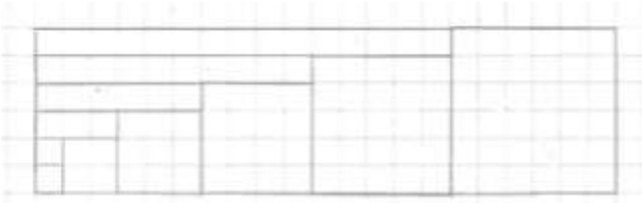
Como se trata de una propiedad referente a números naturales, se puede demostrar la misma por el método de Inducción Completa:

P(1): $1^3 = 1^2$ (verdadero)

Suponemos P(h) verdadero entonces hay que demostrar que P(h) => P(h+1)

P(h): $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + h^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + h)^2$ verdadero
Debemos llegar a que P(h+1) es verdadero
$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + h^3 + (h+1)^3 = [1 + 2 + 3 + \ldots + h)^2 + (h+1)^3$
Por hipótesis inductiva: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + h^3 + (h+1)^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + h)^2 + (h+1)^3 = \left[\frac{[h.(h+1)]}{2}\right]^2 + (h+1)^3$ (por propiedad de la suma de los primeros h números naturales)$= \frac{h^2.(h+1)^2+4.(h+1)^3}{4} = \frac{(h+1)^2.(h^2+4.(h+1)}{4} = \frac{(h+1)^2.(h^2+4h+4)}{4} = \frac{(h+1)^2.(h+2)^2}{4} = \left[\frac{(h+1).(h+2)}{2}\right]^2 = (1 + 2 + 3 + \ldots + h + h+1)^2$
Queda así demostrado.

3.



Posible solución:
$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + 1.1 + 3.1 + 6.1 + 10.1 + \ldots = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + 1 + 3 + 6 + 10 + \ldots = [(2n + 1) . (n^2 + n)]/6$ (ver ejercicio 10) $+ \sum_{i=1}^{n} i.(i+1)/2$ (es la sumatoria de la sumatoria de los primeros n números naturales, dado que 1=1 ; 3= 1+2 ; 6= 1+2+3........)

Si se analiza el área del rectángulo como un todo, su área es:
b . h = (1+2+3+...+n). n = [n (n+1)]/2 .n
$\Rightarrow [(2n + 1) . (n^2 + n)]/6 + \sum_{i=1}^{n} i.(i+1)/2 = \{[n (n+1)]/2\} .n$
Por lo tanto 1 + 3 + 6 + 10+ ....(la suma de los números triangulares) =
$= \sum_{i=1}^{n} i.(i+1)/2 = [n^2 . (n+1)]/2 - [(2n + 1) . (n^2 + n)]/6 = [(n + 1)^2 . n]/6$

REFERENCIAS

ALSINA, C. y NELSEN, R. (2006): *Math Made Visual.* The Mathematical Association of America (Incorporated).
ANAYA-CAVALLARO, M.I.: *Visualización, conocimiento conceptual y procedimental en matemática para ingenieros. El caso de la integral definida.* National University of Technology (UTN)
BRESSAN, A. M. y otros (2000): *Razones para enseñar geometría en la educación básica.* Ed. Novedades Educativas.
DÍAZ BARRIGA ARCEO, E. (2006): *Geometría dinámica con Cabri Geometrie.* Ed. Kali.
DRISCOLL, M. y otros (2008): *The fosterinf geometric thinking toolkit.* A guide for staff development. Ed. Victoria Merecki.
GÓMEZ CHACÓN, M.I.: *Visualización matemática: intuición y razonamiento.*

GUZMÁN, M. de (2006): *El Rincón en la Pizarra. Ensayo de visualización en análisis.*
GIAQUINTO, MARCUS (1992): *Visualizing as a means of Geometrical Discovery.* Mind and Language. Ed. Pirámide.
KINDT, M. (2002): *Probar o no probar, esa es la cuestión.* Universidad de Las Palmas. Canarias. https://mdc.ulpgc.es/cdm/ref/collection/numeros/id/508
NELSEN, R. (1993): *Proofs Without Words .* The Mathematical Association of America (Incorporated).
NELSEN, R. (2000): *Proofs Without Words II .* The Mathematical Association of America (Incorporated).
RABINO, A. y CUELLO, P. (2017): *La Matemática Realista en la Educación Secundaria.* Ed. Novedades Educativas.
TALL, D. (1991): *Intuición y rigor: el rol de la visualización en el cálculo.* Investigación en Educación Matemática Centro Universitario de Warwick U.K.

Páginas relacionadas: www.gpdmatematica.org.ar y www.geogebra.org/m/w8vx9nek